Kernel dell' equazione di Schrödinger

Dalla

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H\psi(x,t)$$

segue che

$$\psi(x,t) = e^{-iHt}\,\psi(x,0) \qquad (1)$$

Ora usiamo le soluzioni dell' equazione stazionaria

$$H\phi_n(x) = E_n\phi_n(x)$$

per scrivere esplicitamente la $\psi(x,0)$ nella forma

$$\psi(x,0) = \sum_n c_n\phi_n(x) \qquad (2)$$

dove

$$c_n = \int dy\,\phi_n^*(y)\,\psi(y,0) \qquad (3)$$

Sostituendo la (3) nella (2) ed usando la (1) otteniamo la

$$\psi(x,t) = \int dy\sum_n \phi_n^*(y)\,e^{-iE_nt}\,\phi_n(x)\,\psi(y,0)$$

che mostra che il kernel dell'equazione di Schrödinger, scritta in forma integrale, è

$$k(xt;y0) = \sum_n \Phi_n^*(y)\, e^{-iE_n t}\, \Phi_n(x)$$

Dalle $\Phi_n(x) = \langle x | n \rangle$, $\Phi_n^*(y) = \langle n | y \rangle$ segue infine la

$$k(xt;y0) = \sum_n \langle x | n \rangle \langle n | e^{-iHt} | y \rangle$$

$$= \langle x | e^{-iHt} | y \rangle .$$