Rappresentazione spettrale della funzione di Green a due punti.

Discuteremo proprietà generali delle funzioni di Green a due punti. Per semplicità consideriamo un campo scalare reale.

Consideriamo la $\langle 0 | T\{\phi(x)\phi(0)\} | 0 \rangle$ a $x^0 > 0$ e inseriamo tra i campi $\phi(x)$ e $\phi(0)$ un set completo di stati intermedi

$$\langle 0 | \phi(x)\phi(0) | 0 \rangle = \sum_\alpha \langle 0 | \phi(x) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi(0) | 0 \rangle$$

La somma include stati a una particella e stati a molte particelle. Tutti gli stati sono identificati dal quadrimpulso totale P_μ e dalla corrispondente massa invariante M, tale che $P_\mu P^\mu = M^2$. Ovviamente, nel caso di stati con una particella di massa m, si ha $P_\mu P^\mu = m^2$.
Riscriviamo

$$\langle 0 | \phi(x)\phi(0) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x)\phi(0) | 0 \rangle_1$$

$$+ \langle 0 | \phi(x)\phi(0) | 0 \rangle_{\geq 2}$$

Il contributo associato ai processi con stati intermedi con una particella è

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_1 = \int d\vec{p}^3 \langle 0|\phi(x)|p\rangle\langle p|\phi(0)|0\rangle$$

$$= \int d\vec{p}^3 e^{-ipx} |\langle 0|\phi(0)|p\rangle|^2 .$$

Ora notiamo che l'elemento di matrice a primo membro è un invariante di Lorentz. Quindi possiamo scrivere

$$|\langle 0|\phi(0)|p\rangle|^2 = \frac{Z(p^2)}{(2\pi)^2 2\omega_p} \qquad \omega_p^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$$

con $Z(p^2) = Z(m^2) = Z$, e otteniamo

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle = Z \int \frac{d\vec{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipx}}{2\omega_p}$$

Ripetendo il calcolo per il caso $x_0 < 0$ e mettendo insieme i due risultati otteniamo

$$\langle 0|T[\phi(x)\phi(0)]|0\rangle_1$$

$$= Z \int \frac{d\vec{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\vec{x}}}{2\omega_p} \left[e^{-i\omega_p x^0}\theta(x_0) + e^{i\omega_p x^0}\theta(-x_0) \right]$$

$$= Z i \Delta_F(x, m^2)$$

dove $\Delta_F(x, m^2)$ è la funzione a due punti che descrive la propagazione libera di una particella di massa m.

Passiamo ora al contributo dei processi con stati intermedi con più di una particella. In questo caso lo spettro della massa invariante M è continuo, come si vede considerando per esempio il caso di impulso totale $|\vec{P}_{tot}| = 0$ e due particelle. Abbiamo che

$$
\begin{aligned}
E &= \sqrt{M^2 + |\vec{P}_{tot}|^2} = M \qquad \qquad \vec{P}_1 = -\vec{P}_2 = \vec{P} \\
&= \sqrt{m^2 + |\vec{P}_1|^2} + \sqrt{m^2 + |\vec{P}_2|^2} \\
&= 2\sqrt{m^2 + |\vec{P}|^2} \geq 2m
\end{aligned}
$$

Consideriamo l'elemento di matrice con stati intermedi a più particelle per $x^0 > 0$

$$
\begin{aligned}
\langle 0| \phi(x)\, \phi(0) |0\rangle_{\geq 2} &= \sum_n \langle 0| \phi(x) |n\rangle \langle n| \phi(0) |0\rangle \\
&= \sum_n e^{-i p_n x} \, |\langle 0| \phi(0) |n\rangle|^2
\end{aligned}
$$

Ora possiamo inserire due integrali di funzioni δ (p_n è il quadrimpulso dello stato $|n\rangle$)

$$\sum_n e^{-ip_n x} |\langle 0|\phi(0)|n\rangle|^2$$

$$= \int dM^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(p^2-M^2) \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p_n) \, e^{-ip_n x} |\langle 0|\phi(0)|n\rangle|^2$$

$$= \int dM^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(p^2-M^2) \, e^{-ipx} \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p_n) |\langle 0|\phi(0)|n\rangle|^2$$

Ora invochiamo ancora l'invarianza di Lorentz dell'elemento di matrice $\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_1$, dalla quale segue l'invarianza di Lorentz di $\sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\;)\,|\;|^2$. Possiamo quindi porre

$$\sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p_n) |\langle 0|\phi(0)|n\rangle|^2 = (2\pi)\sigma(M^2)$$

e, sostituendo, otteniamo

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{\geq 2} = \int dM^2 \, \sigma(M^2) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{p}\vec{x}} \int dp_0 \, \delta(p_0^2 - \underbrace{W_p^2}_{\sqrt{|\vec{p}|^2+M^2}}) \, e^{-ip_0 x^0}$$

$$= \int dM^2 \sigma(M^2) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(W_p x^0 - \vec{p}\vec{x})}}{2W_p}$$

Mettendo di nuovo insieme i risultati per $x^0>0$ e $x^0<0$, che si ottiene in modo del tutto analogo, otteniamo

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{\gg 2} = \int dM^2\sigma(M^2)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{p}\vec{x}}}{2W_p}$$

$$\times\left[e^{-iW_px^0}\theta(x_0)+e^{iW_px^0}\theta(-x_0)\right]$$

$$=\int dM^2\sigma(M^2)\,i\Delta_F(x,M^2)$$

la rappresentazione spettrale della funzione di Green a due punti

$$\langle 0|T[\phi(x)\phi(0)]|0\rangle = Z\,i\Delta_F(x,m^2)$$

$$+\int_{m^2_{thr}}^{\infty}dM^2\sigma(M^2)\;i\Delta_F(x,M^2)\;,$$

chiamata anche rappresentazione di Kallen-Lehman, è un risultato esatto che mostra come la funzione a due punti consta sempre di una parte con un polo semplice alla massa della particella, e di una regolare – la parte singolare è associata a processi con stati intermedi ad una particella, mentre la parte regolare ha origine dal contributo di stati con più di una particella, il cui spettro in M^2 è continuo e descritto dalla funzione $\sigma(M^2)$. Per la teoria $\lambda\phi^4$ $m_{thr}=3m$.