

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA
“LA SAPIENZA”

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea Specialistica

Emissione di neutrini e raffreddamento delle stelle compatte



Relatore:

Dr. Omar Benhar

Candidato:

Salvatore Fiorilla

A.A. 2006-2007

Indice

Introduzione	1
1 Le stelle di neutroni	5
1.1 Formazione di una stella di neutroni	5
1.2 Struttura di una stella di neutroni	6
1.2.1 Atmosfera	7
1.2.2 Crosta esterna	8
1.2.3 Crosta interna	8
1.2.4 Core esterno	8
1.2.5 Core interno	9
2 Equazioni di raffreddamento per una stella di neutroni	11
2.1 Nozioni preliminari di termodinamica e gravitazione	11
2.1.1 Grandezze termodinamiche fondamentali	11
2.1.2 Leggi della termodinamica in forma relativistica	12
2.1.3 Massa inerziale per unità di volume	13
2.1.4 Campo gravitazionale a simmetria sferica	14
2.1.5 Redshift gravitazionale	15
2.2 Equazioni di struttura	16
2.3 Equazione dell'equilibrio termico	20
2.4 Equazione del trasporto di energia	25
2.4.1 Trasporto radiativo di energia	25
2.4.2 Trasporto di energia per conduzione	26
2.4.3 Trasporto combinato	27
2.5 Compendio delle equazioni	28
3 Principali meccanismi di raffreddamento	31
3.1 Processi Urca diretti	31
3.1.1 Soglia del processo Urca diretto	33
3.2 Processi Urca modificati	34
3.2.1 Ramo neutronico	38
3.2.2 Ramo protonico	39

3.3	Bremsstrahlung neutrinica nelle collisioni nucleone-nucleone	40
4	L'algoritmo per la soluzione delle equazioni di raffreddamento	47
4.1	Preliminari sulla discretizzazione	47
4.2	Equazioni dell'evoluzione termica	48
4.3	Discretizzazione	49
4.4	Lo schema tridiagonale di Crank-Nicholson	50
4.5	Il passo temporale	52
4.6	Il passo spaziale	52
4.7	Condizioni al contorno	53
4.8	Strategia d'iterazione	54
4.9	Test di prova del codice	54
5	Risultati	57
5.1	Input fisici	57
5.2	La curva di raffreddamento	60
5.3	Il profilo di temperatura interna	63
6	Conclusioni	69
A	Phase-space decomposition	71
A.1	Calcolo di A	72
A.2	Calcolo di I	73
B	Emissività: dalle unità naturali al sistema CGS	77
C	Input del programma	79
C.1	Equazioni TOV	79
C.2	Emissività neutrinica	79
C.2.1	Processi Urca	80
C.2.2	Bremsstrahlung tra nucleoni nel core	80
C.2.3	Bremsstrahlung e-Z nella crosta	81
C.2.4	Decadimento del plasmone	81
C.2.5	Bremsstrahlung n-n nella crosta	81
C.3	Capacità termica	82
C.4	Conduttività termica	83
C.5	Relazione tra temperatura interna e temperatura superficiale	88
C.6	Descrizione dei file che compongono il programma	88
C.7	Descrizione dei file di input	89
	Bibliografia	91

Introduzione

Subito dopo la scoperta del neutrone, nel 1932, furono avanzate un gran numero di congetture sulla possibile esistenza di stelle estremamente dense, la cui materia fosse interamente composta da questa particella. L'elemento più significativo per poter apprezzare la peculiarità questi sistemi è certamente rappresentato dalla loro densità media: le osservazioni astronomiche indicano infatti che le stelle di neutroni possiedono una massa pari a circa 1.4 masse solari ($M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33} \text{ g cm}^{-3}$), contenuta all'interno di un volume di raggio pari a circa 10 Km. Da questi dati si ricava una densità di materia paragonabile a quella dei nuclei atomici, $\sim 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$, ovvero 100 milioni di tonnellate per centimetro cubo.

La densità media della Terra è 5.5 g cm^{-3} e la struttura della materia in essa contenuta è determinata essenzialmente dalle interazioni elettromagnetiche. Nelle stelle di neutroni, a causa dell'altissima densità, la situazione è completamente diversa. Al crescere della densità, l'interazione coulombiana diviene infatti sempre più trascurabile rispetto alle altre interazioni fondamentali: forti, deboli e gravitazionali. Inoltre, effetti quantistici che nella materia terrestre si manifestano solo a livello microscopico, nelle stelle di neutroni contribuiscono a determinare la struttura della materia su scala macroscopica. Per questo motivo, le stelle di neutroni rappresentano un laboratorio ideale per lo studio sia delle interazioni fondamentali che della struttura della materia in condizioni estreme, completamente diverse da quelle esistenti in natura o ottenibili in laboratorio sulla Terra.

Il punto di partenza per costruire un modello di stella di neutroni è la determinazione dell'equazione di stato della materia al suo interno, che fornisce la pressione e la frazione delle varie specie di particelle presenti in funzione della densità. Da quanto abbiamo già accennato, si comprende come l'incertezza sulla struttura delle stelle di neutroni aumenti quanto più ci si allontana dalla regione di densità conosciuta, cioè man mano che ci si allontana dalla superficie e ci si sposta verso il centro.

Per quanto riguarda lo stato più esterna della stella (a densità $\rho < 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$), esiste un consenso sostanzialmente unanime su quale sia lo stato fondamentale della materia, essendo questo largamente deducibile dalla sistematica dei nuclei atomici.

Un ragionevole grado di consenso si registra anche sulla descrizione della crosta interna, di densità compresa tra $\sim 10^{11}$ e $\sim 4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$, in cui si ritiene che la materia consista ancora di neutroni, protoni ed elettroni, cioè gli stessi costituenti della materia terrestre.

A densità maggiori, che si incontrano procedendo verso l'interno, il contenuto speculativo dei modelli teorici aumenta inevitabilmente. Si ipotizzano la comparsa di diverse particelle, sia barioni che mesoni, e, in condizioni estreme, anche il manifestarsi di nuove fasi della materia, predette dalla teoria fondamentale delle interazioni forti e caratterizzate dal deconfinamento dei quark che costituiscono gli adroni.

Lo studio del raffreddamento della stella è, almeno in linea di principio, un'utile fonte di informazioni, che possono fornire dei vincoli per i modelli teorici dell'equazione di stato.

La principale causa del raffreddamento è l'emissione di neutrini, che vengono prodotti in numerosi processi che coinvolgono i costituenti della materia stellare. Ad esempio, il decadimento beta del neutrone nel core della stella, chiamato anche processo Urca¹ diretto [2]. Si tratta di un processo a soglia, che richiede cioè la presenza di una certa frazione di protoni, ed è di gran lunga il più efficiente. Una volta costruito il corrispondente modello di raffreddamento, dal confronto con i dati sperimentali, si può inferire se il processo Urca è attivo, ponendo così dei vincoli sulla frazione di protoni, che è a sua volta legata ad importanti proprietà dell'interazione tra i neutroni.

L'evoluzione termica della stella è determinata da due equazioni differenziali, che descrivono l'una l'equilibrio termico e l'altra il trasporto di energia all'interno della stella. La loro risoluzione richiede la conoscenza di diverse grandezze caratterizzanti le proprietà della materia stellare, come l'emissività neutrinica, la capacità termica e la conduttività termica. È quindi fondamentale l'individuazione di tutti i possibili processi che contribuiscono.

Lo scopo di questo lavoro è lo sviluppo di un programma di calcolo che consenta di costruire, data l'equazione di stato, il corrispondente modello di raffreddamento, cioè la dipendenza della temperatura dal tempo e dalla posizione all'interno della stella. La parte centrale del programma, per la scrittura del quale abbiamo utilizzato il linguaggio FORTRAN, consiste nell'implementazione di un algoritmo per la risoluzione delle equazioni di raffreddamento. Poiché, come abbiamo detto prima, in queste equazioni compaiono numerose grandezze (emissività, capacità e conduttività termica, potenziale gravitazionale, ecc.), una parte consistente del programma è dedicata al loro calcolo.

Come prima applicazione, abbiamo considerato un modello di struttura stellare che suppone il core composto da materia *npe* (cioè costituita solo da neutroni, protoni ed elettroni) e descritto dall'equazione di stato di Akmal Pandharipande e Ravenhall (APR) [3].

La tesi è strutturata nel modo seguente.

Il Capitolo 1 contiene una breve introduzione sulla formazione delle stelle di neutroni e sulla loro struttura.

Nel Capitolo 2, dopo il richiamo di alcuni concetti basilari, vengono ricavate le equazioni necessarie per costruire un modello stellare completo. Esse sono divisibili in due gruppi: il primo contiene le equazioni che fissano le proprietà statiche della stella, quali la massa e il

¹Urca era il nome di un casinò di Rio de Janeiro, chiuso dalle autorità brasiliane nel 1955. Secondo il racconto di Gamow stesso [1] "We called it the Urca Process, partially to commemorate the casino where we first met, and partially because the Urca Process results in a rapid disappearance of thermal energy from the interior of a star, similar to the rapid disappearance of money from the pockets of the gamblers".

raggio, mentre il secondo contiene le equazioni che descrivono l'evoluzione termica, cioè le sue proprietà termodinamiche.

Nel Capitolo 3 si passano in rassegna i principali processi attivi nel core della stella, che hanno come risultato l'emissione di neutrini, fornendo anche una stima dei rate e delle corrispondenti emissività.

Nel Capitolo 4 viene descritto l'algoritmo utilizzato per la risoluzione delle equazioni di raffreddamento.

I risultati del nostro lavoro sono esposti nel Capitolo 5, dove vengono confrontati due differenti modelli di raffreddamento.

L'Appendice A descrive il calcolo dell'emissività dei processi Urca diretti nell'approssimazione di decomposizione dello spazio delle fasi. Questa Appendice è da intendersi come un complemento al Capitolo 3.

L'Appendice B fornisce il fattore di conversione dell'emissività dal sistema di unità naturali al sistema CGS.

L'Appendice C è un compendio di tutti i processi considerati per il calcolo dell'emissività, della capacità e della conduttività termica, e delle relative formule implementate nel programma.



Capitolo 1

Le stelle di neutroni

1.1 Formazione di una stella di neutroni

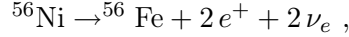
Le stelle di neutroni rappresentano uno dei possibili prodotti finali dell'evoluzione stellare [4, 5, 6]. Quando una nube gassosa collassa sotto l'azione della forza di gravità, ha inizio il processo di formazione di una stella. All'aumentare della densità della nube cresce anche la sua temperatura, la quale può raggiungere un valore sufficientemente alto da innescare la catena di reazioni nucleari che trasformano l'idrogeno in elio. Tali reazioni sono esotermiche, ovvero rilasciano energia, la quale si manifesta sotto forma di energia cinetica delle particelle prodotte. Un nuovo stato di equilibrio è realizzato nel momento in cui la pressione di origine termica, che tende a far espandere la nube, bilancia la pressione di origine gravitazionale, che invece tende a farla contrarre. Una volta esaurito l'idrogeno, venendo a mancare il meccanismo che si oppone alla gravità, la contrazione ricomincia. Se la quantità di elio prodotta è sufficientemente grande, questa nuova contrazione, facendo aumentare ulteriormente la temperatura, può innescare un nuovo ciclo di reazioni, con la produzione di elementi sempre più pesanti secondo la catena: elio \rightarrow carbonio \rightarrow neon \rightarrow ossigeno \rightarrow silicio \rightarrow ferro. Dunque, la vita di una stella è caratterizzata da un'alternanza di periodi di contrazione e di nucleosintesi. In ogni caso, quest'alternanza si arresta quando si giunge alla produzione del ferro ^{56}Fe , che, essendo il nucleo più stabile esistente in natura, non permette ulteriori reazioni esotermiche di fusione.

I possibili esiti dell'evoluzione di una stella, che dipendono esclusivamente dalla sua massa iniziale M_0 , sono tre: la formazione di una nana bianca, per $M_0 < 4 M_\odot$, o di una stella di neutroni o di un buco nero, per $M_0 > 4 M_\odot$.

Per $M_0 < 4 M_\odot$, la stella non riesce a raggiungere la temperatura necessaria per innescare la fusione del carbonio, e la catena di reazioni si arresta a questo stadio. L'equilibrio di una nana bianca è garantito dalla pressione di degenerazione degli elettroni, i quali, essendo particelle di spin semintero, obbediscono al principio di esclusione di Pauli. Ciò implica che anche a temperatura nulla gli elettroni occupano stati di impulso non nullo, esercitando quindi una pressione. Valori tipici di massa e raggio di una nana bianca sono $M \sim 1 M_\odot$ e $R \sim 5 \times 10^3 \text{ km}$, corrispondenti ad una densità media di $\sim 10^6 \text{ g cm}^{-3}$.

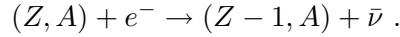
Nel 1931 Chandrasekhar scoprì l'esistenza di un limite massimo per la massa di una nana bianca, pari a $\sim 1.44 M_{\odot}$, oltre il quale la pressione di degenerazione degli elettroni non riesce più ad opporsi al collasso gravitazionale [7].

Le stelle con massa iniziale maggiore di $4 M_{\odot}$ riescono a raggiungere al loro interno temperature sufficientemente alte da attivare tutti gli stadi del processo di nucleosintesi, che ha come conclusione la formazione di un core di ferro. Una parte di questo ferro è formato dalla reazione



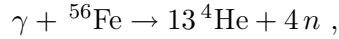
che provoca la comparsa di neutrini. Questi ultimi, non interagendo apprezzabilmente con la materia, fuoriescono dal core sottraendogli energia e, di conseguenza, contribuiscono, insieme all'attrazione gravitazionale, a favorire il collasso. Tra gli altri processi che accelerano il collasso i più efficienti sono:

- La *neutronizzazione*, ovvero la cattura di elettroni da parte dei protoni presenti nei nuclei:



Si noti che il processo inverso, $(Z - 1, A) \rightarrow (Z, A) + e^- + \bar{\nu}$ è vietato, essendo tutti gli stati della distribuzione di Fermi dei protoni occupati, a causa della forte degenerazione. Questo processo beta porta a una riduzione degli elettroni, con una corrispondente diminuzione della pressione, e alla comparsa di nuclei sempre più ricchi di neutroni;

- La *fotodisintegrazione* del ferro



che assorbe energia dal sistema essendo una reazione endotermica.

Sotto l'azione di tutti questi processi il core continua a contrarsi e ad accrescere la sua massa. Quando questa supera il limite di Chandrasekhar il core collassa, in un tempo dell'ordine della frazione di secondo, raggiungendo la densità tipica dei nuclei, circa $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. In queste condizioni il core si comporta come un enorme nucleo atomico, composto per lo più da neutroni, e non essendo ulteriormente comprimibile reagisce elasticamente, producendo una violenta onda d'urto che espelle nello spazio gli strati esterni della stella. Questo processo è all'origine dell'esplosione di una *supernova*, cioè una stella la cui luminosità aumenta in pochi giorni fino a superare la luminosità solare di un fattore $\sim 10^9$, che poi scende a $\sim 10^2$ nel giro di qualche mese. Lo strato esterno proiettato nello spazio appare adesso come una nube di gas in espansione, una *nebulosa*, al cui centro si trova ciò che rimane del core: una *stella di neutroni*.

1.2 Struttura di una stella di neutroni

Nonostante la fisica di una stella di neutroni sia molto complicata ed esistano numerosi approcci alla sua descrizione teorica, molte proprietà della sua struttura interna risultano

largamente indipendenti dal particolare modello utilizzato per ottenerle, permettendo una rappresentazione schematica sufficientemente generale. Due assunzioni fondamentali sono alla base di tutti i modelli sviluppati. La prima è che la materia di una stella di neutroni possa considerarsi a temperatura nulla. Questa assunzione è giustificata dal fatto che la temperatura interna, dedotta dalle osservazioni, risulta dell'ordine di $10^9 K$, $\sim 100 KeV$, mentre la tipica energia cinetica di Fermi di un nucleone a densità $\rho \sim 10^{14} g cm^{-3}$ è dell'ordine di qualche decina di MeV . La seconda assunzione è che la stella sia trasparente ai neutrini, essendo, in base ai calcoli, il cammino libero medio di un neutrino nella materia nucleare a $T \sim 0$ molto maggiore del raggio tipico di una stella di neutroni ($\sim 10 Km$).

La Figura 1.1 mostra una rappresentazione schematica della sezione di una stella di neutroni. Si può notare come, procedendo verso il centro della stella, la materia presenta stati di aggregazione differenti all'aumentare della densità.

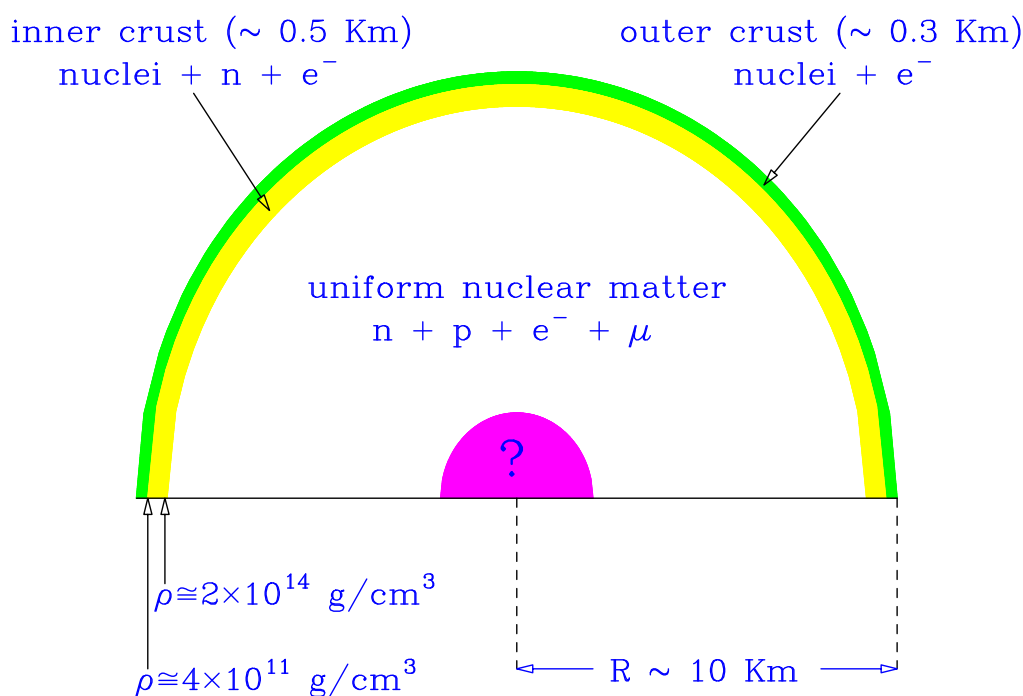


Figura 1.1. Rappresentazione schematica della sezione di una stella di neutroni.

1.2.1 Atmosfera

L'atmosfera è un sottile strato di plasma (ferro o idrogeno o elio), che determina lo spettro della radiazione elettromagnetica termica emessa dalla stella [8]; da questo spettro è possibile ricavare informazioni sui parametri della stella, quali temperatura, accelerazione di

gravità, composizione chimica dell'atmosfera, e, di conseguenza, sulla sua struttura interna. Lo spessore varia da alcune decine di centimetri per le stelle calde ad alcuni millimetri per quelle fredde.

1.2.2 Crosta esterna

La crosta esterna ha uno spessore di $\sim 0.3 \text{ Km}$ e la sua densità varia tra $\rho \sim 10^7 \text{ g cm}^{-3}$ in superficie e $\rho \sim 4.3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$. In essa la materia è composta da un reticolo di nuclei atomici immersi in un gas di elettroni. I nuclei sono soggetti al fenomeno della neutronizzazione, per cui al crescere della densità diventano sempre più ricchi in neutroni. l'aumento della percentuale di neutroni ha il suo limite al confine tra la crosta esterna e quella interna, oltre il quale gli stati di energia negativa disponibile nei nuclei sono tutti occupati ed i neutroni iniziano a popolare gli stati dello spettro continuo con energia positiva. I neutroni sono quindi liberi di lasciare il nucleo in cui sono stati prodotti, dando luogo al fenomeno del *neutron drip*.

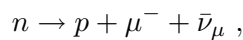
1.2.3 Crosta interna

La crosta interna è spessa circa 0.5 Km ; la densità varia tra quella caratteristica del neutron drip e $\sim 1.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. La materia è essenzialmente composta da nuclei atomici ricchi in neutroni, immersi in un gas di elettroni e neutroni; tuttavia, all'aumentare della densità cambia la forma in cui la materia è strutturata.

Per $\rho < 4 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ la pressione è dovuta principalmente al gas di elettroni, mentre per $\rho > 4 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ domina il contributo del gas di neutroni. Nella crosta interna la materia si presenta come una miscela di due fasi: una relativamente ricca di protoni, rappresentata dai nuclei atomici, detta PRM (*proton rich matter*), l'altra un gas di neutroni indicato come NG (*neutron gas*). Per $4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3} < \rho < 0.35 \rho_0$ ($\rho_0 \sim 2.7 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$) lo stato fondamentale è costituito da sferette di PRM, cioè ammassi di nuclei sferici, circondate dal gas di elettroni e neutroni. All'aumentare della densità, nella regione $0.35 \rho_0 < \rho < 0.5 \rho_0$, queste sferette si avvicinano sempre più fino a fondersi, formando delle sbarrette sottili (*spaghetti*) di PRM immerse nel NG. Infine, per $0.5 < \rho < 0.56 \rho_0$, queste sbarre si fondono per formare degli strati (*lasagne*) di PRM alternati a strati di NG. A densità $\rho > 0.56 \rho_0$ si passa nel core esterno, dove non c'è più separazione tra le due fasi e la materia si presenta come un fluido omogeneo di neutroni, protoni ed elettroni in equilibrio rispetto al decadimento beta (*npe matter*).

1.2.4 Core esterno

Al crescere della densità, il potenziale chimico degli elettroni può superare il valore della massa a riposo del muone ($m_\mu = 105 \text{ MeV}$), rendendo possibile la reazione



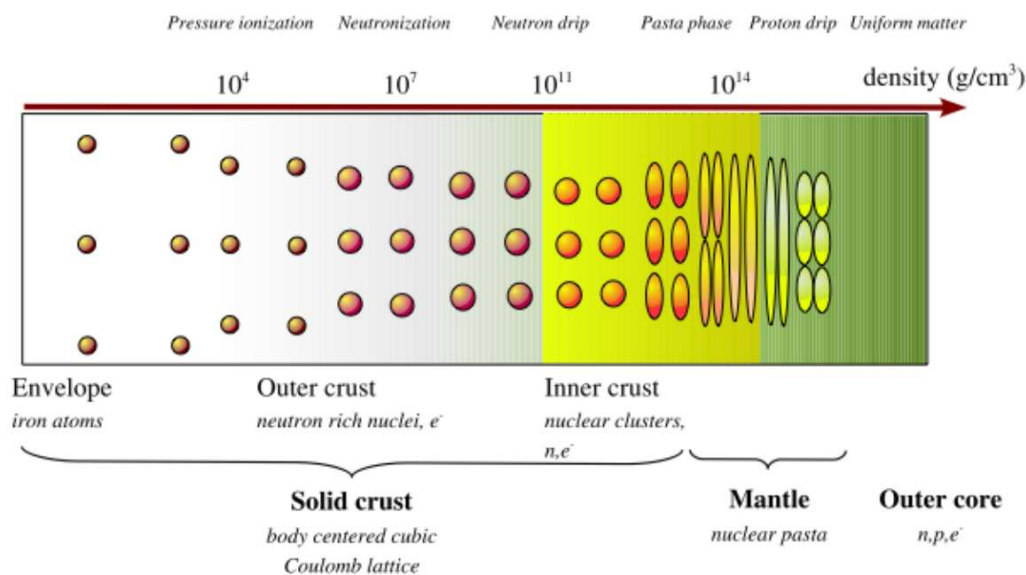
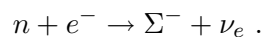


Figura 1.2. Rappresentazione schematica dei diversi stati della materia all'interno di una stella di neutroni.

con la conseguente comparsa di muoni nella materia npe . Naturalmente il numero totale di leptoni deve essere uguale a quello dei protoni per garantire la neutralità elettrica. È importante sottolineare che la pressione dei neutroni, che bilancia l'attrazione gravitazionale, non è dovuta solamente al principio di esclusione di Pauli (come avviene per la pressione degli elettroni nelle nane bianche), ma all'interazione forte, e in particolare alla sua componente fortemente repulsiva a corto raggio.

1.2.5 Core interno

Nella regione più interna della stella è possibile la comparsa di altre forme di materia, caratterizzata dalla presenza di adroni diversi dai neutroni e protoni. Se la somma dei potenziali chimici del neutrone e dell'elettrone diventa maggiore della massa della Σ^- pari a 1197 MeV , diviene energeticamente favorita la reazione



Alcuni autori ritengono che ciò possa già verificarsi a densità $\sim 2\rho_0$ [9]. Processi analoghi possono portare alla comparsa di altre particelle pesanti con stranezza non nulla (iperoni). Inoltre, i nucleoni possono compiere transizioni a stati eccitati, come per esempio la Δ .

Se la densità diviene sufficientemente elevata, i neutroni possono anche decadere attraverso i processi



con la conseguente comparsa nella materia di mesoni π e κ , i quali, essendo bosoni, possono dar luogo alla formazione di un condensato di Bose-Einstein [10, 11]. Si ritiene che tali processi possano iniziare a verificarsi a densità $\rho \sim 3 - 4 \rho_0$.

Gli esperimenti di diffusione elastica ed inelastica di leptoni hanno dimostrato che i nucleoni sono particelle composte e dimensione finita. Quando la distanza di separazione tra due nucleoni scende al di sotto di $\sim 1 \text{ fm}$, è naturale prevedere che essi non si comportino più come particelle individuali, dato che i profili delle loro densità iniziano a sovrapporsi. In queste condizioni devono essere presi in considerazione i gradi di libertà fondamentali della teoria delle interazioni forti, cioè i quark. Si può supporre che a densità sufficientemente elevate abbia luogo la transizione verso una nuova fase della materia, costituita da quarks e gluoni non più confinati all'interno degli adroni [12].

Capitolo 2

Equazioni di raffreddamento per una stella di neutroni

I meccanismi che consentono ad una stella di neutroni di dissipare energia e di raffreddarsi sono essenzialmente due: l'emissione di neutrini e l'emissione di fotoni. Subito dopo la sua formazione, il processo dominante è rappresentato dall'emissione di neutrini, che consente alla protostella di abbassare la sua temperatura dagli iniziali $10^{10} - 10^{11} K$ a $\sim 10^9 K$ nel volgere di alcuni minuti. Questo tipo di emissione domina finché la temperatura non è scesa a $\sim 10^8 K$, oltre il quale l'emissività fotonica prende il sopravvento: ciò può avvenire in un lasso di tempo che varia da alcune settimane fino a migliaia di anni, a seconda che i processi Urca diretti siano attivi o meno, e quindi del modello di equazione di stato adottato.

2.1 Nozioni preliminari di termodinamica e gravitazione

L'assunzione fondamentale che sta alla base della teoria della struttura stellare, è costituita dal disaccoppiamento delle forze nucleari ed elettromagnetiche, a corto raggio d'azione, e le forze gravitazionali a lungo raggio. Gli effetti microscopici delle prime sulla materia e sulla radiazione contribuiscono a determinarne le proprietà termodinamiche e, dunque, macroscopiche; gli effetti gravitazionali, invece, si fanno sentire *soltanto* su scale macroscopiche ed, insieme alle proprietà termodinamiche della materia, ne determinano lo stato, caratterizzato da pressione, densità e temperatura.

2.1.1 Grandezze termodinamiche fondamentali

Nel seguito, si suppone che la materia abbia le proprietà di un fluido perfetto, ovvero che sia non viscosa e non abbia al suo interno alcuna tensione se non una pressione isotropica. Le grandezze di interesse che servono a descriverne le proprietà sono:

a) *La pressione, P* , assunta isotropica.

- b) La densità del numero dei barioni, ρ .
- c) La massa media a riposo dei barioni, \bar{m}_B , che dipende dalla composizione della materia.
- d) La densità di energia interna, ϵ^{int} , che comprende tutte le forme di energia meno la massa a riposo dei barioni.
- e) La densità di massa-energia, ϵ , data dalla somma della massa a riposo e dell'energia interna:

$$\epsilon = \bar{m}_B \rho + \epsilon^{int} . \quad (2.1)$$

- f) La temperatura, T .
- g) L'entropia per barione, s ; legata alla densità di entropia dalla ρs .
- h) Le frazioni delle specie barioniche presenti, Y_k , ovvero le frazioni dei barioni di una data specie k presenti in un campione di materia. Ovviamente le Y_k devono soddisfare le condizioni:

$$\sum_k Y_k = 1 \quad , \quad \sum_k m_k Y_k = \bar{m}_B .$$

dove m_k è la massa a riposo del barione appartenente alla specie k .

- i) I potenziali chimici nucleari, μ_k , che rappresentano la variazione della massa-energia di un campione di materia quando ad esso viene aggiunto un barione della specie k tenendo costante il volume.

È importante specificare che le grandezze introdotte ai punti a, b, d, e, f, g sono misurate in un sistema di riferimento solidale con la materia.

2.1.2 Leggi della termodinamica in forma relativistica

Grazie alla separazione tra forze a corto e a lungo raggio, si può prescindere dalla teoria della relatività generale nella trattazione delle proprietà termodinamiche della materia. Questa approssimazione è giustificata quando, come nel caso delle stelle di neutroni, la curvatura dello spazio tempo su distanze dell'ordine del raggio d'azione delle forze a corto raggio è trascurabile [13]. Per quanto riguarda la relatività speciale, invece, occorre prendere in considerazione l'equivalenza tra massa ed energia (cosa già fatta nella definizione della 2.1) ed integrarla con le leggi della termodinamica.

La definizione di entropia non subisce variazioni rispetto al corrispettivo classico. Se una quantità infinitesima di calore dQ è aggiunta ad un campione di materia contenente δA barioni, l'entropia dell'insieme aumenta di

$$d(\delta A s) = (\delta A) ds = dQ/dT . \quad (2.2)$$

Inoltre, per ogni mutamento nello stato del sistema che avviene in isolamento, l'entropia aumenta o non cambia se il processo è reversibile:

$$dS = (\delta A) ds \geq 0 \quad (2.3)$$

Da quanto detto finora, si può intuire che ad essere modificata è solamente la prima legge della termodinamica. Se si esegue una trasformazione quasi statica sul campione, tenendo fisso il numero di barioni δA , può cambiare il volume, possono variare la quantità di calore in esso contenuta e, se sono possibili reazioni nucleari, anche le frazioni di particelle; la variazione di massa-energia totale è dunque data da:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\epsilon \delta A}{\rho}\right) &= -P d\left(\frac{\delta A}{\rho}\right) + T d(\delta A s) + \sum_k \mu_k d(\delta A Y_k) \\ \frac{\delta A}{\rho} d\epsilon - \frac{\delta A \epsilon}{\rho^2} d\rho &= \frac{P}{\rho^2} \delta A d\rho + T \delta A ds + \sum_k \mu_k \delta A dY_k \\ d\epsilon &= \frac{\epsilon + P}{\rho} d\rho + T \rho ds + \sum_k \mu_k \rho dY_k . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si è così trovata una relazione tra la densità di massa-energia e la densità di barioni per trasformazioni isoentropiche (cioè ad entropia costante):

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n}\right)_s = \frac{\epsilon + P}{\rho}, \quad (2.5)$$

che nel limite non relativistico assume la forma più familiare

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n}\right)_s = \bar{m}_B .$$

Si noti che questo risultato implica che la massa a riposo dei barioni può cambiare.

2.1.3 Massa inerziale per unità di volume

Vogliamo ora discutere l'interpretazione da dare al secondo membro della (2.5). Si consideri, nel quadro della relatività speciale, un fluido perfetto che si muove lungo la direzione x con velocità $v_0 \ll c$ rispetto ad un osservatore inerziale ed, in particolar modo, un elemento di tale fluido di area A e spessore Δx . La quantità di moto associata è data dal prodotto tra la massa-energia totale, m , che esso trasporta una volta superato l'osservatore e la velocità v_0 .

La massa-energia m risulta dalla somma di due contributi: la densità di massa-energia del fluido, ϵ , e il lavoro eseguito dalla forza che spinge l'elemento di fluido sul lato sinistro affinché superi l'osservatore (si veda la Fig.2.1):

$$m = \epsilon A \Delta x + (PA)\Delta x = (\epsilon + P)A \Delta x .$$

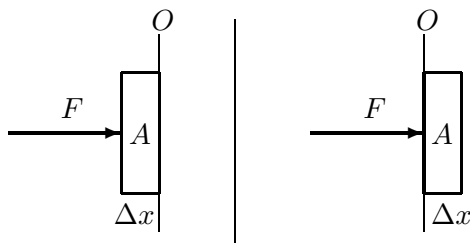


Figura 2.1. Affinché l'elemento di fluido sorpassi l'osservatore O , la forza F deve essere applicata per un tratto di lunghezza Δx .

La quantità di moto è

$$p = (\epsilon + P)(A \Delta x)v_0.$$

Infine, se si suppone che il fluido, inizialmente fermo, venga accelerato dall'osservatore esterno mediante una forza F alla velocità v_0 , senza modificare densità e pressione, si ottiene:

$$F = \frac{dp}{dt} = (\epsilon + P)(A \Delta x) \frac{dv}{dt}$$

Dunque, $(\epsilon + P)(A \Delta x)$ rappresenta la massa inerziale a riposo dell'elemento di fluido e $\epsilon + P$ la massa inerziale per unità di volume a riposo.

2.1.4 Campo gravitazionale a simmetria sferica

Le configurazioni di equilibrio per stelle non rotanti sono necessariamente a simmetria sferica. Per la loro descrizione, è dunque utile introdurre come coordinate dello spazio le tre coordinate sferiche (r, θ, ϕ) . La coordinata temporale t deve essere scelta in modo che la geometria dello spazio-tempo sia indipendente dal tempo, poiché si suppone che la metrica sia statica e, nel limite $r \rightarrow \infty$, si riduca a quella di uno spazio-tempo piatto. Il tempo t , in questo limite, sarà uguale al tempo proprio misurato dall'osservatore a riposo rispetto alla stella, in accordo con il principio di equivalenza. La metrica del corrispondente campo gravitazionale può scriversi nella seguente forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{2\Phi(r)} dt^2 - e^{-2\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.6)$$

dove

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Le equazioni che descrivono il campo saranno ricavate più avanti; tuttavia, può essere anticipato che esse sono integrabili nel caso del vuoto, ovvero al di fuori della regione

occupata dalla massa che genera il campo, ottenendo:

$$e^{2\Phi(r)} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad e^{-2\lambda(r)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (2.8)$$

La metrica così definita è detta di Schwarzschild: M è da interpretarsi come la massa totale della stella, mentre il potenziale $\Phi(r)$ soddisfa la condizione $\Phi(\infty) = 0$ e nel limite non relativistico si riduce al potenziale gravitazionale di Newton.

2.1.5 Redshift gravitazionale

Si consideri una sorgente di fotoni localizzata nel punto r di uno spazio-tempo con metrica di Schwarzschild; la frequenza di emissione in tale punto nel sistema di riferimento proprio è data da:

$$\nu_{em} = \frac{1}{d\tau_{em}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} dt} = \frac{1}{e^{\Phi(r)} dt}$$

Un osservatore sito nel punto r' che riceve i fotoni ne misura la frequenza con il proprio orologio (nel suo sistema di riferimento proprio):

$$\nu_{ric} = \frac{1}{d\tau_{ric}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r'}} dt} = \frac{1}{e^{\Phi(r')} dt}.$$

Facendo il rapporto, si ottiene quindi il risultato

$$\frac{\nu_{ric}}{\nu_{em}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r'}}},$$

che, se il ricevente si trova molto lontano dalla sorgente, cioè quando $r' \rightarrow \infty$, si riduce a

$$\nu_{ric} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \nu_{em} = e^{\Phi} \nu_{em} \quad (2.9)$$

Il ricevente misura quindi una frequenza minore rispetto a quella misurata dall'emettitore, ovvero i fotoni che provengono da un campo gravitazionale appaiono spostati verso il rosso (“redshifted”).

Inoltre, poiché l'energia di ogni fotone è data da $E = h\nu$, in base a quanto detto per la frequenza, si può comprendere come, anche per l'energia, le misure dei due osservatori risultino differenti:

$$E_{ric} = e^{\Phi} E_{em}. \quad (2.10)$$

Le relazioni trovate sono valide per particelle o fotoni in caduta libera in qualsiasi campo gravitazionale statico della forma

$$ds^2 = e^{2\Phi} dt^2 + \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j.$$

2.2 Equazioni di struttura

Le equazioni che occorre risolvere per descrivere l'evoluzione termica di una stella possono essere divise in due categorie. La prima categoria di equazioni serve a caratterizzare la struttura *globale* della stella ed è ricavabile dalle equazioni di campo di Einstein.

Innanzitutto, possiamo ottenere un'equazione per il numero dei barioni. Definendo

$$\frac{dA}{d(\text{distanza propria radiale})} = 4\pi r^2 \rho \quad (2.11)$$

ovvero

$$\frac{dr}{dA} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \left(\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \right)^{-1}, \quad r(0) = 0, \quad (2.12)$$

troviamo subito che il numero di barioni all'interno di una sfera di raggio r è dato da:

$$A(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} dr.$$

Se assumiamo che la materia all'interno della stella si comporti come un fluido perfetto, possiamo scrivere il tensore energia-impulso nella forma

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

dove la quadrivelocità definita come $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (e^{-\Phi(r)}, 0, 0, 0)$ e $u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu = (e^{\Phi(r)}, 0, 0, 0)$. Essendo il fluido a riposo, l'unica componente non nulla della quadrivelocità è quella temporale. Di conseguenza, il tensore energia-impulso ha componenti non nulle:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \epsilon e^{2\Phi(r)} & T^{00} &= \epsilon e^{-2\Phi(r)} \\ T_{rr} &= P e^{2\lambda(r)} & T^{rr} &= P e^{-2\lambda(r)} \\ T_{\theta\theta} &= P r^2 & T^{\theta\theta} &= P/r^2 \\ T_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta T_{\theta\theta} & T^{\phi\phi} &= T^{\theta\theta} / \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Le equazioni da risolvere per ricavare le grandezze che descrivono la struttura della stella sono [14]:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.14a)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu T^{\nu\lambda} = 0 \quad (2.14b)$$

Consideriamo per prima l'equazione di conservazione del tensore energia-impulso. I simboli di Christoffel sono definiti come

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}),$$

ed una volta ricavati quelli non nulli,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{0r}^0 &= \Phi(r)_{,r} & \Gamma_{\theta r}^\theta &= 1/r \\
 \Gamma_{rr}^r &= \lambda(r)_{,r} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -1/2 \sin 2\theta \\
 \Gamma_{00}^r &= e^{2[\Phi(r)-\lambda(r)]} \Phi(r)_{,r} & \Gamma_{\phi r}^\phi &= 1/r \\
 \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\lambda(r)} & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \cos \theta / \sin \theta \\
 \Gamma_{\phi\phi}^r &= \sin^2 \theta \Gamma_{\theta\theta}^r & \sqrt{-g} &= \sqrt{-\det g} = r^2 e^{\Phi(r)+\lambda(r)} \sin \theta
 \end{aligned}$$

si può notare come le uniche componenti non banali di $T^{\mu\nu}$, _{ν} si hanno per $\mu = r$. Dalla (2.14b), infine, si ricava:

$$\Phi_{,r} = -\frac{P_{,r}}{\epsilon + P} . \quad (2.15)$$

Le equazioni di Einstein stabiliscono che

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R ,$$

dove

$$R_{\mu\nu} = - \left(\Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \right)$$

e

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} .$$

Nel caso in considerazione troviamo le

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \left[\Phi_{,rr} - \lambda_{,r} \Phi_{,r} + (\Phi_{,r})^2 + 2 \frac{\Phi_{,r}}{r} \right] e^{2(\Phi-\lambda)} \\
 R_{rr} &= -\Phi_{,rr} + \lambda_{,r} \Phi_{,r} - (\Phi_{,r})^2 + 2 \frac{\lambda_{,r}}{r} \\
 R_{\theta\theta} &= -(1 + r \Phi_{,r} - r \lambda_{,r}) e^{-2\lambda} + 1 \\
 R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \\
 R &= \left[2\Phi_{,rr} - 2\lambda_{,r} \Phi_{,r} + 2(\Phi_{,r})^2 + \frac{2}{r^2} - 4 \frac{\lambda_{,r}}{r} + 4 \frac{\Phi_{,r}}{r} \right] e^{-2\lambda} - \frac{2}{r^2}
 \end{aligned}$$

che, sostituite nella (2.14a), ci permettono di scrivere le equazioni per $G_{\theta\theta}$ e G_{rr} :

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \quad (2.16)$$

$$\frac{dP}{dr} = -(\epsilon + P) \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r^2 \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]} , \quad (2.17)$$

dove abbiamo usato la definizione

$$m(r) = \frac{1}{2} r \left(1 - e^{-2\lambda} \right) .$$

Si noti che le medesime relazioni possono essere ottenute senza sfruttare il principio di conservazione del tensore energia-impulso, utilizzando tre equazioni di Einstein; ad esempio quelle corrispondenti a G_{00} , G_{rr} , $G_{\theta\theta}$.

Le relazioni che abbiamo ottenuto sono equazioni per il gradiente delle grandezze $m(r)$, $\Phi(r)$ e $P(r)$. La prima,

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon, \quad m(0) = 0, \quad (2.18)$$

è detta *equazione di massa*. La sua forma suggerisce di interpretare $m(r)$ come la massa-energia totale contenuta entro una sfera di raggio r , che è data dalla somma di tre termini: massa-energia a riposo, energia interna ed energia potenziale gravitazionale (negativa). L'equazione può anche essere espressa in funzione del numero di barioni. Si giunge a questa forma tramite la trasformazione di variabili $m(A) \rightarrow m(A(r))$, che implica:

$$\frac{dm}{dA} = \frac{dr}{dA} \frac{dm}{dr} = \frac{\epsilon}{\rho} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}.$$

L'altra equazione,

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r^2 \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]}, \quad \Phi(R) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{R}\right), \quad (2.19)$$

rappresenta l'*equazione sorgente* per il potenziale gravitazionale Φ all'interno della stella, avente raggio R e massa totale $M = m(R)$. La condizione al contorno è scelta in modo che sia possibile raccordare il potenziale dentro la stella ed il potenziale all'esterno di essa, definito dalla metrica di Schwarzschild,

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad r > R, \quad (2.20)$$

imponendo semplicemente che i due potenziali abbiano lo stesso valore sulla superficie della stella.

Infine, l'ultima equazione trovata,

$$\frac{dP}{dr} = -(\epsilon + P) \frac{d\Phi}{dr}, \quad P(\epsilon_c) = P(\epsilon(0)). \quad (2.21)$$

è l'equazione dell'equilibrio idrostatico di Tolman, Oppenheimer e Volkoff [15, 16], chiamata anche brevemente *equazione TOV*. Essa esprime l'equilibrio tra la forza gravitazionale per unità di volume

$$F_{grav} = -(\epsilon + P) \frac{d\Phi}{dr} \mathbf{e}_r \quad (2.22)$$

e la spinta idrostatica per unità di volume

$$F_{idr} = -\frac{dP}{d(\text{distanza radiale propria})} \mathbf{e}_r = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dP}{dr}\right) \mathbf{e}_r, \quad (2.23)$$

dove \mathbf{e}_r è il versore diretto lungo la direzione radiale.

È da notare come la (2.22) ha una forma del tutto simile a quella della equazione analoga della teoria newtoniana:

$$F_{grav} = -(\text{massa inerziale per unità di volume}) \frac{d\Phi}{dr} \mathbf{e}_r.$$

Confrontando l'equazione TOV con la sua controparte newtoniana,

$$(\text{TOV}) \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{(\epsilon + P)(m + 4\pi r^3 \rho)}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}, \quad (\text{NEWTON}) \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{\epsilon m}{r^2}$$

se ne possono mettere in luce le differenze:

1. La sostituzione della densità di massa-energia con $\epsilon + P$, che, come si è già visto, assume il significato di massa inerziale per unità di volume.
2. Al posto della semplice massa m , appare $m + 4\pi r^3 \rho$. L'aggiunta di un nuovo termine proporzionale a P è collegato all'effetto gravitazionale non lineare della *rigenerazione moltiplicativa della pressione*. In seguito alla presenza di questo termine il gradiente di pressione è più ripido di quanto ci si aspetterebbe nella teoria newtoniana, per compensare l'accresciuta accelerazione di gravità.
3. A denominatore è presente il fattore $1 - \frac{2m}{r}$, che impedisce ad m di assumere il valore $r/2$ in cui si ha una singolarità di coordinate.

Queste relazioni costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali accoppiate, che può essere risolto numericamente, ad esempio tramite un algoritmo di Runge-Kutta [17]. Le quantità ϵ e P sono legate dall'equazione di stato, $P(\epsilon)$, la quale fornisce, data la densità centrale, anche il valore della pressione centrale $P_c = P(\epsilon_c)$ da utilizzare come condizione iniziale per l'integrazione, che prosegue passo dopo passo per r crescente finché la pressione non raggiunge il valore $P = 0$. Il valore di r al quale tale condizione si verifica fissa il raggio della stella, e dunque la massa.

La Figura 2.2 mostra l'andamento della massa stellare in funzione della densità centrale di massa-energia ϵ_c , ottenuta utilizzando l'equazione di stato APR [3]. Si può notare come il valore raggiunga un massimo, all'aumentare della densità, intorno al valore di circa $2.2 M_\odot$, ponendo dunque un limite superiore alla massa che una stella di neutroni descritta da questa equazione di stato può avere.

Nella Figura 2.3 è graficata la relazione massa-raggio delle stelle corrispondenti al medesimo modello APR.

I dati sperimentali indicano come valore più probabile per la massa di una stella di neutroni quello di $\sim 1.4 M_\odot$, che secondo la Figura 2.3 corrisponderebbe a un raggio di $\sim 11.5 \text{ km}$. Infine, nella Fig. 2.4 si può vedere l'andamento del potenziale gravitazionale Φ all'interno e all'esterno della stella.

Dato che la temperatura all'interno della stella scende a 10^9 K entro pochi minuti dalla nascita, si può assumere che l'equazione di stato sia largamente indipendente dalla

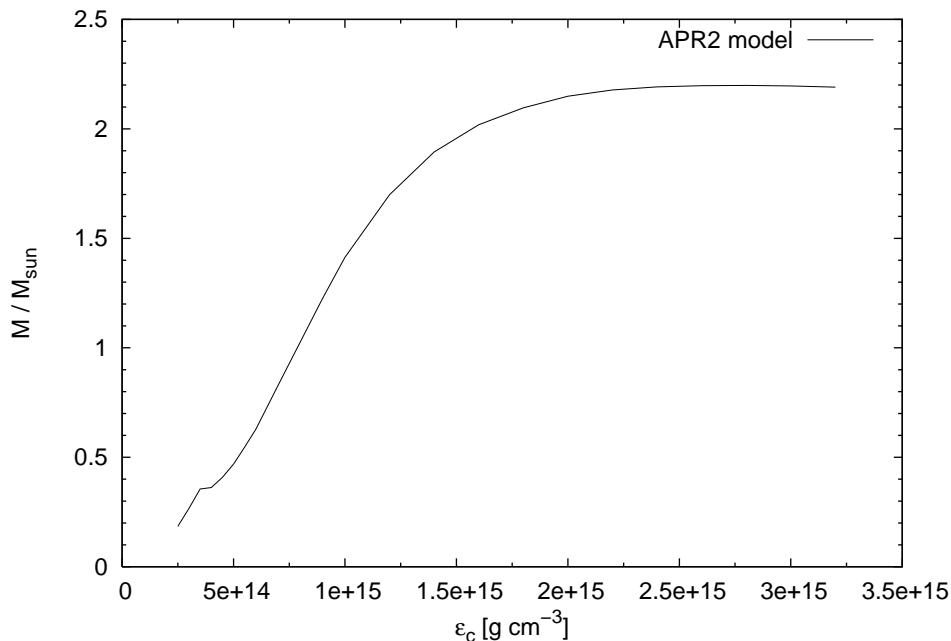


Figura 2.2. Andamento della massa di una stella di neutroni in funzione della densità centrale di massa-energia. Il calcolo è stato effettuato usando l'equazione di stato di APR [3].

temperatura e possa essere calcolata a $T = 0$. Di conseguenza, le equazioni che determinano la struttura della stella non dipendono dal tempo e sono da risolversi una sola volta. La dipendenza dal tempo entra nel modello stellare attraverso la seconda categoria di equazioni, che descrivono l'equilibrio termico ed il trasporto di energia.

2.3 Equazione dell'equilibrio termico

L'energia che una stella irradia proviene in parte dalla sua massa, grazie alle reazioni nucleari, ed in parte dall'energia gravitazionale ed interna per mezzo della conseguente contrazione quasi-statica. L'equazione dell'equilibrio termico esprime il bilancio tra tutti questi processi di conversione dell'energia.

Consideriamo un guscio sferico all'interno della stella e indichiamo con δA il numero di barioni in esso contenuto, essendo A il numero totale dei barioni costituenti la stella. La

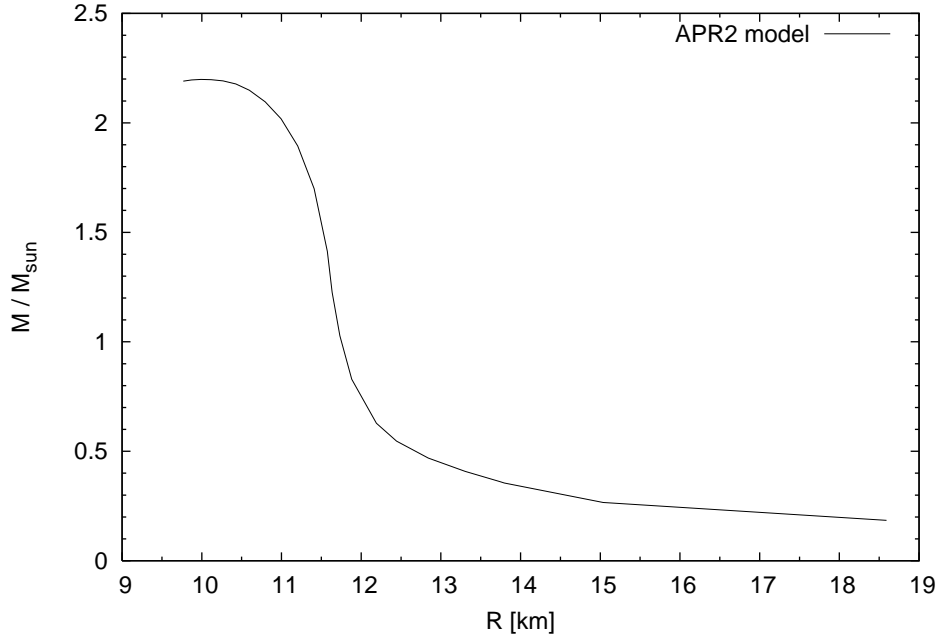


Figura 2.3. Relazione massa-raggio di una stella di neutroni corrispondente all'equazione di stato APR [3].

variazione di energia del guscio nell'intervallo di tempo coordinato dt è data dalla

$$\begin{aligned}
 d(\text{energia interna}) = & (\text{massa-energia a riposo convertita} \\
 & \text{in energia interna dalle reazioni nucleari}) \textcircled{1} \\
 & + (\text{lavoro compiuto sul guscio dalle forze} \\
 & \text{gravitazionali per cambiarne il volume durante} \\
 & \text{la contrazione quasi-statica}) \textcircled{2} \\
 & - (\text{energia dissipata tramite irradiazione,} \\
 & \text{conduzione e convezione}) \textcircled{3}.
 \end{aligned}$$

Analizziamo i diversi contributi.

① Il tasso per barione al quale la massa-energia è convertita in energia interna dalle reazioni termonucleari, q , è definito da:

$$q = -\frac{d\bar{m}_B}{d\tau} = -\frac{d\bar{m}_B}{e^\Phi dt}. \quad (2.24)$$

Di conseguenza, la massa a riposo convertita in energia interna è $q \delta A e^\Phi dt$.

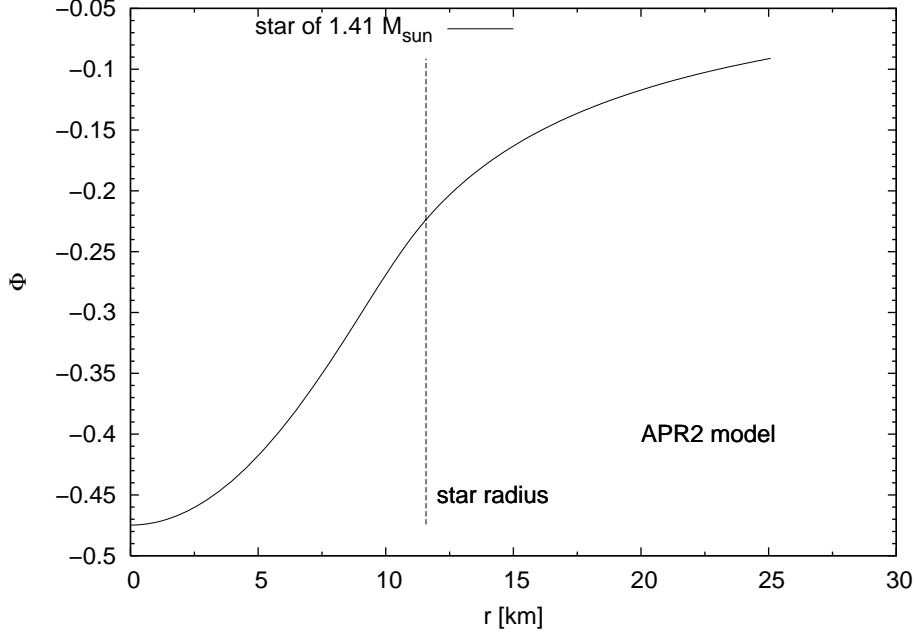


Figura 2.4. Potenziale gravitazionale in funzione della distanza dal centro della stella ottenuto usando l'equazione di stato APR [3].

② Durante la contrazione quasi-statica, la variazione di volume risulta essere pari a

$$dV = d\left(\frac{V}{\delta A} \delta A\right) \quad (2.25)$$

ed il lavoro compiuto sul guscio è

$$-PdV = -Pd\left(\frac{1}{\rho} \delta A\right). \quad (2.26)$$

③ La grandezza sensibile al tasso al quale l'energia è dissipata è la luminosità radiale, L_r , definita come la massa-energia trasportata verso l'esterno nell'unità di tempo attraverso una sfera di raggio r , misurata da un osservatore situato in r e solidale con la stella. Tale trasporto di energia è dovuto ai fotoni, ai neutrini e ai processi di conduzione e convezione. La luminosità associata al guscio che stiamo considerando si può porre nella forma

$$L_r(r + \delta r) e^{2\Phi(r+\delta r)-2\Phi(r)} - L_r(r) = \left(\frac{dL_r}{dr} + 2L_r \frac{d\Phi}{dr}\right) \delta r, \quad (2.27)$$

che si ottiene dagli sviluppi

$$e^{2\Phi(r+\delta r)-2\Phi(r)} \approx 1 + 2[\Phi(r + \delta r) - \Phi(r)] = 1 + 2\frac{d\Phi}{dr}\delta r$$

e

$$L_r(r + \delta r) \approx L_r(r) + \frac{dL_r}{dr} \delta r .$$

Il redshift gravitazionale presenta un fattore due poiché occorre tenere conto dello spostamento verso il rosso associato sia all'energia quando attraversa il guscio che alla frequenza di emissione per la superficie interna ed esterna. L'energia totale dissipata dal guscio nel tempo coordinato dt risulta:

$$\left[L_r(r + \delta r) e^{2\Phi(r+\delta r)-2\Phi(r)} - L_r(r) \right] e^\Phi dt = \left(\frac{dL_r}{dr} + 2L_r \frac{d\Phi}{dr} \right) \delta r e^\Phi dt . \quad (2.28)$$

Sommando i tre termini che contribuiscono alla variazione di energia interna otteniamo così

$$d \left(\frac{\epsilon^{int}}{\rho} \delta A \right) = q \delta A e^\Phi dt - P d \left(\frac{1}{\rho} \delta A \right) - \left(\frac{dL_r}{dr} + 2L_r \frac{d\Phi}{dr} \right) \delta r e^\Phi dt . \quad (2.29)$$

Sfruttando la relazione

$$\left(\frac{dL_r}{dr} + 2L_r \frac{d\Phi}{dr} \right) e^{2\Phi} = \frac{d}{dr} (L_r e^{2\Phi}) ,$$

possiamo ora riscrivere la (2.29) come

$$e^\Phi d \left(\frac{\epsilon^{int}}{\rho} \delta A \right) = q \delta A e^{2\Phi} dt - P e^\Phi d \left(\frac{1}{\rho} \delta A \right) - \left[\frac{d}{dr} (L_r e^{2\Phi}) \right] \delta r dt .$$

Da quest'ultima espressione si può ricavare il gradiente di L_r :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (L_r e^{2\Phi}) &= \frac{1}{\delta r dt} \left\{ q \delta A e^{2\Phi} dt - P e^\Phi d \left(\frac{1}{\rho} \delta A \right) - e^\Phi d \left(\frac{\epsilon^{int}}{\rho} \delta A \right) \right\} \\ &= \frac{\delta A e^{2\Phi}}{\delta r} \left\{ q + \frac{P e^{-\Phi}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - e^{-\Phi} \frac{d}{dt} \frac{\epsilon^{int}}{\rho} \right\} , \end{aligned}$$

dove si è assunto costante il numero di barioni δA nel guscio.

Utilizzando la (2.12), si ottiene:

$$\frac{d}{dr} (L_r e^{2\Phi}) = 4\pi \frac{\rho r^2 e^{2\Phi}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \left\{ q - \left[e^{-\Phi} \frac{d}{dt} \frac{\epsilon^{int}}{\rho} - \frac{P}{\rho^2} e^{-\Phi} \frac{d\rho}{dt} \right]_{\alpha=const} \right\} , \quad (2.30)$$

dove α_k è il tasso di variazione della frazione della specie barionica k :

$$\alpha_k = \frac{dY_k}{d\tau} = \frac{dY_k}{e^\Phi dt} .$$

Una forma alternativa della (2.30) si può ricavare prendendo il termine tra parentesi graffe e sostituendo

$$\frac{\epsilon^{int}}{\rho} = \frac{\epsilon}{\rho} - \bar{m}_B .$$

si arriva così alla

$$q + e^{-\Phi} \frac{d\bar{m}_B}{dt} - e^{-\Phi} \frac{d}{dt} \frac{\epsilon}{\rho} - P e^{-\Phi} \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho}.$$

Il secondo termine di questa espressione è nient'altro che $-q$ e si cancella con il primo. Quello che rimane è

$$\begin{aligned} -e^{-\Phi} \left[\frac{d}{dt} \frac{\epsilon}{\rho} + P \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} \right] &= -\frac{1}{\rho} e^{-\Phi} \left[\frac{d\epsilon}{dt} - \left(\frac{\epsilon + P}{\rho} \right) \frac{d\rho}{dt} \right] \\ &= -e^{-\Phi} \left[T \frac{ds}{dt} + \sum_k \mu_k \frac{dY_k}{dt} \right], \end{aligned}$$

dove si è applicata la prima legge della termodinamica (2.1.2).

Infine, sostituendo nella (2.30), si ottiene per il bilancio energetico l'equazione:

$$\frac{d}{dr} (L_r e^{2\Phi}) = -\frac{4\pi \rho r^2 e^{\Phi}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \left\{ T \left(\frac{ds}{dt} \right)_{A=cost} + \sum_k \mu_k \left(\frac{dY_k}{dt} \right)_{A=cost} \right\}. \quad (2.31)$$

Se si vuole usare A come coordinata indipendente anziché r , si ottiene

$$\frac{d}{dA} (L_r e^{2\Phi}) = -e^{\Phi} \left\{ T \frac{ds}{dt} + \sum_k \mu_k \frac{dY_k}{dt} \right\}. \quad (2.32)$$

La quantità L_r è la luminosità totale, che comprende tutti i contributi provenienti dai fotoni e dai neutrini, ovvero

$$L_r = L_r^{(\gamma)} + L_r^{(\nu)}.$$

Per quanto riguarda i neutrini, si può definire il tasso di energia rilasciata sotto forma di neutrini per barione, $q^{(\nu)}$, al quale l'emissività neutrinica è legata dalla relazione $q^{(\nu)} = Q_\nu/\rho$. L'equazione dell'equilibrio termico (2.30) per la componente neutrinica della luminosità ha la forma

$$\frac{d}{dr} (L_r^{(\nu)} e^{2\Phi}) = 4\pi \frac{r^2 e^{2\Phi}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} Q_\nu, \quad (2.33)$$

oppure

$$\frac{d}{dA} (L_r^{(\nu)} e^{2\Phi}) = \frac{Q_\nu}{\rho e^{2\Phi}}. \quad (2.34)$$

Essendo interessati alla componente fotonica della luminosità, possiamo sottrarre la (2.34) dalla (2.32) nel caso in cui le frazioni di specie nucleari siano costanti, cioè $dY_k/dt = 0$. Si ottiene così

$$\frac{d}{dA} \left[(L_r - L_r^{(\nu)}) e^{2\Phi} \right] = -e^{2\Phi} \frac{Q_\nu}{\rho} - e^{\Phi} T \frac{ds}{dt}.$$

La capacità termica per particella, \tilde{c}_V , per un sistema a volume costante vale

$$\tilde{c}_V = \left. \frac{dq}{dT} \right|_{V,A} = \left. \frac{\partial}{\partial T} \frac{\epsilon^{int}}{\rho} \right|_{V,A} = T \left. \frac{ds}{dT} \right|_{V,A},$$

essendo, in questo caso, q il calore per particella. L'ultimo termine può riscriversi come:

$$T \frac{ds}{dt} = T \frac{ds}{dT} \frac{dT}{dt} = \tilde{c}_V \frac{dT}{dt} = \frac{c_V}{\rho} \frac{dT}{dt},$$

dove c_V è la capacità termica per unità di volume. Si perviene in tal modo alla seguente equazione finale:

$$\frac{d}{dA} \left(L_r^{(\gamma)} e^{2\Phi} \right) = - \frac{e^{2\Phi}}{\rho} \left(Q_\nu + e^{-\Phi} c_V \frac{dT}{dt} \right), \quad (2.35)$$

dove $L_r^{(\gamma)}$ è la luminosità associata ai fotoni.

L'equazione (2.35) fornisce una relazione per il gradiente del flusso di energia.

2.4 Equazione del trasporto di energia

L'energia viene trasportata dall'interno della stella verso la sua superficie da una combinazione di vari processi: diffusione di fotoni, rilascio di neutrini, conduzione termica nella materia stellare e moti convettivi della materia stellare. Per le stelle di neutroni, la convezione è trascurabile rispetto agli altri processi, una caratteristica che semplifica di molto la trattazione; infatti, l'elevata conduttività termica del gas degenere di elettroni e barioni mantiene il gradiente di temperatura ben al di sotto del limite adiabatico in corrispondenza del quale si innescano i fenomeni convettivi, eccetto, forse, nel sottile strato esterno e nell'atmosfera dove la materia non è degenere.

2.4.1 Trasporto radiativo di energia

In ogni punto all'interno della stella la radiazione elettromagnetica può essere scomposta in due parti, una grande componente isotropica ed una piccola componente radiale che alimenta la luminosità fotonica $L_r^{(\gamma)}$. A ciascuna di queste due parti corrisponde una pressione di radiazione. Consideriamo il gradiente di pressione della parte radiale, che ha origine da due processi: ① l'attrazione gravitazionale del gas di fotoni verso il centro della stella e ② l'interazione della radiazione con la materia.

① L'attrazione gravitazionale deve essere bilanciata dal gradiente di pressione. In base alla (2.21) si può scrivere:

$$\left(\frac{dP_R}{dr} \right)_{grav} = - (\epsilon_R + P_R) \frac{d\Phi}{dr}.$$

② Dei processi di interazione radiazione-materia, si deve considerare solo l'assorbimento della luminosità radiale $L_r^{(R)}$. La variazione di pressione su un intervallo dr è pari alla massa-energia che viene assorbita dal fascio radiale per unità di tempo proprio e per unità d'area dalla materia contenuta nel guscio di spessore dr :

$$(dP_R)_{ass} = -k_R \epsilon \frac{L_r^{(R)}}{4\pi r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} dr, \quad (2.36)$$

dove k_R è il coefficiente di assorbimento radiativo che, moltiplicato per la densità di massa-energia ϵ , dà l'attenuazione frazionaria per unità di distanza propria dell'intensità di un fascio di luce in assenza di gravità, ovvero

$$\frac{dI}{I} = -k_R \epsilon \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} dr .$$

Il gradiente totale è la somma dei due contributi:

$$\left(\frac{dP_R}{dr} \right) = -(\epsilon_R + P_R) \frac{d\Phi}{dr} - k_R \epsilon \frac{L_r^{(R)}}{4\pi r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} dr . \quad (2.37)$$

La legge di Stefan-Boltzmann permette di legare la densità di energia della radiazione e la sua pressione alla temperatura [18]:

$$\epsilon_R = 3P_R = 4\sigma T^4 .$$

Sostituendo nella (2.37), si ottiene

$$\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \left(\frac{4}{3} \sigma T^4 \right) = -\frac{16}{3} \sigma T^4 \frac{d\Phi}{dr} - k_R \epsilon \frac{L_r^{(R)}}{4\pi r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} ,$$

e riordinando i termini dell'equazione, si perviene a

$$\begin{aligned} \frac{16}{3} \sigma T^3 \left[\frac{dT}{dr} + T \frac{d\Phi}{dr} \right] &= -k_R \epsilon \frac{L_r^{(R)}}{4\pi r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \\ \frac{16}{3} \sigma T^3 \frac{d}{dr} (T e^\Phi) &= -k_R \epsilon \frac{L_r^{(R)}}{4\pi r^2} \frac{e^\Phi}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \\ \frac{d}{dr} (T e^\Phi) &= -\frac{3}{16} \frac{k_R \epsilon}{\sigma T^3} \frac{L_r^{(R)}}{4\pi r^2} \frac{e^\Phi}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} , \end{aligned} \quad (2.38)$$

o, equivalentemente

$$\frac{d}{dA} (T e^\Phi) = -\frac{3}{256} \frac{k_R \epsilon}{\sigma T^3} \frac{L_r^{(R)}}{\pi^2 r^4 \rho} e^\Phi . \quad (2.39)$$

2.4.2 Trasporto di energia per conduzione

La conduzione termica avviene tramite gli elettroni relativistici presenti all'interno delle stelle di neutroni ed i fotoni della fotosfera. Con $L_r^{(C)}$ si indica la porzione della luminosità totale dovuta alla conduzione, legata al gradiente di temperatura dall'equazione

del trasporto conduttivo di energia. Per effettuarne il calcolo partiamo dall'equazione newtoniana:

$$\frac{dT}{dr} = -k_T^{-1} \times (\text{flusso di energia}) = -\frac{1}{4\pi^2 r^2 k_T} L_r^{(C)},$$

dove k_T è la conduttività termica. Per rendere questa espressione relativistica, occorre inserire i fattori di correzione e^Φ e $\sqrt{1 - 2m/r}$, in posizioni da ancora determinare [14, 19].

Innanzitutto, appare ragionevole scrivere:

$$\frac{dT}{d(\text{distanza propria radiale})} = \frac{dT}{dr} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} = -\frac{1}{4\pi r^2 k_T} L_r^{(C)}.$$

Per quanto riguarda la seconda correzione, si può inserire un fattore e^Φ , elevato a una potenza indeterminata k , all'interno della derivata radiale ed un altro fattore $e^{k'\Phi}$ fuori di essa. Si arriva così all'espressione

$$\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} e^{k'\Phi} \frac{d}{dr}(T e^{k\Phi}) = -\frac{1}{4\pi r^2 k_T} L_r^{(C)}.$$

Affinché l'equazione sia invariante per trasformazioni $\Phi \rightarrow \Phi + \text{cost}$, occorre che $k' = -k$. Per determinarne il valore, immaginiamo di porre la stella in un contenitore isolante, in modo che non possa disperdersi all'esterno o fluire all'interno energia. L'evoluzione termica sarà tale che la diffusione dei fotoni tenderà a creare la distribuzione di temperatura $T e^\Phi = \text{cost}$, mentre la conduzione termica tenderà a creare la distribuzione $T e^{k\Phi} = \text{cost}$. Di conseguenza, supponendo $k > 1$, si avrà un doppio flusso di energia. Perché? Immaginando di avere inizialmente la sola diffusione, si avrà la distribuzione ad essa associata all'interno della stella; se adesso si accende il processo di conduzione, questo, per ogni r fissato, troverà una temperatura T maggiore rispetto a quella della distribuzione che ad esso compete, e vi sarà perciò un flusso di energia verso l'interno, allo scopo di diminuire la temperatura in r . Viceversa, se si suppone che inizialmente agisca solo la conduzione e si accende successivamente la diffusione, vi sarà un flusso di energia verso l'esterno (verso r) allo scopo di aumentarne la temperatura. La risultante è un flusso di energia dall'interno verso la superficie e ritorno verso l'interno senza che aumenti l'entropia del sistema, violando il secondo principio della termodinamica. Un'analogia violazione si avrebbe per $k < 1$. L'unica possibilità è quindi $k = -k' = 1$ in modo che i due processi realizzino la stessa distribuzione di temperatura. L'equazione diventa quindi

$$\frac{d}{dr}(T e^\Phi) = -\frac{1}{k_T} \frac{L_r^{(C)}}{4\pi r^2} \frac{e^\Phi}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}. \quad (2.40)$$

2.4.3 Trasporto combinato

Combinando la (2.38) e la (2.40) si ottiene un'unica equazione per il trasporto di energia. Tuttavia, risulta conveniente scrivere prima l'equazione per il trasporto conduttivo in una

forma analoga a quella dell'equazione per la diffusione:

$$\frac{d}{dr}(T e^\Phi) = -\frac{3}{16} \frac{k_C \epsilon}{\sigma T^3} \frac{L_r^{(C)}}{4\pi r^2} \frac{e^\Phi}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}, \quad (2.41)$$

dove si è posto:

$$\frac{1}{k_T} = \frac{3}{16} \frac{k_C \epsilon}{\sigma T^3}, \quad (2.42)$$

con k_C coefficiente conduttivo di assorbimento.

Ricavando $L_r^{(R)}$ dalla (2.38) e $L_r^{(C)}$ dalla (2.40) e sommando si ottiene:

$$\frac{L_r^{(R)} + L_r^{(C)}}{4\pi r^2} = -\frac{d}{dr}(T e^\Phi) \frac{1}{\frac{3}{16} \frac{\epsilon}{\sigma T^3} \frac{e^\Phi}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}} \left(\frac{1}{k_R} + \frac{1}{k_C} \right).$$

Se ora definiamo

$$\frac{1}{k^*} = \frac{1}{k_R} + \frac{1}{k_C}, \quad (2.43)$$

e tornamo all'espressione del gradiente, possiamo scrivere l'equazione per il trasporto totale nella forma

$$\frac{d}{dr}(T e^\Phi) = -\frac{3}{16} \frac{k^* \epsilon}{\sigma T^3} \frac{L_r - L_r^{(\nu)}}{4\pi r^2} \frac{e^\Phi}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}, \quad (2.44)$$

avendo utilizzato $L_r = L_r^{(R)} + L_r^{(C)} + L_r^{(\nu)}$, grazie alla convezione trascurabile. Equivalentemente, si può scrivere:

$$\frac{d}{dA}(T e^\Phi) = -\frac{3}{16} \frac{k^* \epsilon}{\sigma T^3} \frac{(L_r - L_r^{(\nu)}) e^\Phi}{16\pi^2 r^4 \rho}. \quad (2.45)$$

2.5 Compendio delle equazioni

Riportatiamo qui le equazione che abbiamo ricavato per descrivere la struttura stellare:

1. Equazione per il numero dei barioni:

$$\frac{dr}{dA} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad r(0) = 0. \quad (2.46)$$

2. Equazione per la massa:

$$\frac{dm}{dA} = \frac{\epsilon}{\rho} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad m(0) = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon. \quad (2.48)$$

3. Equazione sorgente per Φ :

$$\frac{d\Phi}{dA} = \frac{m + 4\pi r^3 \rho}{4\pi r^4 \rho} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}, \quad \Phi(A_R) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m(A_R)}{r(A_R)} \right) \quad (2.49)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}, \quad \Phi(R) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right). \quad (2.50)$$

4. Equazione TOV dell'equilibrio idrostatico:

$$\frac{dP}{dA} = -(\epsilon + P) \frac{d\Phi}{dA}, \quad P(\epsilon_c) = P_c \quad (2.51)$$

$$\frac{dP}{dr} = -(\epsilon + P) \frac{d\Phi}{dr}. \quad (2.52)$$

5. Equazione dell'equilibrio termico:

$$\frac{d}{dA} \left(L_r^{(\gamma)} e^{2\Phi} \right) = -\frac{e^{2\Phi}}{\rho} \left(Q_\nu + e^{-\Phi} c_V \frac{dT}{dt} \right) \quad (2.53)$$

$$\frac{d}{dr} \left(L_r^{(\gamma)} e^{2\Phi} \right) = -\frac{4\pi r^2 e^{2\Phi}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \left(Q_\nu + e^{-\Phi} c_V \frac{dT}{dt} \right). \quad (2.54)$$

6. Equazione del trasporto di energia:

$$\frac{d}{dA} (T e^\Phi) = -\frac{3}{16} \frac{k^* \epsilon}{\sigma T^3} \frac{L_r^{(\gamma)} e^\Phi}{16\pi^2 r^4 \rho} \quad (2.55)$$

$$\frac{d}{dr} (T e^\Phi) = -\frac{3}{16} \frac{k^* \epsilon}{\sigma T^3} \frac{L_r^{(\gamma)}}{4\pi r^2} \frac{e^\Phi}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}. \quad (2.56)$$

Capitolo 3

Principali meccanismi di raffreddamento

I processi fisici all'origine del raffreddamento di una stella di neutroni hanno come esito l'emissione di neutrini, che avviene secondo modalità differenti nel core e nella crosta, essendo differente lo stato della materia nelle due regioni. In questo capitolo sono brevemente descritti i processi di emissione che avvengono nel core, dove la materia è in equilibrio rispetto al decadimento beta, sia perché questi sono i processi più intensi, e dunque dominanti, sia perché in prospettiva si vuole costruire una descrizione consistente dei processi che hanno luogo nel core e verificare i risultati ottenuti inserendoli nel programma per il calcolo del raffreddamento.

3.1 Processi Urca diretti

Il processo di emissione di neutrini più efficiente è il processo Urca diretto. Essendo il nucleo composto da una miscela di neutroni, protoni ed elettroni, la più semplice reazione che possa avvenire è il decadimento beta, nonché il suo inverso:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, \quad p + e \rightarrow n + \nu_e. \quad (3.1)$$

Questi due processi portano la materia in equilibrio beta, condizione che viene raggiunta quando i potenziali chimici soddisfano la relazione $\mu_n = \mu_p + \mu_e$. Fuori dall'equilibrio, uno dei due processi è più intenso dell'altro, provocando di conseguenza un cambiamento della frazione di neutroni e protoni presenti, finché non si raggiunge la giusta concentrazione, tale da soddisfare la condizione sui potenziali chimici. Raggiunto l'equilibrio, i tassi delle due reazioni sono identici; per questo motivo, l'emissività neutrinica totale si ottiene raddoppiando l'emissività associata ad uno dei due processi:

$$Q_D = 2 \int \frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} dW_{i \rightarrow f} E_\nu f_n (1 - f_p) (1 - f_e), \quad (3.2)$$

dove $dW_{i \rightarrow f}$ è la probabilità infinitesima associata al decadimento beta, f_j è la distribuzione di Fermi-Dirac delle j -esima specie di particelle e E_ν è l'energia del neutrino. Si tratta di un integrale su 12 dimensioni, 4 delle quali possono essere eliminate utilizzando la conservazione dell'energia e dell'impulso.

Il calcolo della (3.2) può essere notevolmente semplificato, e dunque trattato in maniera analitica, utilizzando un'opportuna tecnica di approssimazione, la decomposizione dello spazio delle fasi. L'idea alla base di questo schema è che, poiché alle temperature tipiche delle stelle di neutroni i nucleoni e gli elettroni sono fortemente degeneri, il contributo principale all'emissività proviene da un sottile strato di stati intorno alla superficie di Fermi. È quindi possibile porre $|\mathbf{p}| = p_F$. Di conseguenza, lo scambio di energia nel processo è dell'ordine della scala di temperatura, $\sim T$. L'energia del neutrino è $\sim T$, così come il suo impulso, che può così essere trascurato nell'argomento della funzione delta associata alla conservazione dell'impulso.

La probabilità di transizione infinitesima ha la forma

$$dW_{i \rightarrow f} = 2\pi \delta(E_n - E_p - E_e - E_\nu) \delta(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e) \times |M_{fi}|^2 4\pi E_\nu^2 dE_\nu \frac{d\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3}, \quad (3.3)$$

con $|M_{fi}|^2 = 2G^2(1 + 3g_A^2)$, dove $G = G_F \cos \theta_c$ e G_F e $\cos \theta_c$ sono, rispettivamente, la costante di Fermi e l'angolo di Cabibbo e g_A è la costante di accoppiamento assiale. Possiamo quindi scrivere:

$$dW_{i \rightarrow f} \frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^8} \delta(E_n - E_p - E_e - E_\nu) \delta(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e) \times |M_{fi}|^2 4\pi E_\nu^2 dE_\nu \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^* dE_j d\Omega_j, \quad (3.4)$$

dove $d\Omega_j$ è l'elemento di angolo solido nella direzione di p_j , $m_j^* = p_{Fj}/v_{Fj}$ è la massa efficace della particella di tipo j e $v_{Fj} = (\partial E_j / \partial p_j)_{p=p_{Fj}}$ è la sua velocità di Fermi. Sostituendo la (3.4) nell'espressione dell'emissività (3.2), questa può essere riformulata nella seguente maniera:

$$Q_D = \frac{2}{(2\pi)^8} T^8 A I |M_{fi}|^2 \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^*, \quad (3.5)$$

con

$$A = 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 \delta(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e) \quad (3.6)$$

e

$$I = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \left[\prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^\infty dx_j f_j \right] \delta(x_1 + x_2 + x_3 - x_\nu). \quad (3.7)$$

La quantità A contiene l'integrazione sulle variabili angolari, mentre I contiene l'integrazione sulle variabili adimensionali associate all'energia delle particelle: $x_\nu = E_\nu/T$ e $x_j = (E_j - \mu_j)/T$. Il calcolo di questi integrali è descritto in maniera dettagliata nell'Appendice A. Il risultato è

$$A = \frac{32\pi^3}{p_{Fn} p_{Fp} p_{Fe}} \Theta_{npe}, \quad I = \frac{457\pi^6}{5040}, \quad (3.8)$$

dove

$$\Theta_{npe} = \begin{cases} 1 & \text{se } p_{Fn} \leq p_{Fp} + p_{Fe} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.9)$$

è la funzione di soglia per il processo. L'espressione che si ottiene per l'emissività è:

$$\begin{aligned} Q_D &= \frac{457}{10080} G_F^2 \cos^2 \theta_c (1 + 3g_A^2) \frac{m_n^* m_p^* m_e^*}{\hbar^{10} c^3} (K_B T)^6 \Theta_{npe} \\ &\simeq 4.00 \times 10^{27} \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{1/3} \frac{m_n^* m_p^*}{m_n^2} T_9^6 \Theta_{npe} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

dove $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ la densità centrale dei nuclei e T_9 è la temperatura in unità di $10^9 K$. Si noti che l'emissività dipende dalla temperatura secondo una legge di potenza: $Q_D \propto T_9^6$. L'esponente sei può essere spiegato in base a semplici considerazioni sullo spazio delle fasi: le tre particelle fortemente degeneri coinvolte nella reazione forniscono un contributo $\propto T^3$, essendo il volume dello spazio delle fasi ristretto ad un sottile strato di spessore $\sim T$ intorno alla superficie di Fermi; dopo la riduzione dovuta alla conservazione dell'energia, il neutrino dà un ulteriore fattore T^2 ed, infine, l'energia dello stesso che compare nell'integrale apporta il restante contributo $\propto T$. Risulta in tal modo evidente che la degenerazione della materia riduce drasticamente l'emissività neutrinica di una stella di neutroni.

3.1.1 Soglia del processo Urca diretto

Caratteristica fondamentale del processo Urca diretto è l'esistenza di una soglia, come indica la presenza della funzione gradino Θ_{npe} nella (3.10). Essendo tale processo, se permesso, più intenso di diversi ordini di grandezza rispetto a tutti gli altri, diventa importante stabilire dove si colloca tale soglia. Innanzitutto, come si è già visto, affinché il processo si accenda occorre che sia rispettata la condizione triangolare tra gli impulsi di Fermi p_{Fn} , p_{Fp} e p_{Fe} : $p_{Fn} \leq p_{Fp} + p_{Fe}$. Per valori della densità $n \sim n_0$, tale condizione non viene soddisfatta ed il processo è proibito; tuttavia, a seconda dell'equazione di stato, gli impulsi di Fermi p_{Fp} e p_{Fe} possono crescere più velocemente di p_{Fn} all'aumentare della densità, innescando così il processo.

Formalmente, il processo si accende quando la frazione di protoni raggiunge un valore critico. Nel caso di materia composta da neutroni, protoni ed elettroni (npe), $p_{Fp} = p_{Fe}$

per la condizione di neutralità elettrica, e la condizione triangolare diventa $p_{Fp} \geq p_{Fn}/2$, ovvero $n_p \geq n_n/8$. In termini di frazione protonica, questa condizione si traduce nella:

$$x_p = \frac{n_p}{n_n + n_p} \geq \frac{1}{9}. \quad (3.11)$$

Se il potenziale chimico degli elettroni supera il valore della massa a riposo del muone μ , $m_\mu = 105.7 \text{ Mev}$, diventa energeticamente favorevole anche un'altra categoria di processi Urca diretti, accanto a quelli elettronici già descritti:

$$n \rightarrow p + \mu + \bar{\nu}_\mu, \quad p + \mu \rightarrow n + \nu_\mu. \quad (3.12)$$

L'emissività associata a questi processi ha la stessa forma della (3.10), dato che la condizione di equilibrio beta richiede $\mu_\mu = \mu_e$, ovvero $m_\mu^* = m_e^*$. Ciò che cambia è la funzione di soglia, che adesso diventa $\Theta_{np\mu}$; infatti, la comparsa dei muoni sposta il valore della frazione critica dei protoni, innalzandolo, fino a raggiungere il limite superiore $x_p = 1/[1 + (1 + 2^{-1/3})^3] \approx 0.148$ per $\mu_\mu \gg m_\mu$.

I primi modelli di equazione di stato descrivevano la materia stellare come un gas di particelle di Fermi non interagenti. All'interno di questa rappresentazione, troppo semplice e poco realistica, la frazione di protoni non eccede mai il valore di soglia dei processi Urca diretti. Successivamente, prima da Boguta (1981) e poi da Lattimer e al. (1991), venne dimostrato come, per descrizioni della materia nucleare che includano anche le interazioni forti, e in particolare per equazioni di stato con grande energia di simmetria, si ottiene una frazione di protoni più alta, tale da superare il valore di soglia per densità che si pensa possano essere raggiunte nel core delle stelle di neutroni.

La Figura 3.1 mostra le frazioni di protoni, elettroni e muoni presenti nella materia nucleare a $T = 0$ secondo l'equazione di stato APR [3]. Si può osservare come la soglia dei processi Urca sia raggiunta per valori di densità $0.6 \lesssim n \lesssim 0.9 \text{ fm}^{-3}$.

Nella figura 3.2 sono riportati gli andamenti dell'impulso di Fermi del neutrone p_{Fn} , e delle quantità $p_{Fp} + p_{Fe}$ e $p_{Fp} + p_{F\mu}$. Si può notare come la condizione triangolare sia soddisfatta per i valori di densità $\sim 0.7 \text{ fm}^{-3}$ per il caso elettronico e 0.9 fm^{-3} per il caso muonico.

3.2 Processi Urca modificati

Quando i processi Urca diretti sono proibiti, il principale meccanismo di emissione di neutrini è il processo Urca modificato, che implica l'aggiunta di un ulteriore nucleone spettatore che garantisca la conservazione del momento:

$$n + n \rightarrow p + n + e + \bar{\nu}_e, \quad p + n + e \rightarrow n + n + \nu_e, \quad (3.13)$$

$$n + p \rightarrow p + p + e + \bar{\nu}_e, \quad p + p + e \rightarrow n + p + \nu_e. \quad (3.14)$$

Le due righe definiscono rispettivamente il ramo neutronico ed il ramo protonico del processo. L'aggiunta della particella spettatrice rallenta di molto il tasso della reazione. I

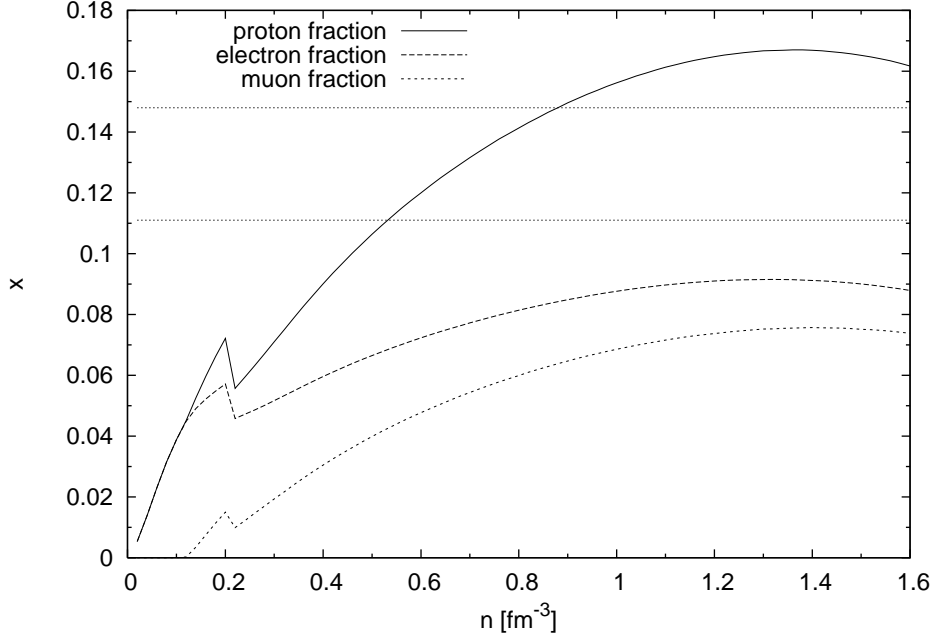


Figura 3.1. Frazioni di protoni, elettroni e muoni prevista dall'equazione di stato di Akmal, Pandharipande e Ravenhal [3]. Le due linee orizzontali indicano le soglie (frazione protonica minima) dei processi Urca diretti elettronici e muonici.

diagrammi di Feynman che descrivono questo processo prevedono una collisione nucleone-nucleone accompagnata da un decadimento o una cattura beta.

I processi Urca modificati saranno, da qui in avanti, indicati con l'apice MN , dove con $N = n$ ci si riferisce alla branca neutronica e con $N = p$ a quella protonica. Entrambe le branche consistono della reazione diretta e dell'inversa; queste, all'equilibrio, sono uguali e, dunque, è sufficiente calcolare il tasso di una delle due reazioni e raddoppiarlo. L'emissività può scriversi nella usuale forma:

$$Q^{MN} = 2 \int \left[\prod_{j=1}^4 \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \right] \frac{d\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3} E_\nu (2\pi)^4 \delta(E_f - E_i) \\ \times \delta(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) f_1 f_2 (1 - f_3) (1 - f_4) (1 - f_e) \frac{1}{2} |M_{fi}|^2, \quad (3.15)$$

dove gli indici i e f si riferiscono allo stato iniziale e finale e $|M_{fi}|^2$ è il modulo quadro dell'ampiezza associata al processo; 2 è un fattore di simmetria che serve ad evitare doppi conteggi trattandosi di collisioni tra particelle identiche.

Si può procedere in maniera del tutto analoga a quanto fatto per i processi Urca diretti

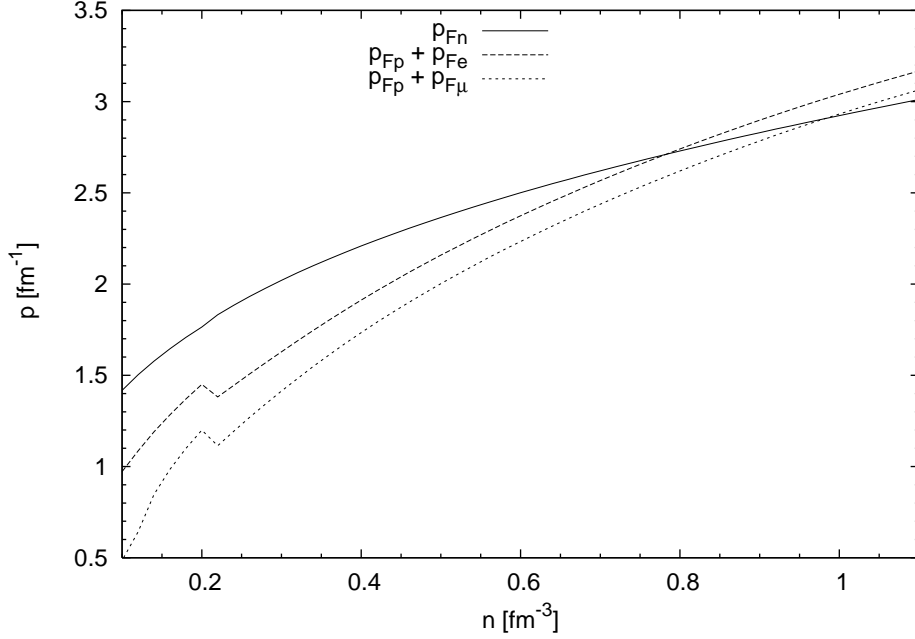


Figura 3.2. Andamento di p_{Fn} , $p_{Fp} + p_{Fe}$ e $p_{Fp} + p_{F\mu}$ in funzione della densità secondo il modello APR [3]. La diseuguaglianza triangolare è rispettata per quei valori di densità per i quali le linee tratteggiate si trovano al di sopra della linea continua.

nell'appendice A e riscrivere l'emissività associata alla reazione diretta come:

$$Q^{MN} = \frac{1}{(2\pi)^{14}} T^8 A I \langle |M_{fi}|^2 \rangle \prod_{j=1}^5 p_{Fj} m_j^* , \quad (3.16)$$

$$A = 4\pi \left[\prod_{j=1}^5 \int d\Omega_j \right] \delta(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) , \quad (3.17)$$

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{4\pi}{A} \left[\prod_{j=1}^5 \int d\Omega_j \right] \delta(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) |M_{fi}|^2 , \quad (3.18)$$

$$I = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \left[\prod_{j=1}^5 \int_{-\infty}^\infty dx_j f_j \right] \delta \left(\sum_{j=1}^5 x_j - x_\nu \right) . \quad (3.19)$$

Le grandezze A e $\langle |M_{fi}|^2 \rangle$ contengono l'integrazione sulle orientazioni del momento delle particelle; i moduli dei momenti \mathbf{p}_j sono posti uguali ai momenti di Fermi. In A , dato che si trascura il momento del neutrino, l'integrazione su quest'ultimo può essere immediatamente eseguita restituendo 4π . $|M_{fi}|^2$ dipende in generale dagli impulsi delle particelle e deve

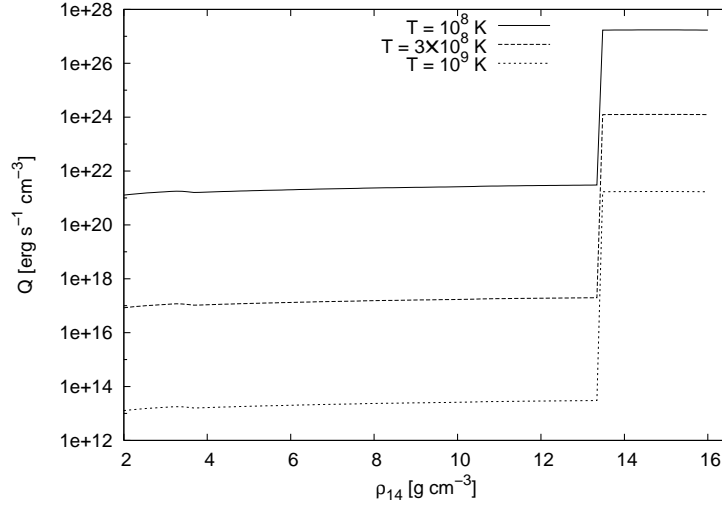


Figura 3.3. Emissività neutrिनica secondo il modello APR [3]. Il processo Urca diretto viene attivato ad una densità di $\sim 1.3 \text{ g cm}^{-3}$. Sotto questa soglia il processo di emissione dominante è il processo Urca modificato.

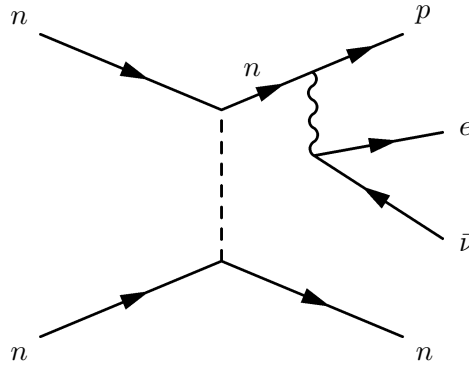


Figura 3.4. Diagramma di Feynman associato al primo processo della (3.13)

essere lasciato all'interno dell'integrale; per questo motivo, si introduce $\langle |M_{fi}|^2 \rangle$, il modulo quadro dell'elemento di matrice mediato sulle orientazioni dei momenti dei nucleoni. Risolvendo la (3.19), si ottiene:

$$I = \frac{11513 \pi^8}{120960} . \quad (3.20)$$

Arrivati a questo punto, l'analisi è differente per il ramo neutronico e per il ramo protonico.

3.2.1 Ramo neutronico

Si consideri la prima reazione della (3.13) e si indichino con 1 e 2 i neutroni nello stato iniziale e con 3 e 4 rispettivamente il neutrone ed il protone nello stato finale. Il fattore A è calcolabile e vale

$$A_n = \frac{2\pi(4\pi)^4}{p_{Fn}^3} . \quad (3.21)$$

Questa espressione dovrebbe essere modificata a densità elevate se si attivano i processi Urca diretti; è anche vero che, in tal caso, i processi Urca modificati diventerebbero irrilevanti rispetto a quelli diretti.

Più problematica, invece, è il calcolo dell'elemento di matrice M_{fi} , dovendo ora includere il contributo delle interazioni forti. L'interazione nucleone-nucleone è composta da una parte a lungo raggio (OPE) descritta tramite lo scambio di un pione secondo il modello di Yukawa, e da una parte a corto raggio, fortemente repulsiva, descritta all'interno della teoria del liquido fermionico di Landau.

Per ottenere una stima della parte a lungo raggio, si può seguire il procedimento utilizzato da Friman e Maxwell [20], i quali trattano i nucleoni come particelle non relativistiche e assumono il momento del neutrino e dell'elettrone trascurabile. Una volta mediato sulle orientazioni del momento del neutrino si ottiene:

$$|M_{fi}^{MN}|^2 = \frac{16 G^2}{E_e^2} \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^4 g_A^2 F_A , \quad (3.22)$$

dove m_π è la massa del pione, $f_\pi \approx 1$ e

$$F_A = \frac{4\mathbf{Q}_1^4}{(\mathbf{Q}_1^2 + m_\pi^2)^2} + \frac{4\mathbf{Q}_2^4}{(\mathbf{Q}_2^2 + m_\pi^2)^2} + \frac{(\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2)^2 - 3\mathbf{Q}_1^2 \mathbf{Q}_2^2}{(\mathbf{Q}_1^2 + m_\pi^2)(\mathbf{Q}_2^2 + m_\pi^2)} , \quad (3.23)$$

con $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ e $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4$. Il primo termine viene dal quadrato dell'ampiezza associata al diagramma di Feynman in cui il nucleone 1 diventa il 3 ed il nucleone 2 si trasforma nel 4; il secondo termine trae origine dalla transizione $1 \rightarrow 4$ e $2 \rightarrow 3$; infine, il terzo termine rappresenta l'interferenza tra i due diagrammi. Infine, Friman e Maxwell trascurano anche il momento del protone, approssimazione che si traduce ponendo $|\mathbf{Q}_1| = |\mathbf{Q}_2| \approx p_{Fn}$ e $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \approx p_{Fn}^2/2$. Si perviene a

$$|M_{fi}^{Mn}|^2 = 16 G^2 \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^4 \frac{g_A^2}{E_e^2} \frac{21}{4} \frac{p_{Fn}^4}{(p_{Fn}^2 + m_\pi^2)^2} \quad (3.24)$$

L'elemento di matrice così ottenuto risulta indipendente dalle orientazioni dei momenti delle particelle e può essere portato fuori dall'integrale; dunque, $\langle |M_{fi}^{Mn}|^2 \rangle = |M_{fi}^{Mn}|^2$.

Un confronto tra la soluzione esatta ottenuta numericamente e quella approssimata sopra ricavata mostra un eccellente accordo. In particolare, la differenza è di qualche per cento a $\rho \sim \rho_0$ e del 10% a $\rho \sim 3\rho_0$, densità alla quale l'approssimazione OPE non è più valida.

In conclusione, l'emissività ottenuta da Friman e Maxwell è data da:

$$\begin{aligned}
 Q^{Mn} &= \frac{11513 G_F^2 \cos^2 \theta_C g_A^2 m_n^{*3} m_p^*}{30240 \cdot 2\pi} \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^4 \frac{p_{Fp} (k_B T)^8}{\hbar^{10} c^8} \alpha_n \beta_n \\
 &\approx 8.1 \times 10^{21} \left(\frac{m_n^*}{m_n} \right)^3 \left(\frac{m_p^*}{m_p} \right) \left(\frac{n_p}{n_0} \right)^{1/3} T_9^8 \alpha_n \beta_n \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

con $\alpha_n = 1.13$ e $\beta_n = 0.68$.

3.2.2 Ramo protonico

Si consideri la seconda reazione della (3.14) e si indichino con 1 e 2 i protoni dello stato iniziale e con 3 e 4 rispettivamente il protone e il neutrone dello stato finale. Il calcolo di A è più complicato rispetto al ramo neutronico:

$$A_p = \frac{2(2\pi)^5}{p_{Fn} p_{Fp}^3 p_{Fe}} (p_{Fe} + 3p_{Fp} - p_{Fn})^2 \Theta_{Mp}, \quad (3.26)$$

dove $\Theta_{Mp} = 1$ se il ramo protonico è permesso dalla conservazione del momento, nulla altrimenti. La diseuguaglianza triangolare si traduce in $p_{Fn} < 3p_{Fp} + p_{Fe}$. Anche A_p dovrebbe essere modificato per densità superiori alla soglia dei processi Urca diretti, regione tuttavia nella quale il contributo dei processi Urca modificati è trascurabile.

Il calcolo del modulo quadro dell'elemento di matrice porta ad un risultato identico alla 3.22. sostituendo $|\mathbf{Q}_1| = |\mathbf{Q}_2| \approx p_{Fn} - p_{Fp}$ (massimo momento trasferito) e $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 = -(p_{Fn} - p_{Fp})^2$, si ottiene un'espressione analoga alla 3.24, previa sostituzione di $21/4$ con 6 e p_{Fn} con $p_{Fn} - p_{Fp}$.

L'approssimazione di indipendenza dall'angolo dell'elemento di matrice è ben verificata in entrambi i rami. L'emissività per il ramo protonico può essere ricavata a partire da quelle del ramo neutronico mediante la seguente regola di rescaling:

$$\begin{aligned}
 \frac{Q^{Mp}}{Q^{Mn}} &= \frac{\langle |M_{fi}^{Mp}|^2 \rangle}{\langle |M_{fi}^{Mn}|^2 \rangle} \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right)^2 \frac{(p_{Fe} + 3p_{Fp} - p_{Fn})^2}{8 p_{Fe} p_{Fp}} \Theta_{Mp} \\
 &\approx \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right)^2 \frac{(p_{Fe} + 3p_{Fp} - p_{Fn})^2}{8 p_{Fe} p_{Fp}} \Theta_{Mp}. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Nelle applicazioni pratiche si preferisce porre $\langle |M_{fi}^{Mp}|^2 \rangle = \langle |M_{fi}^{Mn}|^2 \rangle$, omettendo differenze insignificanti, come indica l'ultima approssimazione della 3.27.

La differenza principale tra i due rami è la presenza di una soglia per quello protonico. Nel caso della materia npe , tale condizione si riduce a $p_{Fn} < 4p_{Fp}$, equivalente alla frazione critica di protoni $x = 1/65 = 0.0154$, raggiunta quasi ovunque nel core. Una volta attivato il ramo protonico, l'emissività associata cresce lentamente da zero fino a diventare paragonabile con l'emissività del ramo neutronico alla densità di soglia del processo Urca diretto. In conclusione è da notare come l'emissività dei processi Urca modificati dipenda dalla temperatura come T^8 . L'ulteriore fattore T^2 rispetto ai processi Urca diretti è da addebitarsi alle due particelle degeneri aggiuntive.

3.3 Bremsstrahlung neutrिनica nelle collisioni nucleone-nucleone

Per concludere la panoramica sui principali processi di emissione di neutrini nel core occorre considerare i processi di bremsstrahlung neutrिनica dovuta alle collisioni tra nucleoni:

$$n + n \rightarrow n + n + \nu + \bar{\nu}, \quad n + p \rightarrow n + p + \nu + \bar{\nu}, \quad p + p \rightarrow p + p + \nu + \bar{\nu}. \quad (3.28)$$

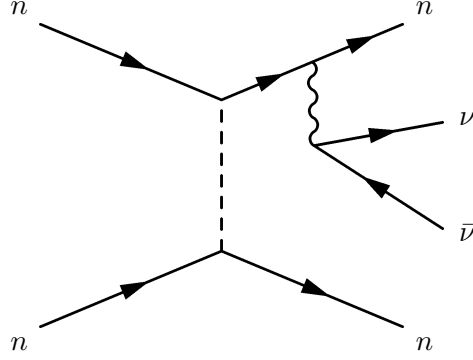


Figura 3.5. Diagramma di Feynman associato al primo processo della 3.28

Secondo queste reazioni, lo scattering forte di due nucleoni ha come prodotto una coppia di neutrini di qualsiasi sapore. La bremsstrahlung tra nucleoni non ha alcuna soglia ed opera a qualsiasi densità; inoltre, al contrario dei processi fin qui esaminati, non altera la composizione della materia.

L'espressione generale per l'emissività dei processi di bremsstrahlung è:

$$Q^{NN} = \int \left[\prod_{j=1}^4 \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \right] \frac{d\mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'_\nu}{(2\pi)^3} \omega_\nu (2\pi)^4 \delta(E_f - E_i) \\ \times \delta(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) f_1 f_2 (1 - f_3) (1 - f_4) \frac{1}{s} |M_{fi}|^2, \quad (3.29)$$

dove l'indice j si riferisce ai nucleoni, \mathbf{p}_ν e \mathbf{p}'_ν sono i momenti del neutrino e dell'anti-neutrino, $\omega_\nu = E_\nu + E'_\nu$ è l'energia della coppia di neutrini; s è il fattore di simmetria introdotto per evitare doppi conteggi: $s = 1$ per il processo np e $s = 4$ per i processi nn e pp . Nel limite non relativistico, il modulo quadro dell'elemento di matrice sommato sugli spin delle particelle può scriversi come

$$|M_{fi}|^2 = |\tilde{M}_{fi}|^2 / \omega_\nu^2. \quad (3.30)$$

Il fattore ω_ν^2 al denominatore proviene dal propagatore di un nucleone virtuale presente nei diagrammi di Feynman.

Se si trascurano gli impulsi dei neutrini rispetto a quelli dei nucleoni, $|\tilde{M}_{fi}|^2$ risulta indipendente da \mathbf{p}_ν e \mathbf{p}'_ν . Di conseguenza, l'integrazione sullo spazio delle fasi dei neutrini diventa:

$$\int_0^\infty E_\nu^2 dE_\nu \int_0^\infty E'_\nu dE'_\nu \cdots = \frac{1}{30} \int_0^\infty \omega_\nu^5 d\omega_\nu \cdots, \quad (3.31)$$

e l'emissività (seguendo sempre la procedura di decomposizione):

$$Q^{NN} = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{18}} \frac{1}{30} A I \frac{1}{s} \langle |\tilde{M}_{fi}|^2 \rangle T^8 \prod_{j=1}^4 m_j^* p_{Fj}, \quad (3.32)$$

con

$$A = (4\pi)^2 \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 d\Omega_4 \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4), \quad (3.33)$$

$$\langle |\tilde{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{(4\pi)^2}{A} \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 d\Omega_4 \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) |\tilde{M}_{fi}|^2, \quad (3.34)$$

$$I = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^4 \left[\prod_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j f_j \right] \delta \left(\sum_{j=1}^4 x_j - x_\nu \right) = \frac{164\pi^8}{945}. \quad (3.35)$$

Si ricordi che $x_j = (E_j - \mu_j)/T$ è l'energia adimensionale dei nucleoni, mentre $x_\nu = \omega_\nu/T$ è l'energia adimensionale della coppia di neutrini. Gli integrali angolari restituiscono:

$$A_{nn} = \frac{(4\pi)^5}{2p_{Fn}^3}, \quad A_{np} = \frac{(4\pi)^5}{2p_{Fn}^2 p_{Fp}}, \quad A_{pp} = \frac{(4\pi)^5}{2p_{Fp}^3}. \quad (3.36)$$

La decomposizione dello spazio delle fasi fornisce una regola di rescaling per i vari processi:

$$\frac{Q^{np}}{Q^{nn}} = 4 \frac{\langle |\tilde{M}_{fi}^{np}|^2 \rangle}{\langle |\tilde{M}_{fi}^{nn}|^2 \rangle} \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right)^2 \frac{p_{Fp}}{p_{Fn}}, \quad \frac{Q^{pp}}{Q^{nn}} = 4 \frac{\langle |\tilde{M}_{fi}^{pp}|^2 \rangle}{\langle |\tilde{M}_{fi}^{nn}|^2 \rangle} \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right)^4 \frac{p_{Fp}}{p_{Fn}}. \quad (3.37)$$

Nell'ambito del modello OPE, il modulo quadro dell'elemento di matrice risulta:

$$|\tilde{M}_{fi}^{NN}|^2 = 16 G_F^2 g_A^2 \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^4 F_{NN}, \quad (3.38)$$

con

$$F_{NN} = \frac{\mathbf{Q}_1^4}{(\mathbf{Q}_1^2 + m_\pi^2)^2} + \frac{\mathbf{Q}_2^4}{(\mathbf{Q}_2^2 + m_\pi^2)^2} + \frac{\mathbf{Q}_1^2 \mathbf{Q}_2^2 - 3(\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2)^2}{(\mathbf{Q}_1^2 + m_\pi^2)(\mathbf{Q}_2^2 + m_\pi^2)} \quad (3.39)$$

per i processi nn e pp , mentre

$$F_{NN} = \frac{\mathbf{Q}_1^4}{(\mathbf{Q}_1^2 + m_\pi^2)^2} + \frac{2\mathbf{Q}_2^4}{(\mathbf{Q}_2^2 + m_\pi^2)^2} - 2 \frac{\mathbf{Q}_1^2 \mathbf{Q}_2^2 - (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2)^2}{(\mathbf{Q}_1^2 + m_\pi^2)(\mathbf{Q}_2^2 + m_\pi^2)} \quad (3.40)$$

per il processo np . $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ e $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4$; nel limite di forte degenerazione dei nucleoni, $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 = 0$.

Dopo aver mediato il modulo quadro dell'elemento di matrice sulle orientazioni dei momenti dei nucleoni, si ottiene:

$$\langle |\tilde{M}_{fi}^{NN}|^2 \rangle = 161, G_F^2 g_A^2 \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^4 \langle F_{NN} \rangle, \quad (3.41)$$

dove

$$\langle F_{NN} \rangle = 3 - \frac{5}{q} \arctan q + \frac{1}{1+q^2} + \frac{1}{q\sqrt{2+q^2}} \arctan \left(q\sqrt{2+q^2} \right), \quad (3.42)$$

per i processi nn o pp , e

$$\langle F_{NN} \rangle = 1 - \frac{3 \arctan q}{2q} + \frac{1}{2(1+q^2)} + \frac{2p_{Fn}^4}{(p_{Fn}^2 + m_\pi^2)^2} - \left(1 - \frac{\arctan q}{q} \right) \frac{2p_{Fn}^2}{p_{Fn}^2 + m_\pi^2}, \quad (3.43)$$

con $q_N = 2p_{Fn}/m_\pi$.

L'equazione 3.42 è un'espressione esatta all'interno del modello considerato, mentre la 3.43 è ottenuta assumendo $p_{Fp} \ll p_{Fn}$. In ogni caso l'approssimazione è valida per densità $\rho \lesssim 3\rho_0$.

Per concludere il calcolo dell'emissività, si può fare riferimento alla trattazione di Friman e Maxwell. Questi trascurano, per le collisioni nn , il termine di scambio nel modulo quadro dell'elemento di matrice 3.42, mediano sulle orientazioni dei momenti dei nucleoni e pongono $\rho = \rho_0$. Infine, hanno sostituito l' $\langle |\tilde{M}_{fi}|^2 \rangle$ così ricavato nell'espressione per Q^{nn} ed hanno introdotto un arbitrario fattore di correzione β_{nn} per tener conto di tutti gli effetti trascurati (correlazioni, parte repulsiva dell'interazione forte ...). La stessa procedura è utilizzata per le collisioni np , omettendo invece il termine d'interferenza nella 3.43. Tuttavia, non considerano il processo pp , la cui emissività è stata successivamente calcolata da

Yakovlev e Levenfish [21]. Le espressioni risultanti sono:

$$\begin{aligned}
 Q^{nn} &= \frac{41}{14175} \frac{G_F^2 g_A^2 m_n^{*4}}{2\pi \hbar^{10} c^8} \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^4 p_{Fn} \alpha_{nn} \beta_{nn} (k_B T)^8 \mathcal{N}_\nu \\
 &\approx 7.5 \times 10^{19} \left(\frac{m_n^*}{m_n} \right)^4 \left(\frac{n_n}{n_0} \right)^{1/3} \alpha_{nn} \beta_{nn} \mathcal{N}_\nu T_9^8 \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q^{nn} &= \frac{82}{14175} \frac{G_F^2 g_A^2 m_n^{*2} m_p^{*2}}{2\pi \hbar^{10} c^8} \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^4 p_{Fp} \alpha_{np} \beta_{np} (k_B T)^8 \mathcal{N}_\nu \\
 &\approx 1.5 \times 10^{20} \left(\frac{m_n^* m_p^*}{m_n m_p} \right)^2 \left(\frac{n_p}{n_0} \right)^{1/3} \alpha_{np} \beta_{np} \mathcal{N}_\nu T_9^8 \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q^{pp} &= \frac{41}{14175} \frac{G_F^2 g_A^2 m_p^{*4}}{2\pi \hbar^{10} c^8} \left(\frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^4 p_{Fp} \alpha_{pp} \beta_{pp} (k_B T)^8 \mathcal{N}_\nu \\
 &\approx 7.5 \times 10^{19} \left(\frac{m_p^*}{m_p} \right)^4 \left(\frac{n_p}{n_0} \right)^{1/3} \alpha_{pp} \beta_{pp} \mathcal{N}_\nu T_9^8 \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

dove m_π è la massa del π^0 e \mathcal{N}_ν il numero di sapori neutrinici. I fattori adimensionali α_{NN} vengono dalle stime degli elementi di matrice a $\rho = \rho_0$: $\alpha_{nn} = 0.59$, $\alpha_{np} = 1.06$, $\alpha_{pp} = 0.11$. I fattori di correzione β_{NN} sono: $\beta_{nn} = \beta_{np} = 0.56$, $\beta_{pp} = 0.7$. Entrambi i tre processi sono di intensità paragonabile, con $Q^{pp} < Q^{np} < Q^{nn}$.

Anche in questo caso, l'emissività è proporzionale a T^8 , un risultato spiegabile grazie ad alcune considerazioni sullo spazio delle fasi. I quattro nucleoni contribuiscono con T^4 , i due neutrini apportano un fattore T^6 ; il modulo quadro dell'elemento di matrice è proporzionale a ω_ν^{-2} , ovvero a T^{-2} , rimuovendo così il T^2 in eccesso.

In presenza di iperoni, diventano possibili tutti i processi di bremsstrahlung associati alle collisioni tra queste particelle.

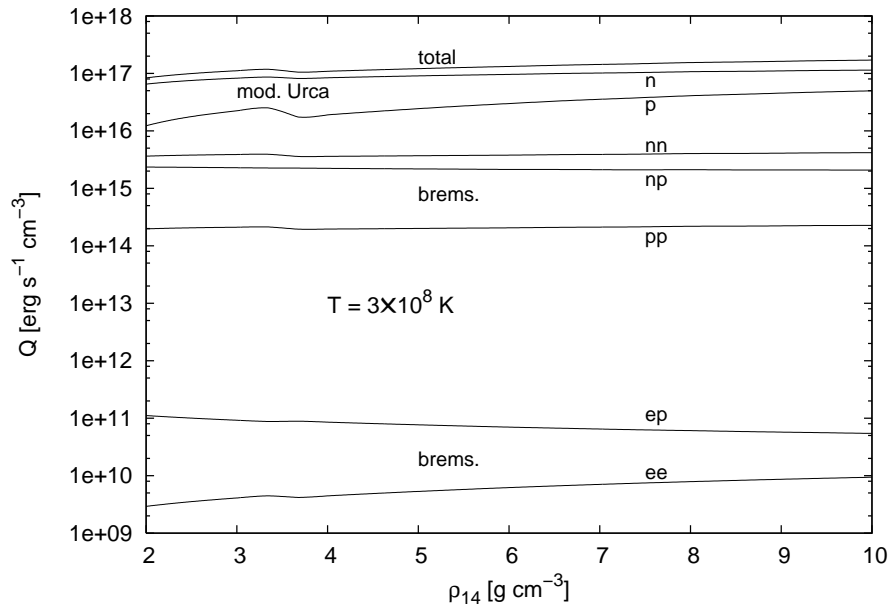


Figura 3.6. In questo grafico è riportato l'andamento dei principali processi di emissione neutrinica nel core in un range di densità per le quali il processo Urca diretto non è attivo. In tal caso i processi più intensi risultano quelli Urca modificati, dopo vengono i processi di bremsstrahlung tra nucleoni, infine lo scattering coulombiano tra particelle cariche (elettrone-protone ed elettrone-elettrone).

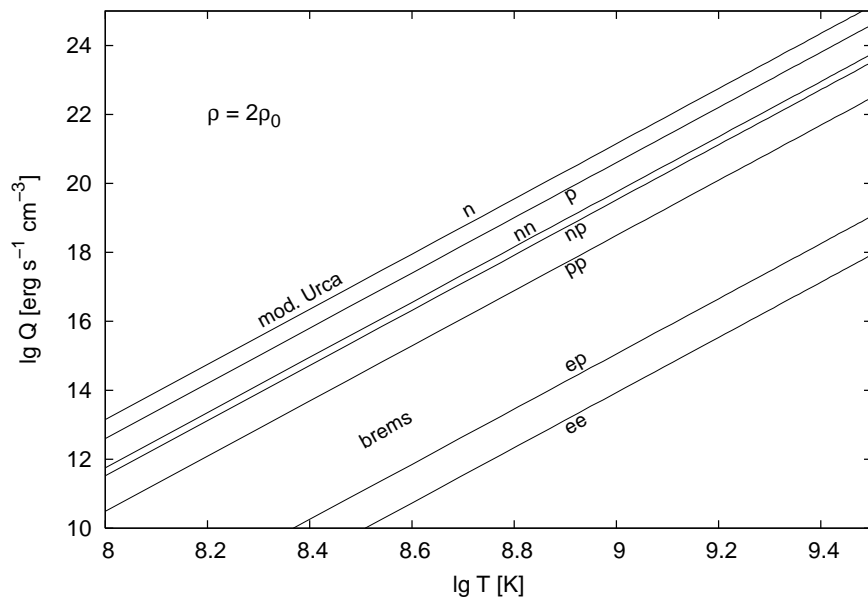


Figura 3.7. In questo grafico è riportato l'andamento dei principali processi di emissione in funzione della temperatura. Si è utilizzata una scala doppio-logaritmica in modo da metterne in evidenza la dipendenza dalla temperatura sotto forma di potenza.

Capitolo 4

L'algoritmo per la soluzione delle equazioni di raffreddamento

Le grandezze naturali che variano continuamente sia nello spazio che nel tempo sono descritte da funzioni oppure da campi che contengono al loro interno lo spazio e il tempo come variabili indipendenti. Questo è anche il caso della temperatura della stella, come si è già visto nelle equazioni di raffreddamento, essendo $T = T(r,t)$. A causa dell'indipendenza delle variabili, le equazioni che ne descrivono l'evoluzione non possono che essere alle derivate parziali (PDE). In particolare, affinché sia possibile la loro risoluzione, la condizione iniziale, ovvero la soluzione a $t = 0$, deve essere nota non in un solo punto, ma su tutto lo spazio. Inoltre, evolvendo nel tempo, le variazioni di temperatura in un punto si ripercuotono anche sui punti vicini, cosicché l'algoritmo dovrà ricorrere a passi finiti sia nello spazio che nel tempo (*finite difference method*). La procedura qui adottata rappresenta un metodo standard per la risoluzione delle equazioni di diffusione (*Crank-Nicholson method*), riducendo il problema iniziale alla risoluzione di un'equazione matriciale tridiagonale.

4.1 Preliminari sulla discretizzazione

Quando più avanti si procederà alla discretizzazione delle equazioni differenziali, si introdurranno inevitabilmente degli errori in esse. Oltre a conoscere il modo in cui discretizzare le varie quantità, è dunque buona cosa avere un'idea dell'entità degli errori introdotti.

Data una funzione $f(x)$, questa può essere sviluppata in serie di Taylor. In particolare, al prim'ordine si ottiene:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + O(h^2) ,$$

dove x_0 è il punto nel quale è effettuato lo sviluppo e $h = x - x_0$ è l'ampiezza dell'intervallo. Una volta discretizzato il dominio di definizione della funzione, supponendo per semplicità

un passo costante, si può effettuare lo sviluppo in x_i per valutare la funzione in x_{i+1} :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} (x_{i+1} - x_i) + O(h^2) ,$$

da cui

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(h^2) .$$

Quella ottenuta è la definizione *forward* di derivata prima. In maniera analoga può essere ricavata quella *backward*. Riassumendo, le due possibili definizioni sono:

$$\begin{aligned} \text{forward} & & f'_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) , \\ \text{backward} & & f'_i &= \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) . \end{aligned}$$

Entrambe restituiscono un errore di troncamento pari al prim’ordine. Per raggiungere una precisione maggiore, con errore al secondo ordine, si possono sfruttare entrambe le definizioni:

$$f_{i+1} = f_i + f'_i h + O(h^2) , \quad f_{i-1} = f_i - f'_i h + O(h^2) .$$

Sottraendo e ricavando la derivata prima si ottiene:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) .$$

Questa è la definizione di derivata che viene adottata per l’algoritmo.

4.2 Equazioni dell’evoluzione termica

Nel primo capitolo sono state ricavate le equazioni che descrivono l’evoluzione termica di una stella priva di convezione, quale è il caso di una stella di neutroni. Tali equazioni sono:

$$e^\Phi L = -\kappa 4\pi r^2 \sqrt{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} \frac{d(Te^\Phi)}{dr} , \quad (4.1a)$$

$$\frac{d(Te^\Phi)}{dt} = -\frac{1}{c_V} \left[e^{2\Phi} Q_\nu + \frac{1}{4\pi r^2} \sqrt{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} \frac{d(Le^{2\Phi})}{dr} \right] , \quad (4.1b)$$

espresse in unità del sistema C.G.S.; $\kappa = (16 \sigma T^3)/(3 \kappa^* \epsilon)$ è la conduttività termica totale. Ponendo

$$\tilde{T} = e^\Phi T , \quad \tilde{L} = e^{2\Phi} L , \quad (4.2)$$

$$S = -\frac{e^{2\Phi} Q_\nu}{c_V} , \quad (4.3)$$

$$B = -\frac{1}{c_V 4\pi r^2} \sqrt{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} , \quad (4.4)$$

$$C = -\kappa e^\Phi 4\pi r^2 \sqrt{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} , \quad (4.5)$$

le equazioni sono ricondotte ad una forma idonea per l'algoritmo di risoluzione:

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = S + B \frac{d\tilde{L}}{dr} , \quad (4.6a)$$

$$\tilde{L} = C \frac{d\tilde{T}}{dr} . \quad (4.6b)$$

4.3 Discretizzazione

Il passo successivo prevede la riscrittura delle equazioni in termini di differenze finite su una griglia di valori definiti sia nello spazio che nel tempo.

Di seguito, l'apice verrà utilizzato per indicare la coordinata temporale della griglia ed il pedice, invece, la coordinata spaziale. Essendo la stella a simmetria sferica, si può adottare come coordinata spaziale la sua coordinata radiale. Il raggio minimo è r_1 , quello massimo r_N ; di conseguenza, la griglia spaziale contiene $N - 1$ intervalli. La luminosità "redshiftata" è definita ai bordi di ogni intervallo ed ha indice spaziale intero, mentre il suo gradiente è definito al centro di ogni intervallo e gli si assegna indice semintero. Viceversa \tilde{T} è definito al centro di ogni intervallo e la sua derivata spaziale ai bordi; la temperatura più interna risulta $\tilde{T}_{3/2}$, quella più esterna $\tilde{T}_{N-1/2}$.

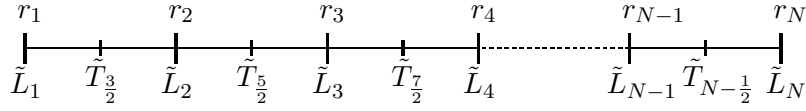


Figura 4.1. Griglia spaziale.

Le derivate che entrano nelle equazioni sono definite come:

$$\left(\frac{d\tilde{T}}{dt} \right)_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{\tilde{T}_{j+1/2}^{n+1} - \tilde{T}_{j+1/2}^n}{\Delta t^{n+1/2}} , \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tilde{L}}{dr} \right)_{j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{d}{dr} \left[f \tilde{L}_{j+1/2}^{n+1} + (1-f) \tilde{L}_{j+1/2}^n \right] \\ &= \frac{1}{\Delta r_{j+1/2}} \left[f(\tilde{L}_{j+1}^{n+1} - \tilde{L}_j^{n+1}) + (1-f)(\tilde{L}_{j+1}^n - \tilde{L}_j^n) \right] , \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{d\tilde{T}}{dr}\right)_j^n = \frac{\tilde{T}_{j+1/2}^n - \tilde{T}_{j-1/2}^n}{\Delta r_j}, \quad (4.9)$$

in modo che gli errori siano del secondo ordine in t e in r . f può assumere valori tra 0 (*fully explicit case*) e 1 (*fully implicit case*).

4.4 Lo schema tridiagonale di Crank-Nicholson

Si consideri la seconda equazione 4.6b del sistema, adesso in forma discreta:

$$\tilde{L}_j^{n+1} = C_j^n \left(\frac{d\tilde{T}}{dr}\right)_j^{n+1}. \quad (4.10)$$

Questa può essere sostituita nella prima equazione del sistema dopo aver discretizzato, ottenendo:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{T}_{j+1/2}^{n+1} - \tilde{T}_{j+1/2}^n}{\Delta t^{n+1/2}} - S_{j+1/2}^{n+1/2} - \\ & \frac{B_{j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta r_{j+1/2}} \left\{ f \left[C_{j+1}^n \frac{\tilde{T}_{j+3/2}^{n+1} - \tilde{T}_{j+1/2}^{n+1}}{\Delta r_{j+1}} - C_j^n \frac{\tilde{T}_{j+1/2}^{n+1} - \tilde{T}_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta r_j} \right] + \right. \\ & \left. (1-f) \left[C_{j+1}^{n-1} \frac{\tilde{T}_{j+3/2}^n - \tilde{T}_{j+1/2}^n}{\Delta r_{j+1}} - C_j^{n-1} \frac{\tilde{T}_{j+1/2}^n - \tilde{T}_{j-1/2}^n}{\Delta r_j} \right] \right\} = 0. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Allo scopo di semplificare l'espressione possono essere definiti i seguenti coefficienti:

$$\mathcal{S}_{j+1/2}^{n+1/2} = S_{j+1/2}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}, \quad (4.12a)$$

$$\mathcal{G}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{B_{j+1/2}^{n+1/2} C_{j+1}^n}{\Delta r_{j+1/2} \Delta r_{j+1}} \Delta t^{n+1/2}, \quad (4.12b)$$

$$\mathcal{H}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{B_{j+1/2}^{n+1/2} C_j^n}{\Delta r_{j+1/2} \Delta r_j} \Delta t^{n+1/2}, \quad (4.12c)$$

$$\mathcal{I}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{B_{j+1/2}^{n+1/2} C_{j+1}^{n-1}}{\Delta r_{j+1/2} \Delta r_{j+1}} \Delta t^{n+1/2}, \quad (4.12d)$$

$$\mathcal{M}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{B_{j+1/2}^{n+1/2} C_j^{n-1}}{\Delta r_{j+1/2} \Delta r_j} \Delta t^{n+1/2}. \quad (4.12e)$$

La 4.11 diventa:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{T}_{j+1/2}^{n+1} - \tilde{T}_{j+1/2}^n - \mathcal{S}_{j+1/2}^{n+1/2} \\
 & \quad - \mathcal{G}_{j+1/2}^{n+1/2} f \tilde{T}_{j+3/2}^{n+1} + \mathcal{G}_{j+1/2}^{n+1/2} f \tilde{T}_{j+1/2}^{n+1} \\
 & \quad + \mathcal{H}_{j+1/2}^{n+1/2} f \tilde{T}_{j+1/2}^{n+1} - \mathcal{H}_{j+1/2}^{n+1/2} f \tilde{T}_{j-1/2}^{n+1} \\
 & \quad - \mathcal{I}_{j+1/2}^{n+1/2} (1-f) \tilde{T}_{j+3/2}^n + \mathcal{I}_{j+1/2}^{n+1/2} (1-f) \tilde{T}_{j+1/2}^n \\
 & \quad + \mathcal{M}_{j+1/2}^{n+1/2} (1-f) \tilde{T}_{j+1/2}^n - \mathcal{M}_{j+1/2}^{n+1/2} (1-f) \tilde{T}_{j-1/2}^n = 0. \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Infine, lasciando le \tilde{T}^{n+1} al primo membro e spostando le \tilde{T}^n al secondo membro, si ha:

$$\begin{aligned}
 & -\mathcal{G}_{j+1/2}^{n+1/2} f \tilde{T}_{j+3/2}^{n+1} + \left[1 + \left(\mathcal{G}_{j+1/2}^{n+1/2} + \mathcal{H}_{j+1/2}^{n+1/2} \right) f \right] \tilde{T}_{j+1/2}^{n+1} - \mathcal{H}_{j+1/2}^{n+1/2} f \tilde{T}_{j-1/2}^{n+1} = \\
 & \quad \mathcal{I}_{j+1/2}^{n+1/2} (1-f) \tilde{T}_{j+3/2}^n + \left[1 - \left(\mathcal{I}_{j+1/2}^{n+1/2} + \mathcal{M}_{j+1/2}^{n+1/2} \right) (1-f) \right] \tilde{T}_{j+1/2}^n \\
 & \quad + \mathcal{M}_{j+1/2}^{n+1/2} (1-f) \tilde{T}_{j-1/2}^n + \mathcal{S}_{j+1/2}^{n+1/2}. \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Il secondo membro può essere indicato in maniera compatta con $R_{j+1/2}^n$, in modo da poter porre la precedente espressione sotto forma di equazione matriciale:

$$\mathcal{A} \vec{T}^{n+1} = \vec{R}^n, \quad (4.15)$$

dove \vec{T}^{n+1} e \vec{R}^n sono vettori di componenti

$$\vec{T}^{n+1} = \left(\tilde{T}_{3/2}^{n+1}, \tilde{T}_{5/2}^{n+1}, \dots, \tilde{T}_{N-1/2}^{n+1} \right), \quad (4.16)$$

$$\vec{R}^n = \left(R_{3/2}^n, R_{5/2}^n, \dots, R_{N-1/2}^n \right), \quad (4.17)$$

mentre \mathcal{A} è una matrice tridiagonale di dimensione $N-1$ così definita:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \dots & & \\ a & b & c & \dots & & 0 \\ & & & \dots & & \\ & 0 & & \dots & a & b & c \\ & & & \dots & 0 & a & b \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

con

$$a = -\mathcal{H}_{j+1/2}^{n+1/2} f, \quad b = 1 + \left(\mathcal{G}_{j+1/2}^{n+1/2} + \mathcal{H}_{j+1/2}^{n+1/2} \right) f, \quad c = -\mathcal{G}_{j+1/2}^{n+1/2} f. \quad (4.19)$$

Come accennato prima, il problema della risoluzione del sistema (4.6) è stato ridotto al corrispondente problema per l'equazione matriciale 4.15; la sua soluzione richiede l'inversione della matrice tridiagonale \mathcal{A} e la sua moltiplicazione con il vettore \vec{R}^n .

4.5 Il passo temporale

Il passo temporale è stimato mediante un controllo sia sulla variazione di energia sia sulla variazione di temperatura.

Per quanto riguarda l’energia, si può prendere in considerazione l’emissività e valutare l’intervallo temporale “caratteristico” di questo processo:

$$\Delta t_{j+1/2}^Q = \frac{c_{Vj+1/2}^n \tilde{T}_{j+1/2}^n}{|Q_{\nu j+1/2}^n|} . \quad (4.20)$$

Venendo alla temperatura, si può stimare il tempo “caratteristico” della sua variazione nel seguente modo:

$$\Delta t_{j+1/2}^T = 0.03 \Delta t^{n-1/2} \frac{\tilde{T}_{j+1/2}^n}{|\tilde{T}_{j+1/2}^n - \tilde{T}_{j+1/2}^{n-1}|} . \quad (4.21)$$

Quindi, se l’emissività o la variazione di temperatura crescono nel tempo, diminuisce il passo temporale, e viceversa.

Infine, viene presa la più piccola tra queste due quantità:

$$\Delta t^{n+1/2} = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \min_{1 \leq j < N-1} \left\{ \Delta t_{j+1/2}^Q, \Delta t_{j+1/2}^T \right\} , \quad (4.22)$$

dove \mathfrak{M} è un moltiplicatore.

4.6 Il passo spaziale

I valori della griglia spaziale sono immessi come input nel codice. Essi provengono come output del programma per la risoluzione delle equazioni di struttura che fissano massa e raggio della stella; tuttavia, può qui essere fatto un accenno al modo in cui sono calcolati. Il passo d’integrazione è definito come:

$$\Delta r^{k+1} = \delta \Delta r^k \left(\frac{|P^k - P^{k-1}|}{P^k} + \frac{|m^k - m^{k-1}|}{m^k} \right)^{-1} , \quad (4.23)$$

dove l’apice k si riferisce al passo d’integrazione, P e m sono la pressione e la massa e δ è un moltiplicatore. In tal modo, risultano adeguatamente coperte la zona centrale della stella, dove la pressione varia debolmente ma la massa aumenta rapidamente, e lo strato esterno, dove la massa è ormai satura e la pressione diminuisce velocemente. Le equazioni sono poi integrate mediante il metodo di Runge-Kutta al quart’ordine, restituendo così la massa, la densità, il potenziale gravitazionale - tutti in funzione di r - da inserire nell’algoritmo.

Infine, le varie grandezze spaziali contenute nell’equazione matriciale sono così definite:

$$\Delta r_{j+1/2} = r_{j+1} - r_j \quad (4.24)$$

e

$$r_{j+1/2} = r_j + \frac{1}{2}\Delta r_{j+1/2}, \quad r_{j-1/2} = \Delta r_{j-1/2} + \frac{1}{2}\Delta r_{-1/2}, \quad (4.25)$$

da cui

$$\Delta r_j = r_{j+1/2} - r_{j-1/2} = r_j - r_{j-1} + \frac{1}{2}(\Delta r_{j+1/2} - \Delta r_{j-1/2}). \quad (4.26)$$

4.7 Condizioni al contorno

Affinché tutte le grandezze che compaiono nell'equazione matriciale 4.15 siano note, occorre imporre le condizioni al contorno.

Innanzitutto si deve imporre $\tilde{L}_1 = 0$, ovvero che la luminosità sia nulla al centro della sfera. A tale scopo basta porre $C_1 = 0$ in tutti i coefficienti 4.12.

In secondo luogo è necessario effettuare il *matching* con l'atmosfera.

Il modello stellare che si è adottato prevede che lo strato esterno sia fortemente isolante e che, di conseguenza, vi sia una caduta della temperatura (circa un paio d'ordini di grandezza) nel passare dal mantello alla superficie. Il confine tra l'interno della stella e tale strato isolante è fissato a $\rho_b \sim 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$; la relazione che lega la temperatura T_b in ρ_b e quella alla superficie T_e è tratta da [22]:

$$T_e = 0.87 \times 10^6 (g_{14})^{(1/4)} (T_b/10^8 \text{ K})^{0.55}, \quad (4.27)$$

dove g_{14} è l'accelerazione di gravità in superficie $g = GM e^{-\Phi(R)}/R^2$ in unità di $10^{14} \text{ cm s}^{-2}$. La sottile atmosfera è, infine, supposta trovarsi alla stessa temperatura della superficie. Per applicare questo modello all'algorithm, si deve modificare il calcolo di $T_{N-1/2}$. Relativamente alla griglia spaziale, viene posto $r_{n-1} = r_b$ e r_N essere uguale al raggio della stella. L'equazione in forma discreta a $j = N - 1$ viene ottenuta mantenendo esplicitamente \tilde{L}_N nella 4.11, ovvero non sostituendo la 4.10 nella 4.8. \tilde{L}_N è calcolata dalla temperatura superficiale secondo la relazione:

$$\tilde{L}_N = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 e^{2\Phi(R)}, \quad (4.28)$$

dove R indica il raggio della stella e σ la costante di Stefan-Boltzmann.

Ai fini dell'algorithm tutto ciò equivale alla sostituzione

$$R_{N-1/2}^n \rightarrow R_{N-1/2}^n + \frac{B_{N-1/2}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}}{\Delta r_{N-1/2}} \left[f \tilde{L}_N^{n+1} + (1-f) \tilde{L}_N^n \right], \quad (4.29)$$

avendo posto $\mathcal{G}_{N-1/2}^{n+1/2} = \mathcal{I}_{N-1/2}^{n+1/2} = 0$.

Per ultimo, il profilo di temperatura iniziale è $\tilde{T}_{j+1/2}^0 = 5 \times 10^{10} \text{ K}$ per tutte le j .

4.8 Strategia d’iterazione

I coefficienti 4.12 hanno al loro interno diverse quantità al tempo $n + 1/2$, come $Q_\nu^{n+1/2} = Q_\nu(T^{n+1/2})$, $c_V^{n+1/2} = c_V(T^{n+1/2})$ e $\kappa^{n+1/2} = \kappa(T^{n+1/2})$; a seconda della scelta dei parametri, alcune di esse possono anche essere richieste al passo successivo $n + 1$. Inizialmente, queste grandezze sono valutate mediante estrapolazione lineare da T^{n-1} e T^n .

Dopo aver completato l’algoritmo e trovato la soluzione per T^{n+1} , viene calcolato l’errore relativo tra la soluzione ottenuta e la stima fatta precedentemente; se esso è maggiore dell’1% per una j qualsiasi, si passa nuovamente attraverso l’algoritmo, utilizzando come stima al tempo $n + 1$ la soluzione prima trovata e come stima al tempo $n + 1/2$ l’interpolazione lineare tra T^n e T^{n+1} . E’ permesso un massimo di 10 iterazioni, oltre il quale viene presa per buona l’ultima. Si è verificato che la convergenza viene rapidamente raggiunta e raramente si eccede il limite massimo di iterazioni.

4.9 Test di prova del codice

Una volta ultimato, il programma viene testato risolvendo un caso semplice. In particolare, si è considerato il limite non relativistico delle equazioni di raffreddamento, che si ottiene tramite le sostituzioni:

$$e^{2\Phi} \rightarrow 1, \quad \sqrt{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} \rightarrow 1. \quad (4.30)$$

Il sistema si riduce alla seguente equazione:

$$c_V \frac{dT}{dt} = -Q_\nu + \text{div} \left(\kappa \frac{dT}{dr} \right), \quad (4.31)$$

la cui soluzione è un esponenziale nel tempo: $T(t) \propto e^{-\gamma t}$.

Traendo spunto da Gnedin [23], le grandezze rilevanti possono essere parametrizzate come funzioni della sola temperatura:

$$C = C_0 T, \quad \kappa = \kappa_0 T, \quad Q = \epsilon_0 T^2,$$

con $|C_0| = |\kappa_0| = 10^{12}$ e $|\epsilon_0| = 10$.

Il risultato di questo test è mostrato nella figura 4.2, la quale riporta la temperatura superficiale in scala logaritmica in funzione del tempo: come atteso, la relazione trovata è una retta. Il test è stato effettuato per 3 valori differenti del parametro \mathfrak{M} del passo temporale, risultando la soluzione indipendente da esso; per valori di $\mathfrak{M} \gtrsim 2$, l’algoritmo fallisce, dato che viene violata la condizione di Von Neumann sulla stabilità della soluzione; tale violazione si traduce nel fatto che almeno una delle componenti del vettore \vec{R}^n diventa negativa.

Infine, si è provato a variare il parametro f figurante nella definizione del gradiente della luminosità. L’algoritmo funziona per valori $f \gtrsim 0.5$ all’incirca con la stessa precisione, per cui si è deciso di fissare $f = 1$ (fully implicit case).

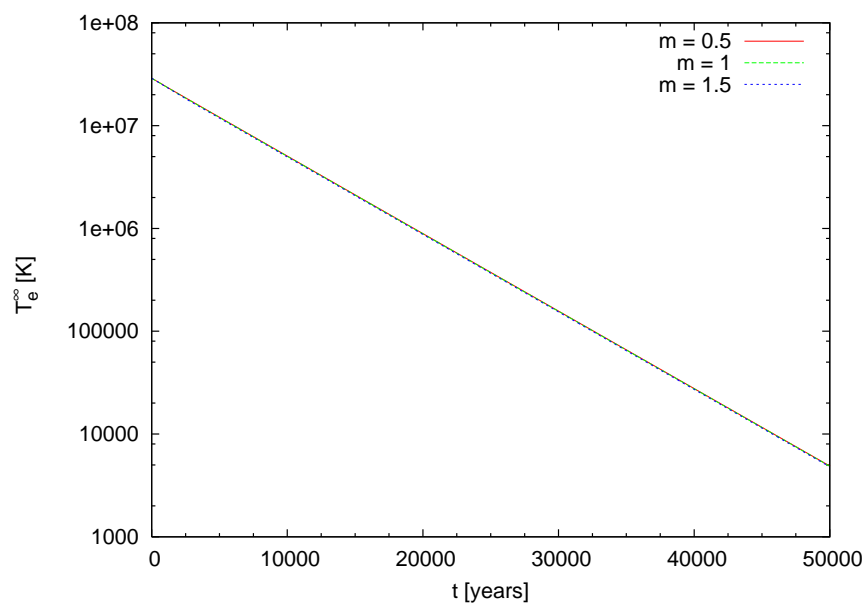


Figura 4.2. Curva di raffreddamento ottenuta nel test di prova per diversi valori del parametro \mathfrak{M} dello step temperale. Si può notare come la precisione della soluzione non sia alterata dalla particolare scelta di tale parametro.

Capitolo 5

Risultati

Dopo essere stato testato, il codice viene utilizzato per risolvere le equazioni di raffreddamento nella loro forma generale. L'equazione di stato utilizzata per il nucleo è la APR2. Verrà confrontato l'output ottenuto per una stella di $\sim 1.4 M_{\odot}$, in cui i processi di emissione dominanti sono quelli Urca modificati, con quello di una stella di $\sim 1.9 M_{\odot}$, al centro della quale la densità è sufficientemente elevata da attivare i processi Urca diretti. Per il primo caso (*slow cooling*) occorrono circa 1000 passi temporali per raggiungere l'età di $\sim 10^7$ anni; per il secondo (*fast cooling*), invece, sono necessari circa 15000 passi per raggiungere la stessa età stellare ed i tempi di calcolo da parte del computer si allungano, non superando comunque la decina di minuti.

5.1 Input fisici

Il confine tra crosta esterna e crosta interna è fissato a $4.3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$; quello tra crosta e core si trova a $1.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. Nella crosta si utilizza l'equazione di stato di Negele e Vautherin [24] con il modello di composizione soffice della materia nello stato fondamentale per descrivere le proprietà dei nuclei atomici [25], che sono assunti essere sferici. Si suppone il core composto da neutroni, protoni ed elettroni e si adotta per esso, come già accennato, l'equazione di stato *stiff* APR2 di Akmal, Pandharipande e Ravenhal.

Le grandezze che figurano come input e che determinano il raffreddamento della stella sono l'emissività neutrinica, la capacità termica e la conduttività termica. I dettagli delle formule utilizzate per il calcolo si trovano nell'appendice C. Per quanto riguarda l'emissività, i processi presi in considerazione sono: i processi Urca diretti e modificati, la bremsstrahlung nn , pp e np nel core; il decadimento del plasmone, lo scattering elettrone-nucleo e la bremsstrahlung nn nella crosta.

Nell'equazione di stato APR2 la densità di soglia per i processi Urca diretti, i più efficaci processi di emissione neutrinica, si situa a $\sim 1.35 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$. Di seguito, verranno presi in considerazione due modelli stellari: il primo con una densità centrale al di sotto di tale soglia, corrispondente ad un modello di *slow cooling*, il secondo con una densità centrale

al di sopra della soglia, caratteristica che ne fa un modello di *fast cooling*. I parametri di struttura che caratterizzano i due modelli stellari sono:

	M (M_{\odot})	R (Km)	ρ_{c14}	M_D (M_{\odot})	R_D (Km)
slow	1.41	11.58	10
fast	1.89	11.20	14	0.04	2.38

dove M_D e R_D sono la massa ed il raggio della regione in cui avvengono i processi Urca diretti.

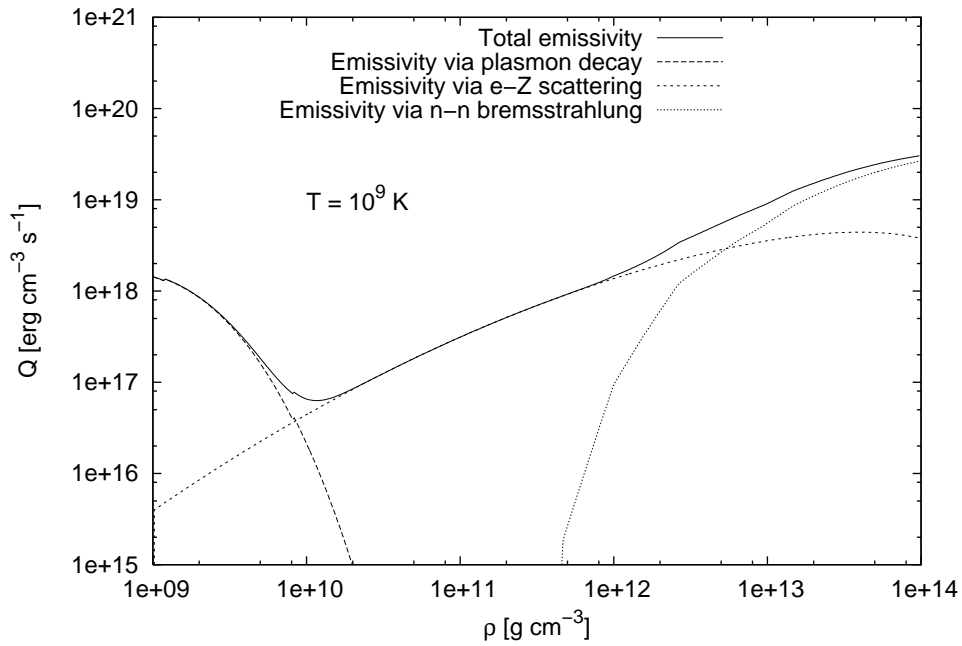


Figura 5.1. Andamento dei processi di emissione neutrinica nella crosta ad una temperatura di $10^9 K$.

Dei processi di emissione neutrinica nel core si è parlato nel capitolo 2. Per quanto riguarda i processi di emissione nella crosta, il loro andamento è riportato nella figura 5.1. Si può vedere come il decadimento del plasmon sia il processo più efficiente nella crosta

esterna ad alta temperatura; al di sotto di $10^9 K$ la sua emissività diminuisce rapidamente, diventando irrilevante; inoltre, al diminuire della temperatura il picco dell'emissione si sposta verso densità sempre più basse. Lo scattering eZ è efficiente attraverso l'intera crosta; la bremsstrahlung nn cresce velocemente nella crosta interna in seguito alla comparsa del gas di neutroni, diventando il processo principale.

La capacità termica nel core è data dalla somma dei contributi degli elettroni, dei protoni e dei neutroni, che possono essere trattati come un gas di particelle degenerate. Nella crosta la capacità è determinata dagli elettroni, dai neutroni liberi e dai nuclei atomici del reticolo coulombiano. L'andamento complessivo della capacità termica è mostrato nella figura 5.2.

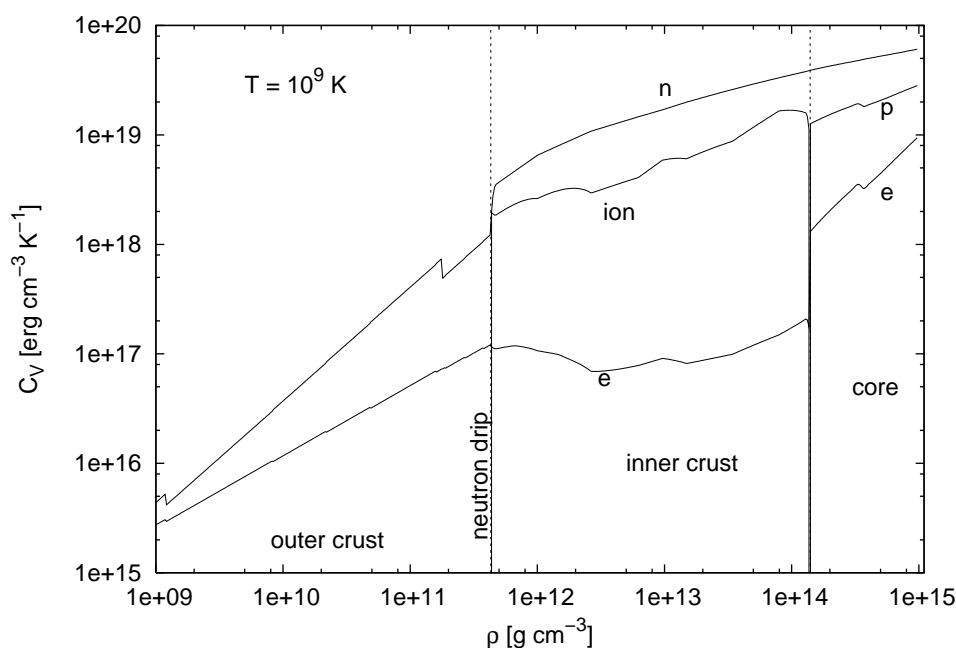


Figura 5.2. Andamento della capacità termica all'interno della stella.

La conduttività termica nel core è data dalla somma delle conduttività degli elettroni e dei neutroni, mentre il contributo protonico è trascurabile; generalmente la componente elettronica domina su quella neutronica. Nella crosta si assume che la conduttività sia essenzialmente dovuta allo scattering degli elettroni con i nuclei atomici. Questi nella crosta esterna possono essere considerati puntiformi, mentre in quella interna viene presa in considerazione la distribuzione di carica finita. Nella figura 5.3 è riportata la conduttività elettronica in funzione della temperatura. Si può notare una forte discontinuità nell'interfaccia tra crosta e core.

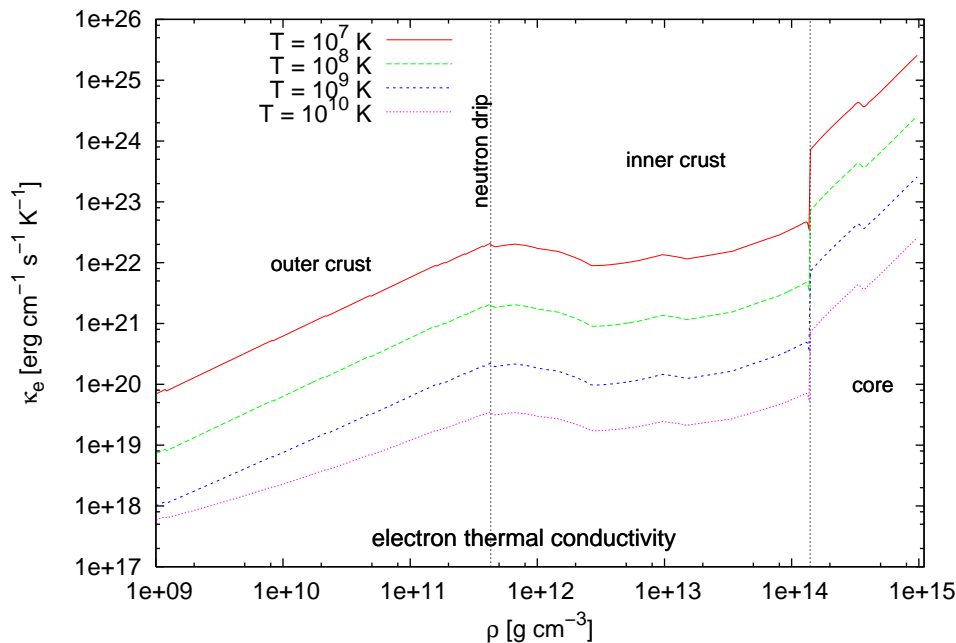


Figura 5.3. Conduttività termica degli elettroni in funzione della densità.

5.2 La curva di raffreddamento

I meccanismi di emissione neutrिनica nel core sono più efficienti dei meccanismi nella crosta di diversi ordini di grandezza. Come conseguenza di questa differente efficienza, subito dopo la formazione della stella di neutroni, il core si trova generalmente ad una temperatura minore del resto della stella, sicuramente minore dell'adiacente crosta interna, ovvero si raffredda più velocemente; il risultato è un'onda di raffreddamento che avanza verso la superficie della stella.

La figura 5.4 mostra le curve di raffreddamento per la superficie corrispondenti ai due modelli stellari di $1.4M_{\odot}$ e $1.9M_{\odot}$. Per la stella di massa maggiore si può notare la ripida pendenza a 10 anni circa, segno dell'arrivo dell'onda di raffreddamento in superficie dopo aver percorso l'interno della stella. Una pendenza simile, dovuta allo stesso fenomeno fisico, ma molto meno pronunciata, è riscontrabile anche nel caso di slow cooling per la stella di massa minore.

L'ulteriore cambio di pendenza che si registra a partire da circa 10^5 anni per lo slow cooling e che è appena accennato per il fast cooling a circa 10^6 anni è dovuto al passaggio dalla fase di raffreddamento neutrिनica (raffreddamento dovuto essenzialmente all'emissione di neutrini) alla fase di raffreddamento fotonico (raffreddamento dovuto essenzialmente all'emissione di fotoni dalla superficie).

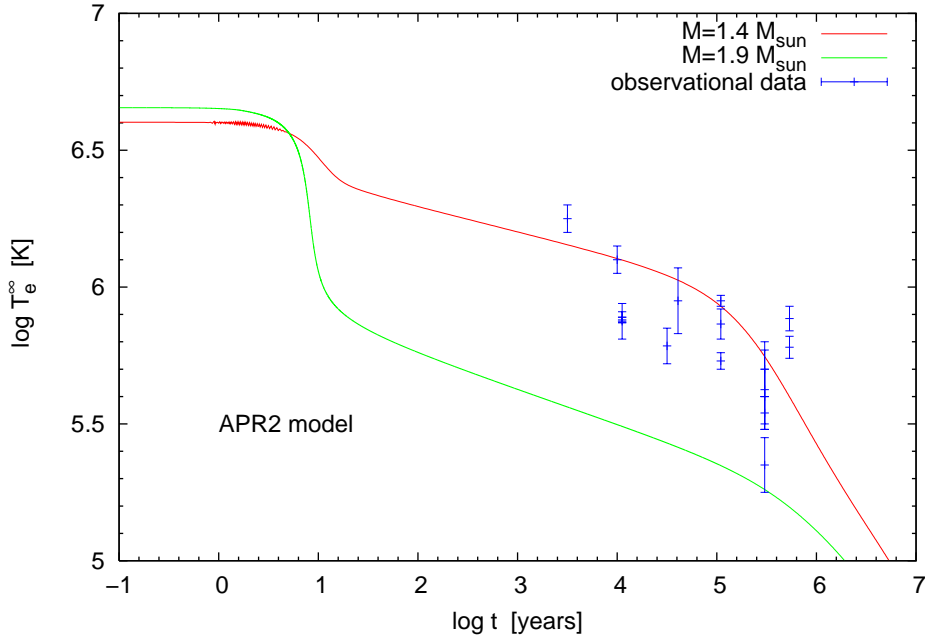


Figura 5.4. Curve di raffreddamento per i modelli stellari con 1.4 e $1.9M_{\odot}$.

Il core e la crosta sono termicamente disaccoppiati: la temperatura superficiale non rispecchia lo stato termico dell'interno della stella; anzi, la temperatura superficiale è principalmente determinata dalle proprietà della materia nella crosta.

Allo scopo di studiare la dipendenza della curva di raffreddamento da queste grandezze, vengono variate a turno emissività, capacità termica e conduttività termica nel caso del slow cooling. Gli output sono mostrati nei grafici 5.5. Rispetto alla curva standard con emissività Q , si è provato a dimezzare e a raddoppiare tale emissività. Si può notare che con un'emissività $0.5Q$ la stella si raffredda più lentamente, mentre con un'emissività $2Q$ la stella si raffredda più velocemente; in ogni caso, a tempi lunghi, le tre curve convergono. La capacità termica influisce più di tutte le altre grandezze sulla curva sia nel breve periodo che a tempi lunghi. Una variazione della conduttività termica si riflette solamente sulla velocità dell'onda di raffreddamento, la quale emerge in superficie ad un tempo minore con una conduttività raddoppiata e ad un tempo maggiore rispetto a quello della curva standard con una conduttività dimezzata. Infine, si è provato a variare queste tre grandezze relativamente alla crosta, per vedere qual è il peso di quest'ultima rispetto al core. Per quanto riguarda l'emissività, la crosta influisce sull'intensità dell'onda di raffreddamento; una volta emersa in superficie l'onda, non si registrano differenze tra le curve. La capacità termica della crosta agisce sull'onda di raffreddamento ed a tempi lunghi; a tempi intermedi

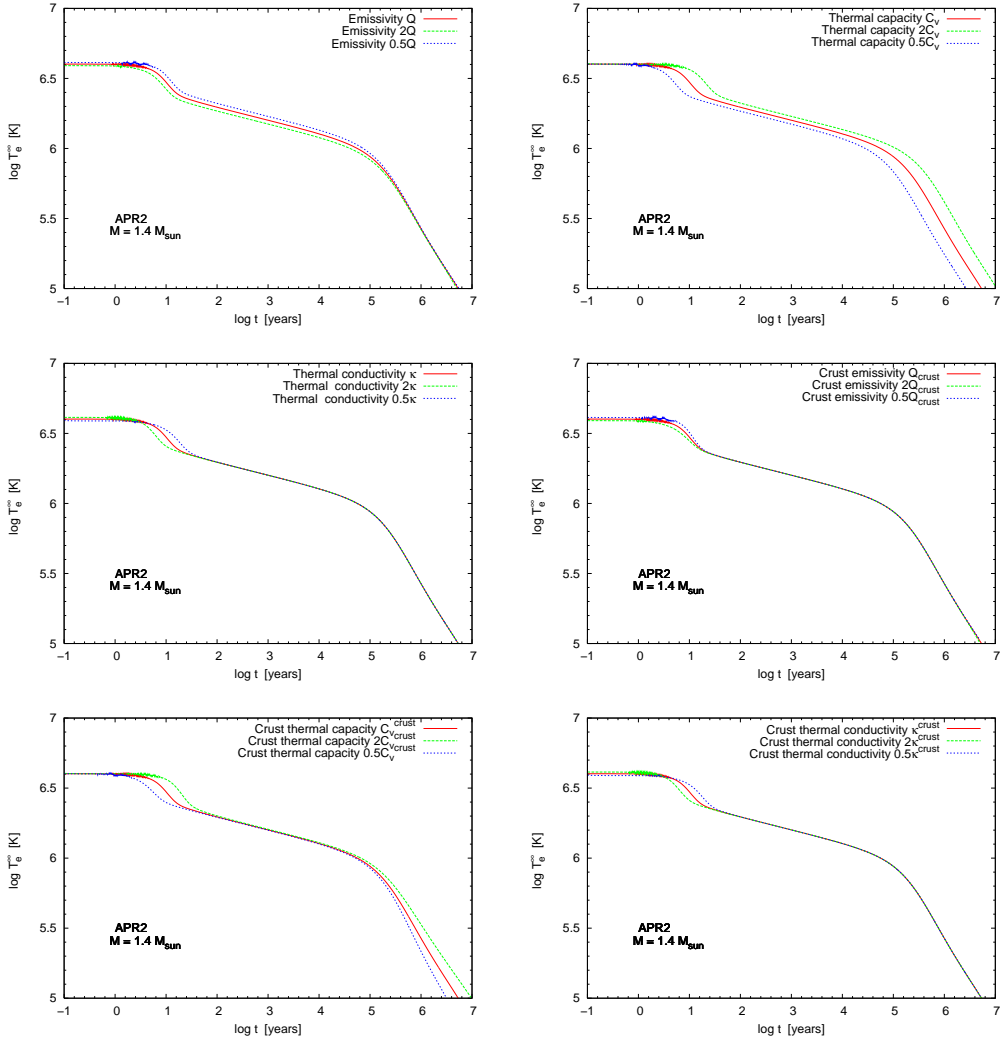


Figura 5.5. Curve di raffreddamento ottenute variando emissività, capacità e conduttività termica sia totale che solamente della crosta per studiarne la dipendenza da queste grandezze nel caso di slow cooling.

domina la capacità del core. La conduttività termica del core è quella dominante ai fini della curva, dato che non si riscontrano sostanziali differenze col caso precedente in cui è variata la conduttività di tutta la stella.

5.3 Il profilo di temperatura interna

La figura 5.6 mostra il profilo di temperatura interna nel caso di slow cooling. Innanzitutto, si può notare come le tre regioni che caratterizzano l'interno della stella, core, crosta interna e crosta esterna, risultino termicamente disaccoppiate fino all'età di circa 1 anno. Nelle prime fasi la regione intorno a $4.3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$, dove appaiono i neutroni liberi, è la più sensibile al raffreddamento; la struttura a scalino che si riscontra nella crosta interna è dovuta alla capacità termica del gas di neutroni. Quando il picco dell'emissione dovuta al decadimento dei plasmoni raggiunge la crosta esterna, la temperatura in essa si abbassa repentinamente. L'isotermia è raggiunta entro 100 anni circa.

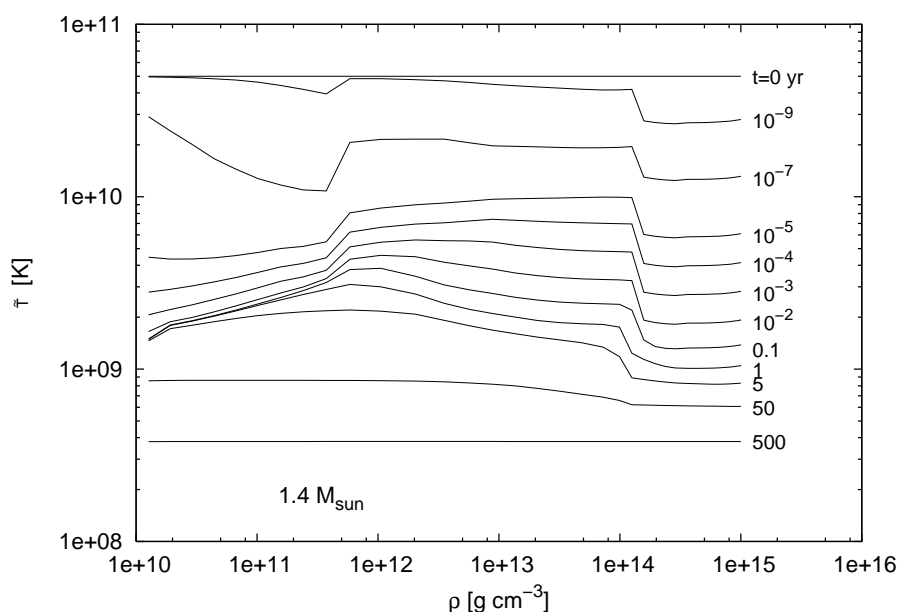


Figura 5.6. Profili di temperatura interna a differenti età stellari per il caso dello slow cooling.

Un discorso analogo può essere fatto nel caso del fast cooling per la figura 5.7, salvo che le regioni termicamente disaccoppiate sono in questo caso 4: occorre aggiungere il core interno, la regione dove sono attivi i processi Urca diretti, che risulta la più fredda di tutte. La stella termalizza in 10 anni circa.

Per concludere, è utile avere una visione complessiva del profilo grazie ad alcuni plot 3D. I grafici 5.8 e 5.9 mostrano l'andamento del profilo di temperatura interna per tempi lunghi rispettivamente per lo slow e per il fast cooling. Infine, le figure 5.10 e 5.11 rappresentano la proiezione di queste superfici sul piano di base densità-tempo; sono riportate alcune

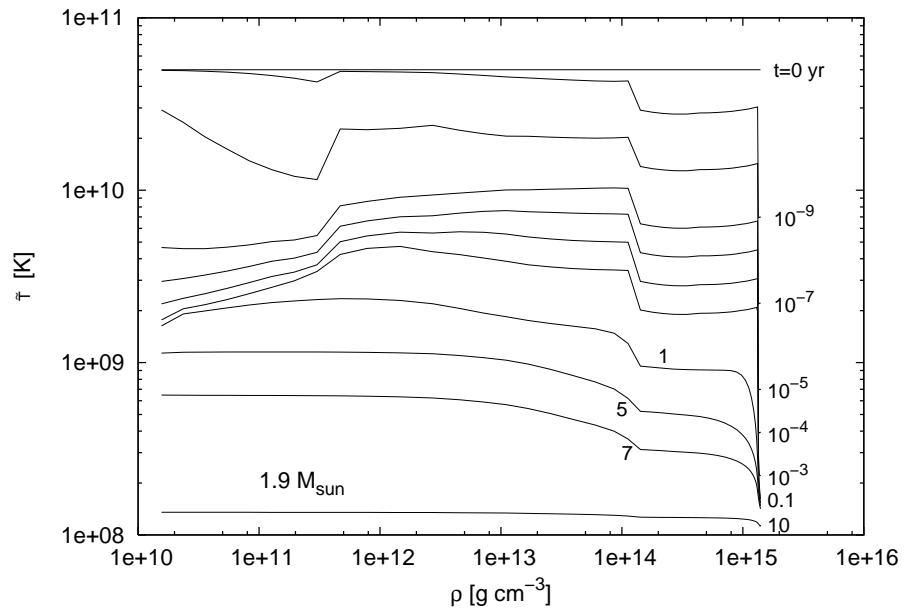


Figura 5.7. Profili di temperatura interna a differenti età stellari per il caso del fast cooling.

curve di livello a temperatura costante che permettono di seguire la termalizzazione della stella.

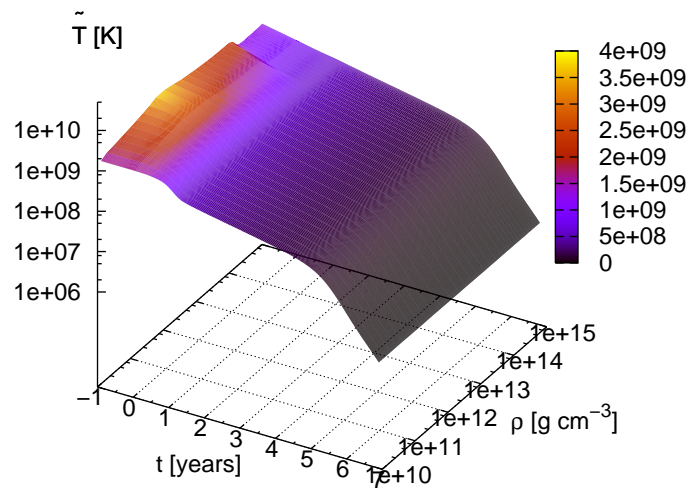


Figura 5.8. Profilo della temperatura interna per il modello di slow cooling con stella di $1.4M_{\odot}$.

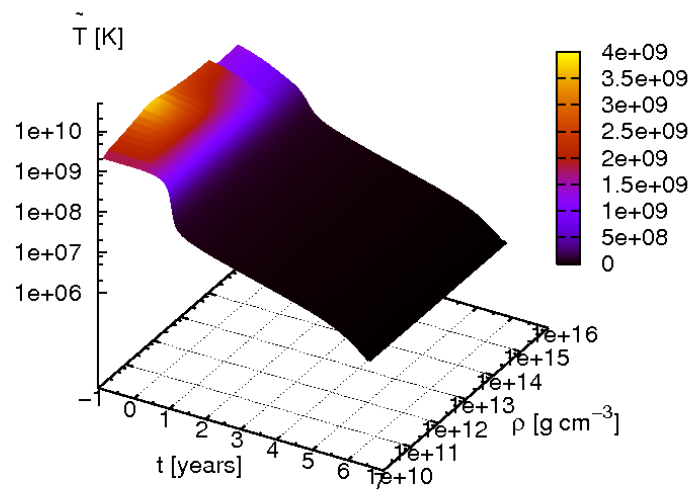


Figura 5.9. Profilo della temperatura interna per il modello di fast cooling con stella di $1.9M_{\odot}$.

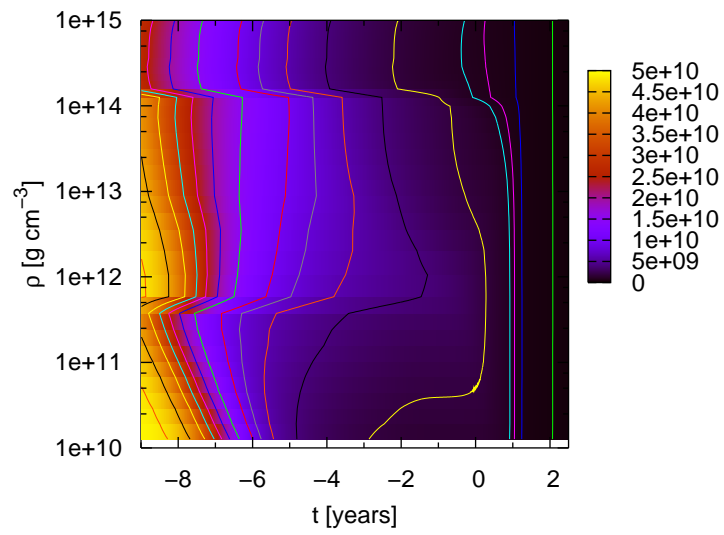


Figura 5.10. Curve di livello di temperatura costante per il modello di slow cooling con stella di $1.4M_{\odot}$.

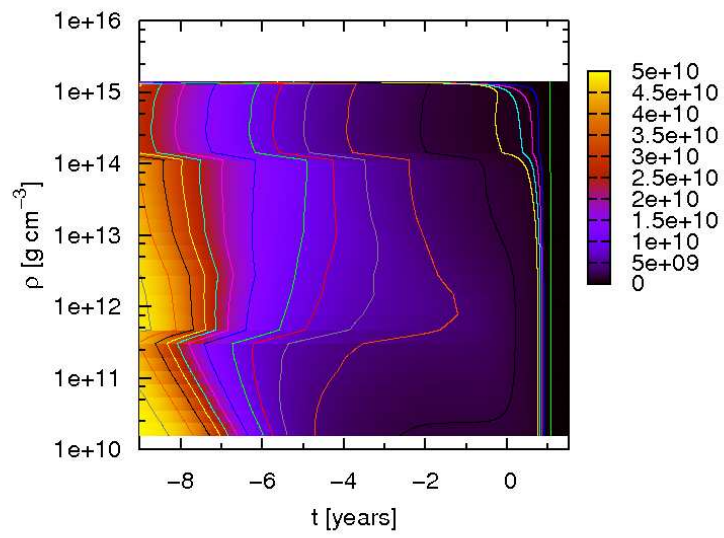


Figura 5.11. Curve di livello di temperatura costante per il modello di fast cooling con stella di $1.9M_{\odot}$.

Capitolo 6

Conclusioni

In questa Tesi abbiamo discusso i principali processi fisici che determinano il raffreddamento delle stelle di neutroni, e sviluppato un programma per la soluzione numerica delle equazioni del bilancio energetico e del trasporto di energia.

La descrizione teorica del raffreddamento delle stelle compatte presenta grande interesse, poiché dal confronto tra i risultati ottenuti e le osservazioni sperimentali è possibile, almeno in linea di principio, ottenere preziose informazioni sulla struttura della materia all'interno della stella. Per esempio, la frazione di protoni determina la soglia del processo URCA diretto, la cui attivazione cambia drasticamente i tempi caratteristici del raffreddamento [26]. Recentemente, è stata anche avanzata l'ipotesi che la curva di raffreddamento contenga informazioni rilevanti sulla possibile esistenza di stelle ibride, caratterizzate dalla presenza di un core di materia di quark al centro della stella, o di stelle *strane*, costituite interamente di materia di quark [27].

“Understanding the interior of neutron stars is a challenge to human intelligence and the study of their thermal evolution is one of the few possible methods through which such understanding (or misunderstanding) can be confronted with observations” [28].

Nella nostra analisi abbiamo adottato un modello secondo il quale la materia stellare consiste unicamente di neutroni, protoni ed elettroni, descritti nell'ambito della teoria a molti corpi non relativistica. L'equazione di stato nella regione di densità sopranucleare ed i rates di emissione URCA diretta sono stati trattati in modo consistente utilizzando i risultati di Akmal, Pandharipande e Ravenhall, ottenuti a partire da un modello dinamico molto realistico [3]. Per altre grandezze rilevanti per il raffreddamento, come la conducibilità termica della materia nucleare ed i rates di emissione dovuta ai processi URCA modificati nel core della stella, abbiamo usato risultati di classici calcoli basati su descrizioni semplificate della dinamica nucleare. I processi della crosta che vengono considerati nell'elaborazione del programma sono trattati a partire da assunzioni - in linea generale - standard.

Le grandezze fisiche delle quali si è accennato costituiscono gli input del programma per la risoluzione delle equazioni di raffreddamento. L'algoritmo, detto di *Crank-Nicholson* [29, 17], su cui il programma si basa, manipola le due equazioni differenziali iniziali in

modo da ricondurle ad un'equazione matriciale tridiagonale facilmente risolvibile. Abbiamo potuto così riprodurre il raffreddamento di una stella di neutroni per un modello già sufficientemente studiato da diversi autori, in modo da verificare la bontà del lavoro svolto.

Come ultima notazione, vogliamo sottolineare che uno studio esaustivo dell'argomento che abbiamo affrontato, per il quale è necessario acquisire concetti e strumenti sviluppati in settori diversi della Fisica, non può essere portato a termine nell'ambito della stesura di una Tesi di Laurea Specialistica.

Lo sviluppo futuro del progetto iniziato con questa Tesi prevede la soluzione delle equazioni di raffreddamento a partire da una descrizione completamente consistente, cioè ottenuta da un'unico modello dinamico, della materia nucleare. Tale descrizione è possibile grazie all'uso di un'interazione efficace tra i nucleoni, che è stata già utilizzata per il calcolo dell'equazione di stato e dei coefficienti di trasporto, come il primo coefficiente di viscosità [30, 31] e la conducibilità termica. La stessa interazione sarà utilizzata per il calcolo dei rates di emissione dei neutrini nel formalismo descritto in [32].

Appendice A

Phase-space decomposition

Di seguito viene svolto il calcolo dell'emissività neutrinica per i processi nucleonici Urca diretti utilizzando il metodo di *decomposizione dello spazio delle fasi*.

Grazie alla forte degenerazione dei nucleoni e degli elettroni, il contributo principale all'integrale dell'emissività

$$Q^D = 2 \int \frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} dW_{i \rightarrow f} f_n(1 - f_p)(1 - f_e), \quad (\text{A.1})$$

viene da quegli stati di momento che formano una sottile corona sferica intorno alla superficie di Fermi. Di conseguenza, si può porre $|\mathbf{p}| = p_F$ all'interno dell'integrale e lo scambio di energia nella reazione è $\sim T$. Dato che l'energia del neutrino è di ordine $E_\nu \sim T$, il corrispondente impulso, anch'esso d'ordine $p_\nu \sim T$, è molto più piccolo degli altri impulsi e può essere trascurato all'interno della delta associata alla conservazione dell'impulso. Quindi,

$$\begin{aligned} dW_{i \rightarrow f} \frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} &= \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{12}} \delta(E_n - E_p - E_e - E_\nu) \delta(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e) \\ &\quad \times |M_{fi}|^2 4\pi E_\nu^2 dE_\nu \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^* dE_j d\Omega_j. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Introduciamo le nuove variabili $x_\nu = \frac{E_\nu}{T}$ e $x_j = \frac{E_j - \mu_j}{T}$ e, notando che $1 - f(x_j) = f(-x_j)$, eseguiamo la trasformazione $x_j \rightarrow -x_j$ in modo da poter sostituire $1 - f(x_j)$ con $f(x_j)$ nel caso del protone e dell'elettrone. Inoltre, definiamo

$$A = 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 \delta(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e). \quad (\text{A.3})$$

La A.1 diventa:

$$Q^D = \frac{2}{(2\pi)^8} |M_{fi}|^2 A \left[T^7 \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \left(\int_{-\frac{\mu_1}{T}}^\infty \int_{-\infty}^{\frac{\mu_2}{T}} \int_{-\infty}^{\frac{\mu_3}{T}} dx_j f_j \right) \right. \\ \left. \times \frac{1}{T} \delta(x_1 + x_2 + x_3 - x_\nu) \right] \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^*. \quad (\text{A.4})$$

Nel caso di forte degenerazione, si può sostituire $\frac{\mu_j}{T}$ con ∞ commettendo al più un errore esponenzialmente piccolo. Infine, si ottiene:

$$Q^D = \frac{2}{(2\pi)^8} |M_{fi}|^2 T^6 A I \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^*, \quad (\text{A.5})$$

avendo definito

$$I = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \left[\prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^\infty dx_j f_j \right] \delta(x_1 + x_2 + x_3 - x_\nu). \quad (\text{A.6})$$

A.1 Calcolo di A

Innanzitutto occorre scrivere la delta associata alla conservazione dell'impulso in coordinate sferiche. A tale scopo, si utilizza una proprietà fondamentale della delta di Dirac:

$$\int \delta(\mathbf{a} - \mathbf{b}) d\mathbf{a} = \int \delta(a_x - b_x) da_x \int \delta(a_y - b_y) da_y \int \delta(a_z - b_z) da_z = 1.$$

Se si vuole che questa proprietà valga anche in coordinate sferiche, cioè che

$$\int \delta_s(\mathbf{a} - \mathbf{b}) d\mathbf{a} = \int \delta_s(\mathbf{a} - \mathbf{b}) a^2 da d\Omega_a = 1,$$

si deve avere:

$$\delta_s(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \delta(a - b) \frac{\delta(\Omega_a - \Omega_b)}{a^2}.$$

Nel caso in considerazione otteniamo:

$$A = 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 \delta(p_n - |\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_e|) \frac{\delta(\Omega_1 - \Omega_{2+3})}{p_n^2} \\ = 4\pi \int d\Omega_2 d\Omega_3 \frac{\delta(p_n - |\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_e|)}{p_n^2}. \quad (\text{A.7})$$

La delta radiale può essere trasformata in una delta su una delle variabili angolari. Per prima cosa, riscriviamo la delta come

$$\delta(f(\cos \theta_2)) = \delta[p_n - (p_p^2 + p_e^2 + 2p_p p_e \cos \theta_2)^{\frac{1}{2}}],$$

avendo scelto l'asse z per \mathbf{p}_p lungo \mathbf{p}_e . Lo zero della funzione f si ha in corrispondenza di $\cos \theta_2 = \frac{p_n^2 - p_p^2 - p_e^2}{2p_p p_e} = a$, mentre $|f'(a)| = \frac{p_p p_e}{p_n}$. Dunque,

$$\frac{\delta(p_n - |\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_e|)}{p_n^2} = \frac{1}{p_n^2} \frac{1}{|f'(a)|} \delta(\cos \theta_2 - a) = \frac{1}{p_n p_p p_e} \delta(\cos \theta_2 - a)$$

e sostituendo nella A.7 otteniamo

$$A = \frac{32\pi^3}{p_{Fn} p_{Fp} p_{Fe}} \Theta_{npe}, \quad (\text{A.8})$$

dove Θ_{npe} rappresenta la condizione triangolare sugli impulsi di Fermi.

A.2 Calcolo di I

Riscriviamo la I come

$$I = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 J(x_\nu) \quad (\text{A.9})$$

con

$$J(x_\nu) = \int_{-\infty}^\infty \prod_{j=1}^3 dx_j (1 + e^{x_j})^{-1} \delta\left(\sum_{j=1}^3 x_j - x_\nu\right) \quad (\text{A.10})$$

e calcoliamo prima la J .

Riscriviamo la delta in forma esponenziale, $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{izx}$ e, sostituendo nella precedente, abbiamo:

$$\begin{aligned} J(x_\nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dz \int_{-\infty}^\infty \prod_{j=1}^3 dx_j (1 + e^{x_j})^{-1} e^{iz(x_j - x_\nu)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dz e^{-izx_\nu} \left(\int_{-\infty}^\infty dx (1 + e^x)^{-1} e^{izx} \right)^3 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dz e^{-izx_\nu} [f(z)]^3 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

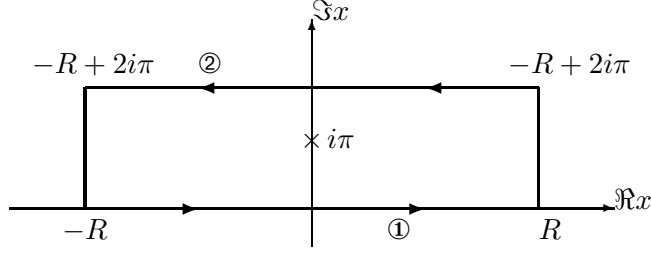
con

$$f(z) = \int_{-\infty}^\infty dx (1 + e^x)^{-1} e^{izx}. \quad (\text{A.12})$$

Calcoliamo $f(z)$.

All'uppo, si consideri l'integrale

$$K = \oint dx (1 + e^x)^{-1} e^{izx}$$


 Figura A.1. Cammino di integrazione di K .

lungo il cammino chiuso mostrato nella figura A.1

Per $R \rightarrow \infty$ i contributi laterali sono trascurabili. Lungo l'asse reale ①, $K = f(z)$. Lungo il cammino ②, $K = \int_{-\infty}^{\infty} dx (1 + e^{\Re x + 2i\pi})^{-1} e^{iz(\Re x + 2i\pi)} = e^{-2\pi z} f(z)$. Dunque,

$$K = f(z) - e^{-2\pi z} f(z) = (1 - e^{-2\pi z}) f(z).$$

Si può calcolare K col metodo dei residui:

$$\begin{aligned} \text{Res } K(z) &= \lim_{x \rightarrow i\pi} (x - i\pi) \frac{e^{izx}}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow i\pi} (x - i\pi) \frac{e^{izx}}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x - i\pi)^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow i\pi} - \frac{e^{izx}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (x - i\pi)^{(n-1)}} = -e^{-\pi z} \end{aligned}$$

e $K(z) = (1 - e^{-2\pi z}) f(z) = -2i\pi e^{-\pi z}$. Da quest'ultima espressione ricaviamo $f(z)$:

$$f(z) = \frac{\pi}{i \sinh \pi z}. \quad (\text{A.13})$$

Arrivati a questo punto, J assume la seguente forma:

$$J(x_\nu) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty - i\epsilon}^{\infty - i\epsilon} dz e^{-izx_\nu} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi z} \right)^3, \quad (\text{A.14})$$

dove si è inserito $-i\epsilon$ per ricordare che z ha una piccola quantità immaginaria, avendo la funzione integranda un polo d'ordine 3 in zero. Occorre trovare un opportuno cammino chiuso di integrazione. A tale scopo, operando la trasformazione $z = z' - i$, J diventa:

$$J = \frac{e^{-x_\nu}}{2i\pi} \int_{-\infty - i\epsilon + i}^{\infty - i\epsilon + i} dz e^{-izx_\nu} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi z} \right)^3. \quad (\text{A.15})$$

Sommando la A.14 e la A.15, si ottiene:

$$\begin{aligned} (1 + e^{x_\nu}) J &= -\frac{1}{2i\pi} \left[\int_{-\infty - i\epsilon}^{\infty - i\epsilon} + \int_{-\infty - i\epsilon + i}^{\infty - i\epsilon + i} \right] dz e^{-izx_\nu} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi z} \right)^3 \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \oint dz e^{-izx_\nu} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi z} \right)^3. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

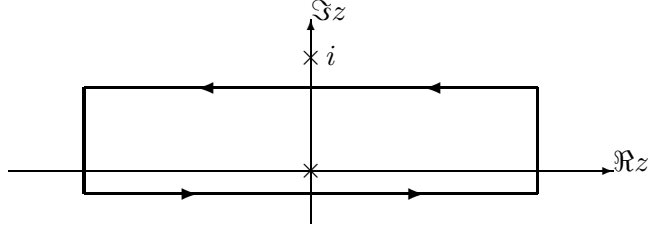


Figura A.2. Cammino di integrazione dell'eq. A.16.

Abbiamo ottenuto un integrale lungo il cammino chiuso mostrato nella figura A.2. Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
 (1+e^{x_\nu}) J &= -\text{Res} \left[e^{-izx_\nu} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi z} \right)^3 \right]_{z=0} \\
 &= -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 e^{-izx_\nu} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi z} \right)^3 \right] \\
 &= -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left\{ -x_\nu^2 e^{-izx_\nu} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi z} \right)^3 + 6ix_\nu e^{-izx_\nu} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi z} \right)^3 \left(\pi z^3 \frac{\cosh \pi z}{\sinh \pi z} - z^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left[6z - 18\pi z^2 \frac{\cosh \pi z}{\sinh \pi z} + 3\pi^2 z^3 \frac{1}{(\sinh \pi z)^2} + 9\pi^2 z^3 \left(\frac{\cosh \pi z}{\sinh \pi z} \right)^2 \right] \frac{\pi^3 e^{-izx_\nu}}{(\sinh \pi z)^3} \right\}
 \end{aligned}$$

Consideriamo la prima linea di quest'ultima espressione. Sviluppando al prim'ordine il $\frac{\cosh \pi z}{\sinh \pi z} \approx \frac{1}{\pi z}$ del secondo termine, questo si annulla; il primo termine, una volta effettuato il limite, diventa uguale a $-x_\nu^2$.

Veniamo adesso alla seconda linea. Occorre svilupparla fino al termine d'ordine zero. In tal modo, i suoi termini diventano:

1. $\frac{6\pi^3 z}{(\pi z)^3 \left[1 + \frac{(\pi z)^2}{2} \right]} \approx \frac{6}{z^2} \left(1 - \frac{1}{2} \pi^2 z^2 \right) = \frac{6}{z^2} - 3\pi^2;$
2. $\frac{3\pi^5 z^3}{(\pi z)^5 \left[1 + \frac{5(\pi z)^2}{6} \right]} \approx \frac{3}{z^2} - \frac{5}{2} \pi^2;$
3. $\frac{9\pi^5 z^3}{(\pi z)^5 \left[1 + \frac{5(\pi z)^2}{6} \right]} (1 + \pi^2 z^2) \approx \frac{9}{z^2} + \frac{3}{2} \pi^2;$
4. $-\frac{18\pi^4 z^2}{(\pi z)^4 \left[1 + \frac{2(\pi z)^2}{3} \right]} \left(1 + \frac{1}{2} \pi^2 z^2 \right) \approx -\frac{18}{z^2} + 3\pi^2.$

Sommando i quattro termini rimane $-\pi^2$. La A.16 diventa $(1 + e^{x_\nu}) J(x_\nu) = \frac{x_\nu^2 + \pi^2}{2}$, in

modo che

$$J(x_\nu) = \frac{\pi^2 + x_\nu^2}{2(1 + e^{x_\nu})}. \quad (\text{A.17})$$

Per risolvere, infine, l'integrale $I = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 J(x_\nu)$ si può fare riferimento al [33], formula 3.411, secondo la quale

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{e^{px} + 1} dx = (1 - 2^{1-2n}) \left(\frac{2\pi}{p} \right)^{2n} \frac{|B_{2n}|}{4n},$$

dove B_n sono i numeri di Bernoulli. Nel caso in considerazione, $p = 1$ e $n = 2,3$ e, di conseguenza, $B_4 = -\frac{1}{30}$ e $B_6 = \frac{1}{42}$. Risolvendo, si ottiene:

$$I = \frac{457\pi^6}{5040}. \quad (\text{A.18})$$

Sostituendo quanto trovato nella 3.5, si ritrova l'emissività 3.10.

Appendice B

Emissività: dalle unità naturali al sistema CGS

Si considerino innanzitutto i fattori di conversione delle varie unità di misura:

$$\begin{aligned}
 cm^{-1} &= 0.197327 \times 10^{-10} MeV & fm^{-1} &= 197.327 MeV \\
 s^{-1} &= 6.58 \times 10^{-22} MeV & erg &= 6.241 \times 10^5 MeV \\
 10^9 K &= 8.617 \times 10^{-2} MeV
 \end{aligned}$$

Da questa tabella si ricava:

$$erg\ cm^{-3}\ s^{-1} = 3.155 \times 10^{-48} MeV^5. \quad (B.1)$$

Tornando all'emissività, la si può riscrivere in modo da mettere in evidenza l'ordine di grandezza:

$$\begin{aligned}
 Q_D &\approx \frac{457\pi}{10080} G^2 (1 + 3g_A^2) m_n^2 \left(\frac{m_n^* m_p^*}{m_n^2} \right) p_{F_e} T^6 \Theta_{npe} \\
 &= \left[\frac{457\pi}{10080} G^2 (1 + 3g_A^2) (3\pi^2 n_0)^{\frac{1}{3}} m_n^2 T_{10^9} \right] \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{m_n^* m_p^*}{m_n^2} T_9^6 \Theta_{npe},
 \end{aligned}$$

avendo approssimato $m_e^* \approx p_{F_e} \approx (n_e)^{\frac{1}{3}}$; T_{10^9} è l'equivalente in MeV della temperatura di $10^9 K$ e n_0 la densità dei nuclei. Sostituendo $G^2 = G_F^2 \cos^2 \theta_c = (1.166 \times 10^{-11} MeV^{-2})^2 \times 0.949$ e $g_A = -1.267$ e manipolando l'espressione, si ottiene:

$$Q_D \approx 1.28 \times 10^{-20} \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{m_n^* m_p^*}{m_n^2} T_9^6 \Theta_{npe} \quad [MeV^5].$$

Sfruttando la B.1, si passa al sistema CGS:

$$Q_D \approx 4.08 \times 10^{27} \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{m_n^* m_p^*}{m_n^2} T_9^6 \Theta_{npe} \quad [\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}] .$$

Appendice C

Input del programma

Il programma per la risoluzione delle equazioni di raffreddamento per una stella di neutroni richiede in entrata una grande varietà di processi fisici, l'emissività neutrinica, la capacità termica e la conduttività termica.

C.1 Equazioni TOV

Le proprietà statiche della stella sono descritte dalle equazioni di struttura globale. Il codice ha bisogno della massa, della densità e del potenziale gravitazionale in funzione del raggio, $m(r), \rho(r)$ e $\Phi(r)$; tali grandezze sono fornite come output del programma `TOV_last.f`, nel quale si è scelto di utilizzare l'equazione di stato APR2 per una stella di massa 1.4 masse solari circa ed il metodo di Runge-Kutta al quart'ordine con passo d'integrazione variabile per la risoluzione delle equazioni differenziali.

C.2 Emissività neutrinica

L'energia interna è dissipata sotto forma di neutrini, liberi di scappare via dalla stella senza alcuna interazione e prodotti da numerosi processi che differiscono nel core e nella crosta a causa del differente stato in cui si trova la materia nelle due regioni.

Nel core hanno luogo i processi Urca diretti, se attivati, e quelli Urca modificati, la bremsstrahlung tra nucleoni e l'emissione di coppie di Cooper in presenza di superfluidità:

$$Q^{core} = Q_{dir} + Q_{mod,n} + Q_{mod,p} + Q_{nn} + Q_{pp} + Q_{np} + Q_{cooper} . \quad (C.1)$$

Nella crosta, i processi da considerare sono la bremsstrahlung elettrone-ione del reticolo e neutrone-neutrone, l'annichilazione di coppie $e^+ e^-$, il decadimento dei plasmoni e l'emissione delle coppie di Cooper:

$$Q^{crust} = Q_{eZ} + Q_{nn}^{crust} + Q_{pair} + Q_{plasma} + Q_{cooper} . \quad (C.2)$$

Nel codice elaborato si è trascurato il contributo dell'annichiazione $e^+ e^-$ e si è supposto la materia non essere allo stato superfluido e l'assenza di un campo magnetico, $B = 0$.

C.2.1 Processi Urca

L'emissività neutrinica dovuta ai processi Urca diretti è data da

$$Q_{dir} = 4.0 \times 10^{27} \frac{m_n^* m_p^*}{m_n m_p} \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{1/3} T_9^6 \mathcal{R}_{dir} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{C.3})$$

\mathcal{R}_{dir} è il fattore di riduzione dovuto alla superfluidità e viene da noi posto uguale a 1 (no superfluidity). Affinché venga rispettata la conservazione del momento, occorre che $n_e \geq n_n/8$; tale condizione non viene mai verificata nel caso in considerazione di una stella di $1.4M_{sun}$ con equazione di stato APR2, essendo la densità centrale $\rho_0 = 1.0 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, mentre il processo si accende a circa $1.2 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$. Implementata nella routine `dirurca.f`.

Per quanto riguarda i processi Urca modificati, si ha un'emissività per la branca neutrinica ed un'altra per quella protonica:

$$Q_{mod,n} = 8.55 \times 10^{21} \left(\frac{m_n^*}{m_n} \right)^3 \left(\frac{m_p^*}{m_p} \right) \left(\frac{n_p}{n_0} \right)^{1/3} T_9^8 \alpha_n \beta_n \mathcal{R}_{mod,n} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{C.4})$$

$$Q_{mod,p} = 8.53 \times 10^{21} \left(\frac{m_p^*}{m_p} \right)^3 \left(\frac{m_n^*}{m_n} \right) \left(\frac{n_p}{n_0} \right)^{1/3} T_9^8 \alpha_p \beta_p F_p \mathcal{R}_{mod,p} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{C.5})$$

dove $F_p = (n_e^{1/3} + n_p^{1/3} - n_n^{1/3})^2 / (8 n_e^{1/3} n_p^{1/3})$, $\alpha_n = \alpha_p = 1.76 - 0.63 (n_n/n_0)^{-2/3}$, $\beta_n = \beta_p = 0.68$. La branca protonica è permessa per $n_e \geq n_n/8$, condizione che è soddisfatta. Anche qui, i fattori di riduzione R sono posti uguali ad 1, allo stesso modo che in tutti gli altri processi. Implementata nella routine `modurca.f`.

Vedi [34] pagg. 60-72.

C.2.2 Bremsstrahlung tra nucleoni nel core

Lo scattering tra nucleoni dà origine alle seguenti emissività:

$$Q_{nn} = 7.4 \times 10^{19} \left(\frac{m_n^*}{m_n} \right)^4 \left(\frac{n_n}{n_0} \right)^{1/3} T_9^8 \alpha_{nn} \beta_{nn} \mathcal{N}_\nu \mathcal{R}_{nn} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{C.6})$$

$$Q_{pp} = 7.4 \times 10^{19} \left(\frac{m_n^*}{m_p} \right)^4 \left(\frac{n_p}{n_0} \right)^{1/3} T_9^8 \alpha_{pp} \beta_{pp} \mathcal{N}_\nu \mathcal{R}_{pp} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{C.7})$$

$$Q_{np} = 1.5 \times 10^{20} \left(\frac{m_n^* m_p^*}{m_n m_p} \right)^2 \left(\frac{n_p}{n_0} \right)^{1/3} T_9^8 \alpha_{np} \beta_{np} \mathcal{N}_\nu \mathcal{R}_{np} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{C.8})$$

con $\mathcal{N}_\nu = 3$ numero di specie neutriniche, $\alpha_{nn} = 0.59$, $\alpha_{np} = 1.06$, $\alpha_{pp} = 0.11$, $\beta_{nn} = 0.56$, $\beta_{np} = 0.66$, $\beta_{pp} = 0.7$. Implementata nella routine `brembar.f`.

Vedi [34] pagg. 76-80 e [20].

C.2.3 Bremsstrahlung e-Z nella crosta

L'emissività dovuta allo scattering degli elettroni con i nuclei atomici disposti in modo da formare un reticolo nella crosta (stato solido) è calcolata grazie al seguente fit:

$$\log Q_{eZ} = 11.204 + 7.304\tau + 0.2976r - 0.37\tau^2 - 0.188\tau r - 0.103r^2 + 0.0547\tau^2 r - 6.77 \log(1 + 0.228\rho/\rho_0) \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{C.9})$$

dove $\tau = \log T_8$ e $r = \log \rho_1/2$. Il fit è valido tra $10^9 < \rho < 1.5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ e tra $5 \times 10^7 < T < 2 \times 10^9 \text{ K}$ (Potrebbero esserci dei problemi dato che partiamo da $T_0 = 5 \times 10^{10} \text{ K}$?). Implementata nella routine `bremez.f`.

Vedi [34] pagg. 30-41.

C.2.4 Decadimento del plasmone

Per l'emissività dovuta al decadimento dei plasmoni presenti nel plasma di elettroni, viene utilizzato il fit dovuto a D.G. Yakovlev:

$$Q_{pair} = Q_c \frac{C_V^2}{96\pi^4\alpha} \left(\frac{T}{T_r} \right)^9 (16.23f_p^6 + 4.604f_p^{7.5}) e^{-f_p}, \quad (\text{C.10})$$

dove

$$Q_c = \frac{G_F^2}{\hbar} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^9 \approx 1.023 \times 10^{23} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (\text{C.11})$$

e $T_r = m_e c^2/k_B \approx 5.93 \times 10^9 \text{ K}$ è la temperatura relativistica dell'elettrone. Infine

$$f_p = \frac{\hbar\omega_{pe}}{k_B T} = \frac{\hbar\sqrt{4\pi e^2 n_e/m_e^*}}{k_B T} \quad (\text{C.12})$$

è il parametro del plasma elettronico. Implementata in `plasmon.f`. Vedi [34] pagg. 21-25.

C.2.5 Bremsstrahlung n-n nella crosta

L'emissività del processo di scattering tra due neutroni che compongono il gas di neutroni presente nella crosta interna è data da:

$$Q_{nn}^{crust} = 7.5 \times 10^{19} \left(\frac{m_n^*}{m_n} \right)^4 \left(\frac{n_n}{n_0} \right)^{1/3} \alpha_{nn} \beta_{nn} \mathcal{N}_\nu T_9^8 f_v \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{C.13})$$

dove f_v è la frazione di spazio dai neutroni liberi e

$$\alpha_{nn} = 1 - \frac{3}{2} u \arctan\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{u^2}{2(1+u^2)}, \quad (\text{C.14})$$

con $u = m_\pi c/(2p_{Fn})$. Implementata in `bremnn.f`.

Vedi [34] pagg. 47-49 e [20].

C.3 Capacità termica

Altro input necessario al programma è la capacità termica per unità di volume. Questa assume una forma relativamente semplice nel core, dove la materia si trova in equilibrio beta e può essere trattata come un gas di elettroni relativistici degeneri e di barioni non relativistici degeneri:

$$C_v^{core} = C_e + C_p + C_n \quad (C.15)$$

con

$$C_e = \frac{k_B^2}{3\hbar^3} T m_e^* p_{Fe} \quad (C.16)$$

$$C_n = \frac{k_B^2}{3\hbar^3} T m_n^* p_{Fn} \quad (C.17)$$

$$C_p = \frac{k_B^2}{3\hbar^3} T m_p^* p_{Fp} \quad (C.18)$$

dove $m_e^* = m_e \sqrt{1 + p_{Fe}^2 / (m_e c)^2}$ è la massa efficace dell'elettrone e m_n^* e m_p^* , massa efficace rispettivamente del neutrone e del protone, sono calcolate mediante interpolazione di una tabella di valori.

Per la crosta occorre distinguere tra crosta esterna ed interna. La prima di queste è composta da un reticolo di ioni allo stato solido immerso in un gas di elettroni degeneri; dunque

$$C^{ex_crust} = C_e + C_i^{crust} \quad (C.19)$$

La crosta interna presenta, in aggiunta agli ioni ed agli elettroni, anche un gas di neutroni liberi di densità crescente verso l'interno a scapito dei nuclei atomici; quindi,

$$C^{in_crust} = C_e + C_i^{crust} + C_n \quad (C.20)$$

La capacità termica degli ioni è calcolata nella seguente maniera:

$$C_v^{ion} = \begin{cases} \frac{3}{2} k_B & \text{se } \Gamma \leq 1, \\ 3 k_B f(T/\Theta_D) & \text{se } 1 < \Gamma \leq 150, \\ \frac{3}{2} k_B \left[1 + \frac{\log \Gamma}{\log 150} \right] & \text{se } \Gamma > 150, \end{cases} \quad (C.21)$$

dove Γ è il parametro d'ordine, $\Theta_D = 3.48 \times 10^3 \rho^{1/3} Z/A K$ è la temperatura di Debye, e

$$f(x) = \begin{cases} 0.8 \pi^4 x^3 & \text{se } x \leq 0.15, \\ 1 - 0.05 x^{-2} & \text{se } x \geq 4, \\ 1.70 x + 0.0083 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (C.22)$$

è un'approssimazione della funzione di Debye.

Implementata nella routine `heatcap.f`. Vedi [29].

Come si vede, per determinare la C_v^{ion} è necessario conoscere il tipo di nuclei atomici presente nella crosta, ovvero Z e A , nonché la densità degli ioni stessi e del gas di neutroni. Seguendo il modello di Negele e Vautherin, queste informazioni sono tabulate in [35] pag. 304 ed in [24] pag. 311.

C.4 Conduttività termica

La conduttività termica nel core è data dalla somma della conduttività degli elettroni e dei neutroni, essendo quella protoni trascurabile.

Per quanto riguarda gli elettroni, si ha:

$$\kappa_e \approx 1.70 \times 10^{24} C T_8 \left(\frac{\tau_e}{10^{-15} s} \right) \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{2/3} \text{ erg cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (\text{C.23})$$

C è un fattore di correzione e può essere fittato da

$$C(\lambda) = 1 - 0.1146(\lambda - 3) - 0.007162(\lambda - 3)^2, \quad -1 \leq \lambda \leq 3 \quad (\text{C.24})$$

e

$$\lambda = 1 - 2 p_{Fe}^2 \left[\sum_{i=e,p} \left(m_i^{*2} c^2 + \frac{1}{2} \frac{p_{Fi}^4}{m_i^{*2} c^2} \right) \mathcal{R}_i \right]^{-1}. \quad (\text{C.25})$$

$\tau_e = 1/(\nu_{eb} + \nu_{ee})$ è il tempo di rilassamento; ν_{eb} e ν_{ee} sono rispettivamente le frequenze di collisione elettrone-barioni carichi (protoni) ed elettrone-elettrone:

$$\nu_{eb} \approx 1.15 \times 10^{12} \left(\frac{p_{Fe}}{q_0} \right)^3 \left(\frac{m_b^*}{m_p} \right)^2 \left(\frac{n_0}{n_e} \right) T_8^2 \mathcal{R}_b s^{-1}, \quad (\text{C.26})$$

$$\nu_{ee} \approx 3.58 \times 10^{11} \left(\frac{p_{Fe}}{q_0} \right)^3 \left(\frac{n_0}{n_e} \right)^{1/3} T_8^2 s^{-1}, \quad (\text{C.27})$$

con

$$\frac{q_0^2}{p_{Fe}^2} \approx 0.00929 \left[1 + \left(\frac{n_\mu}{n_e} \right)^{1/3} + 2.83 \sum_b \left(\frac{m_b^*}{m_p} \right) \left(\frac{n_b n_0}{n_e^2} \right)^{1/3} Z_b \right]. \quad (\text{C.28})$$

Implementata in `ethermcond.f`. Vedi [36] pagg. 710-711.

I neutroni sono più difficili da trattare. Ci atteniamo al fit illustrato in [37].

$$\kappa_n \approx 7.2 \times 10^{23} T_8 \mathcal{R}_C^2(y_n) \left(\frac{m_n}{m_n^*} \right) \left(\frac{10^{15} s^{-1}}{\nu_{nn} + \nu_{np}} \right) \left(\frac{n_n}{n_0} \right) \text{ erg cm}^{-1} s^{-1} K^{-1}. \quad (\text{C.29})$$

$\mathcal{R}_C(y_n)$ è il solito fattore di superfluidità da porre uguale a 1. Le fequenze di collisione n-n e n-p sono:

$$\begin{aligned} \nu_{nn} = 3.48 \times 10^{15} \left(\frac{m_n^*}{m_n} \right)^3 T_8^2 \left\{ S_{n2}^{(0)} K_{n2} \mathcal{R}_{n2}(y_n) \right. \\ \left. + 3S_{n1}^{(0)} K_{n1} [\mathcal{R}_{n1}(y_n) - \mathcal{R}_{n2}(y_{n2})] \right\} s^{-1}, \quad (\text{C.30}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{np} \approx 3.48 \times 10^{15} \left(\frac{m_n^*}{m_n} \right) \left(\frac{m_p^*}{m_p} \right)^2 T_8^2 \left\{ S_{p2}^{(0)} K_{p2} \mathcal{R}_{p2}(y_n, y_p) \right. \\ \left. + 0.5 K_{p1} S_{p1}^{(0)} [3\mathcal{R}_{p1}(y_n, y_p) - \mathcal{R}_{p2}(y_n, y_p)] \right\} s^{-1}, \quad (\text{C.31}) \end{aligned}$$

$S^{(0)}_\alpha$ sono le sezioni d'urto dei processi di scattering per particelle libere, mentre K_α sono dei fattori di correzione per tenere conto degli effetti del mezzo.

I fit per gli integrali nel vuoto sono:

$$\begin{aligned} S_{n1}^{(0)} &= \frac{14.57}{k_{Fn}^{1.5}} \frac{1 - 0.0788 k_{Fn} + 0.0883 k_{Fn}^2}{1 - 0.1114 k_{Fn}} \text{ mb}, \\ S_{n2}^{(0)} &= \frac{7.880}{k_{Fn}^2} \frac{1 - 0.2241 k_{Fn} + 0.2006 k_{Fn}^2}{1 - 0.1742 k_{Fn}} \text{ mb}, \\ S_{p1}^{(0)} &= \frac{0.8007 k_{Fp}}{k_{Fn}^2} (1 + 31.28 k_{Fp} - 0.0004285 k_{Fp}^2 + 26.85 k_{Fn} + 0.08012 k_{Fn}^2) \\ &\quad \times (1 - 0.5898 k_{Fn} + 0.2368 k_{Fn}^2 + 0.5838 k_{Fp}^2 + 0.884 k_{Fn} k_{Fp})^{-1} \text{ mb}, \\ S_{p2}^{(0)} &= \frac{0.3830 k_{Fp}^4}{k_{Fn}^{5.5}} (1 + 102.0 k_{Fp} + 53.91 k_{Fn}) \\ &\quad \times (1 - 0.7087 k_{Fn} + 0.2537 k_{Fn}^2 + 9.404 k_{Fp}^2 - 1.589 k_{Fn} k_{Fp})^{-1} \text{ mb}, \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

mentre per i fit dei fattori di correzione nel mezzo si ha:

$$\begin{aligned}
 K_{n1} &= \left(\frac{m_N}{m_n^*}\right)^2 (80.4583 + 0.892 u^2 - 0.5497 u^3 - 0.06205 k_{Fp} \\
 &\quad + 0.04022 k_{Fp}^2 + 0.2122 u k_{Fp}), \quad u = k_{Fn} - 1.665, \\
 K_{n2} &= \left(\frac{m_N}{m_n^*}\right)^2 (0.4891 + 1.111 u^2 - 0.2283 u^3 + 0.01589 k_{Fp} \\
 &\quad - 0.02099 k_{Fp}^2 + 0.2773 u k_{Fp}), \quad u = k_{Fn} - 1.556, \\
 K_{p1} &= \left(\frac{m_N}{m_p^*}\right)^2 (0.04377 + 1.100 u^2 + 0.1180 u^3 + 0.1626 k_{Fp} \\
 &\quad + 0.3871 u k_{Fp} - 0.2990 u^4), \quad u = k_{Fn} - 2.126, \\
 K_{p2} &= \left(\frac{m_N}{m_p^*}\right)^2 (0.0001313 + 1.248 u^2 + 0.2403 u^3 + 0.3257 k_{Fp} \\
 &\quad + 0.5536 u k_{Fp} - 0.3237 u^4 + 0.09786 u^2, k_{Fp}), \quad u = k_{Fn} - 2.116.
 \end{aligned} \tag{C.33}$$

m_N è la massa media del nucleone. Implementata in `nthermcond.f`.

La conduttività termica degli elettroni nella crosta è stata calcolata in [38] e in [25] e presenta un fit molto complesso. Consideriamo innanzitutto le collisioni elettrone-ione:

$$\kappa_{ei}^{crust} = \frac{\pi^2 k_B^2 T n_e}{3 m_e^* \nu_{ei}}, \quad \nu_{ei} = \frac{4 Z m_e^* c^2 \alpha^2}{3 \pi \hbar} \Lambda_{ei}, \tag{C.34}$$

Λ_{ei} è detto logaritmo di Coulomb. Definiamo preliminarmente alcune grandezze:

- $k_{Fe} = (3\pi^2 n_e)^{1/3}$ è il numero d'onda di Fermi dell'elettrone;
- $\beta_r = v_{Fe}/c$, $v_{Fe} = \hbar k_{Fe}/m_e^*$ è la velocità di Fermi;
- $T_p = \hbar/\sqrt{4\pi n_i Z^2 e^2/M}/k_B$, è la temperatura del plasma d ioni, con $n_i = n_e/Z$ e m densità e massa degli ioni;
- $x_r = \hbar k_F/(m_e c)$;
- $x_{nuc} = r_{nuc}/a_i$, dove $a_i = (4\pi n_i/3)^{-1/3}$ è il raggio della sfera contenente lo ione e r_{nuc} è il raggio della carica associata allo ione: nella crosta esterna, dove il nucleo atomico può essere considerato puntiforme, $r_{nuc} = 1.15 A^{1/3} fm$; nella crosta interna, considerando gli effetti di nucleo finito, $r_{nuc} = 1.83 Z^{1/3} fm$;
- $\Gamma = (Ze)^2/(a_i k_B T)$ è il parametro di accoppiamento di Coulomb degli ioni;
- $\eta = T/T_p$;
- $s_e = k_{TF}^2/(2k_{Fe})^2 = \alpha/(\pi\beta_r)$ è il parametro di screening dell'elettrone;

- $s_D = (2k_F e r_D)^{-2}, r_D = a_i / \sqrt{e\Gamma}$ è la lunghezza di screening di Debye per un plasma ideale di ioni;
- $u_{-1} \approx 3$ e $u_{-2} \approx 13$ sono il primo e il secondo momento negativo della frequenza dei fononi del reticolo di Coulomb;
- $\beta_Z = \pi \alpha Z \beta_r$;
- $s_i = s_D (1 + 0.06\Gamma) e^{-\sqrt{\Gamma}}$;
- $s = q_s^2 / (2k_F)^2 = (s_i + s_e) e^{-\beta_Z}$;
- $w = (u_{-2} / s_D) (1 + \beta_Z / 3)$;
- $w_1 = 14.73 x_{nuc}^2 (1 + \sqrt{x_{nuc}} Z / 13) (1 + \beta_Z / 3)$;
- $G_\sigma = (1 + 0.0361 Z^{-1/3} \eta^2)^{-1/2} (1 + 0.122 \beta_Z^3)$, dove σ sta per conduttività elettrica;
- $G_\kappa = G_\sigma + \frac{0.0105 \eta}{(\eta^2 + 0.0081)^{3/2}} (1 + \beta_r^3 \beta_Z) (1 - Z^{-1}) (1 + x_{nuc}^2 \sqrt{2Z})$, dove κ sta per conduttività termica ;
- $D = \exp[-0.42 \sqrt{x_r / (AZ)} u_{-1} \exp(-9.1\eta)]$.

A questo punto il logaritmo di Coulomb può scriversi come:

$$\Lambda_{ei}^{\sigma, \kappa} = [\Lambda_0(s; w + w_1) - \Lambda_0(s, w_1)] G_{\sigma, \kappa} D, \quad (C.35)$$

dove

$$\Lambda_0(s, w) = \Lambda_1(s, w) - \beta_r^2 \Lambda_2(s, w). \quad (C.36)$$

$\Lambda_1(s, w)$ e $\Lambda_2(s, w)$ sono così definiti:

$$\Lambda_1(s, w) = \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{s+1}{s} + \frac{s}{s+1} (1 - e^{-w}) - (1 + sw) e^{sw} \right. \\ \left. \times [E_1(sw) - E_1(sw + w)] \right\}, \quad (C.37)$$

$$\Lambda_2(s, w) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{-w} - 1 + w}{w} - \frac{s^2}{s+1} (1 - e^{-w}) - 2s \ln \frac{s+1}{s} \right. \\ \left. + s(2 + sw) e^{sw} [E_1sw - E_1sw + w] \right\}, \quad (C.38)$$

con $E_1(x) = \int_x^\infty y^{-1} e^{-y} dy$ è un integrale esponenziale standard che è possibile trovare in Abramowitz. Tuttavia, per $s \rightarrow 0, w \rightarrow 0$ o $w \rightarrow \infty$ si possono verificare dei problemi numerici; per questo motivo, vengono utilizzate le seguenti espressioni asintotiche:

- se $s \ll 1$ e $sw \ll 1$:

$$\Lambda_1(s, w) = \frac{1}{2} [E_1(w) + \ln w + \gamma], \quad (\text{C.39})$$

$$\Lambda_2(s, w) = \frac{e^{-w} - 1 + w}{2w}, \quad (\text{C.40})$$

con γ costante di Eulero;

- se $w \ll 1$:

$$\Lambda_1(s, w) \approx w \left(\frac{2s+1}{2s+2} - s \ln \frac{s+1}{s} \right), \quad (\text{C.41})$$

$$\Lambda_2(s, w) \approx w \left(\frac{1-3s-6s^2}{4s+4} + \frac{3}{2} \ln \frac{s+1}{s} \right); \quad (\text{C.42})$$

- se $w \gg 1$ e $sw \gg 1$:

$$\Lambda_1(s, w) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{s+1}{s} - \frac{1}{s+1} \right), \quad (\text{C.43})$$

$$\Lambda_2(s, w) = \frac{2s+1}{2s+2} - s \ln \frac{s+1}{s}. \quad (\text{C.44})$$

A basse temperature i processi umklapp vengono congelati ed i processi normali diventano dominanti; di conseguenza, per $T_u \sim T_p Z^{1/3} \alpha / (3\beta_r)$ il formalismo precedente non è più valido e deve essere sostituito da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{ei}^{\sigma} \\ \Lambda_{ei}^{\kappa} \end{array} \right\} = \frac{\alpha_{\zeta} x_r^{1/2}}{A^{1/2} Z} \left\{ \begin{array}{l} (4/3)(\alpha/\beta_r)\eta^5 \\ \eta^3 \end{array} \right\}, \quad (\text{C.45})$$

dove $\alpha_{\zeta} \approx 50$.

Interpolando il logaritmo di Coulomb alle alte temperature $\Lambda_{ei,high}^{\sigma,\kappa}$ dato dalla C.35 ed il logaritmo di Coulomb alle basse temperature $\Lambda_{ei,low}^{\sigma,\kappa}$ dato dalla C.45, si ha:

$$\Lambda_{ei}^{\sigma,\kappa} = \Lambda_{ei,high}^{\sigma,\kappa} \exp(-T_u/T) + \Lambda_{ei,low}^{\sigma,\kappa} [1 - \exp(-T_u/T)]. \quad (\text{C.46})$$

Veniamo, infine, al contributo fornito dallo scattering e-e:

$$\nu_{ee} = \frac{3\alpha^2 (k_B T)^2}{2\pi^3 \hbar m_e^* c^2} \left(\frac{2k_F}{k_{TF}} \right)^3 J(x_r, y), \quad (\text{C.47})$$

con $y = \sqrt{3} T_{pe}/T$ e $T_{pe} = (\hbar/k_B) \sqrt{4\pi e^2 n_e / m_e^*}$ è la temperatura del plasma di elettroni, e

$$J(x_r, y) \approx \left(1 + \frac{6}{5x_r^2} + \frac{2}{5x_r^4} \right) \left[\frac{y^3}{3(1 + 0.07414y)^3} \times \ln \left(1 + \frac{2.81}{y} - \frac{0.81}{y} \beta_r^2 \right) + \frac{\pi^5}{6} \frac{y^4}{(13.91 + y)^4} \right]. \quad (\text{C.48})$$

Implementata in `crthermcond.f`.

C.5 Relazione tra temperatura interna e temperatura superficiale

La griglia spaziale su cui si svolge l'integrazione non è definita fino alla superficie della stella, ma si ferma ad un certo valore del raggio, R_b , in corrispondenza del quale la densità è $\rho_b \sim 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$, che separa l'interno della stella dallo strato esterno isolante. La relazione che lega T_b , la temperatura in R_b , a T_e , la temperatura alla superficie, è:

$$T_e = 0.87 \times 10^6 (g_{14})^{1/4} (T_b/10^8 \text{ K})^{0.55}, \quad (\text{C.49})$$

dove g_{14} è l'accelerazione di gravità in superficie $g = GM e^{-\Phi(R)}/R^2$ in unità di $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. Vedi [22] pagg. 184-185.

C.6 Descrizione dei file che compongono il programma

<code>brembar.f</code>	emissività dovuta al bremsstrahlung di coppie di barioni nel core
<code>bremep.f</code>	emissività dovuta al bremsstrahlung coulombiano $e-p$ e $e-e$
<code>bremez.f</code>	emissività dovuta allo scattering elettrone-ione nella crosta
<code>bremnn.f</code>	emissività dovuta al bremsstrahlung di coppie di neutroni nella crosta interna
<code>crank-b.f</code>	file principale per la risoluzione delle equazioni di raffreddamento
<code>crank-c.f</code>	file principale per la risoluzione delle equazioni di raffreddamento nel caso semplice per testare la correttezza del codice
<code>crank.f</code>	file principale per "sperimentazioni"
<code>crthermcond.f</code>	conduttività termica nella crosta dovuta alle collisioni $e-i$ e $e-e$
<code>dirurca.f</code>	emissività dovuta ai processi Urca diretti
<code>ethermcond.f</code>	conduttività termica dovuta agli elettroni nel core
<code>expint.f</code>	contiene una funzione che calcola l'integrale esponenziale $E_n(x)$
<code>fractionpe.f</code>	contiene due subroutine: <code>fracionpe</code> calcola la frazione di neutroni, protoni ed elettroni, mentre <code>effecmass</code> calcola la massa effettiva del nucleone
<code>crustmatter.f</code>	calcola i parametri dello stato della materia nella crosta
<code>guessinput.f</code>	routine che gestisce i vari file per il calcolo dell'emissività e della capacità termica
<code>heatcap.f</code>	calcola la capacità termica
<code>modurca.f</code>	calcola l'emissività dei processi Urca modificati
<code>nthermcond.f</code>	calcola la conduttività termica dei neutroni nel core
<code>plasmon.f</code>	calcola l'emissività dovuta al decadimento dei plasmoni
<code>subroutine.f</code>	contiene alcune routine di interpolazione e di risoluzione di una matrice tridiagonale
<code>subroutine2.f</code>	gestisce il calcolo dell'emissività totale
<code>thermcond.f</code>	gestisce il calcolo della conduttività termica totale

C.7 Descrizione dei file di input

0507_pnm_bis.data	tabella per il calcolo della massa efficace dei nucleoni
above_drip.in	tabella contenente i dati per lo stato della materia nella crosta interna secondo il modello di Negele e Vautherin
asym_apr3.out	tabella per il calcolo della frazione di neutroni, protoni ed elettroni nel core secondo l'equazione di stato APR2
below_drip.in	tabella contenente i dati per lo stato della materia nella crosta esterna
tov.in	tabella contenente gli output delle equazioni di struttura

Bibliografia

- [1] G. Gamow. *My world line*. Viking, New York, 1970.
- [2] G. Gamow and M. Schönberg. *Physical Review*, 59:539, 1941.
- [3] A. Akmal, V.R. Pandharipande, and D.G. Ravenhall. *Physical Review C*, 58:1804, 1998.
- [4] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. Wiley-Interscience, New York, 1983.
- [5] R. Kippenhahn and A. Weigert. *Stellar structure and evolution*. Springer, Berlin, 1994.
- [6] J.M. Irvine. *Neutron Stars*. Clarendon Press, Oxford, 1978.
- [7] S. Chandrasekhar. *Astrophysical Journal*, 74:81, 1931.
- [8] <http://www.ioffe.ru/astro/stars/>.
- [9] M. Baldo, G.F. Burgio, and H.-J. Schulze. *Physical Review C*, 61:055801, 2000.
- [10] A.B. Migdal, E.E. Saperstein, M.A. Troitsky, and D.N. Voskresensky. *Physics Reports*, 192:179, 1990.
- [11] C.H. Lee. *Physics Reports*, 275:255, 1996.
- [12] J.C. Collins and M.J. Perry. *Physical Review Letters*, 34:1353, 1975.
- [13] B.K. Harrison, K.S. Thorne, M. Wakano, and J.A. Wheeler. *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*. The University of Chicago Press, Chicago, 1965.
- [14] K.S. Thorne. *Proc. Int. School of Phys. Enrico Fermi, Course 35*. Academic Press, New York, 1966.
- [15] J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff. *Physical Review*, 55:374, 1939.
- [16] R.C. Tolman. *Physical Review*, 55:364, 1939.
- [17] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [18] L.D. Landau and E.M. Lifšits. *Fisica statistica - Parte prima*. Editori Riuniti, Roma, 1986.
- [19] F. Weber. *Pulsars as astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*. IOP Publishing, Bristol & Philadelphia, 1999.
- [20] B.L. Friman and O.V. Maxwell. Neutrino emissivities of neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 232:541–557, Settembre 1979.
- [21] D.G. Yakovlev and K.P. Levenfish. Modified urca process in neutron star cores. *Astronomy and Astrophysics*, 297:717–726, 1995.

-
- [22] D.G. Yakovlev and C.J. Pethick. Neutron star cooling. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 42:169–210, 2004.
- [23] Oleg Y. Gnedin. Neutron star evolution code. <http://www.astro.lsa.umich.edu/~ognedin/ns/ns.html>.
- [24] J.W. Negele and D. Vautherin. Neutron star matter at sub-nuclear densities. *Nuclear Physics A*, 207:298–320, 1973.
- [25] Dmitry G. Yakovlev Oleg Y. Gnedin and Alexander Y. Potekhin. Thermal relaxation in young neutron stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 324:725–736, 2001.
- [26] C. J. Pethick. Cooling of neutron stars. *Reviews of Modern Physics*, 64(4):1133–1140, Ottobre 1992.
- [27] D. Blaschke. *Physical Review Letters*, 2007.
- [28] D. Page. *The Astrophysical Journal*, 1998.
- [29] Kenneth A. Van Riper. Neutron star thermal evolution. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 75:449–462, Febbraio 1991.
- [30] M. Valli. *Shear Viscosity of neutron matter from realistic nucleon-nucleon interactions*. PhD thesis, Università “La Sapienza”, Roma, 2008.
- [31] O. Benhar and M. Valli. *Physical Review Letters*, 2007.
- [32] I. Moretti. Emissione di neutrini... Master’s thesis, Università “La Sapienza”, Roma, 2005.
- [33] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, seventh edition, 2007.
- [34] O. Y. Gnedin D. G. Yakovlev, A. D. Kaminker and P. Haensel. Neutrino emission from neutron stars. *Physical Report*, 66(1), 2001.
- [35] Christopher Pethick G. Baym and Peter Sutherland. The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models. *The Astrophysical Journal*, 170:299–317, Dicembre 1971.
- [36] O.Y. Gnedin and D.G. Yakovlev. Thermal conductivity of electrons and muons in neutron star cores. *Nuclear Physics A*, 582:697–716, 1995.
- [37] P. Haensel D.A. Baiko and D.G. Yakovlev. Thermal conductivity of neutrons in neutron star cores. *Astronomy and Astrophysics*, 2001. arXiv:astro-ph/0105105v1.
- [38] P. Haensel A.Y. Potekhin, D.A. Baiko and D.G. Yakovlev. Transport properties of degenerate electrons in neutron star envelope and white dwarf cores. *Astronomy and Astrophysics*, 1999. arXiv:astro-ph/9903127v3.
- [39] James M. Lattimer, C. J. Pethick, Madappa Prakash, and Pawel Haensel. Direct urca process in neutron stars. *Physical Review Letters*, 66(21):2701–2704, Maggio 1991.
- [40] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, 1965. New York.