



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

“Sapienza” Università di Roma
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

Scaling nei sistemi di molti corpi e struttura del protone

Tesi di Laurea Specialistica in Fisica

Relatore
Dr. Omar Benhar

Laureando:
Francesca Aceti

Anno Accademico 2009-2010

Indice

Introduzione	1
1 Risposta lineare e scaling in y	7
1.1 Risposta lineare di un sistema di molti corpi	7
1.2 Approssimazione Impulsiva e scaling in y	8
1.2.1 Funzione di risposta in Approssimazione Impulsiva	8
1.2.2 Scaling	17
2 Scaling in y nella diffusione su nuclei	21
2.1 Sezione d'urto elettrone-nucleo in approssimazione impulsiva	22
2.2 Scaling in y della sezione d'urto elettrone-nucleo	25
3 Scaling in x nella diffusione su protoni	31
3.1 Scattering Elastico Elettrone-Protone	32
3.2 Scattering Anelastico Elettrone-Protone	35
3.3 Scaling di Bjorken	40
3.4 Il Modello a Partoni	43
4 Scaling in y nella diffusione su protoni	49
4.1 Il protone come sistema di molti corpi	49
4.2 Scaling in \tilde{y} nel limite di Bjorken	52
4.3 Scaling in y per un nucleone legato	54
Conclusioni	62
A Scattering elettrone-muone	65

Bibliografia

70

INDICE

Introduzione

La diffusione di elettroni su bersagli nucleari è un mezzo molto potente per analizzare la struttura interna della materia. In questi esperimenti, un fascio di elettrone incide su un nucleo in quiete e vengono misurate soltanto le variabili cinematiche (cioè energia ed angolo di scattering) dell'elettrone diffuso, mentre lo stato finale del bersaglio non è rivelato. La struttura interna del nucleo viene sondata attraverso lo scambio di un fotone virtuale di impulso $q \equiv (\nu, \mathbf{q})$, con $Q^2 = -q^2$ e $Q^2 > 0$. Il potere risolutivo della sonda è dato dalla lunghezza d'onda Q^{-1} del fotone e il livello di struttura che viene rivelato cresce quindi con Q^2 , che dipende dall'energia E e dall'angolo di scattering θ dell'elettrone.

Per valori bassi di Q^2 ($\sim 0.01 \text{ GeV}^2$), la sonda non è sensibile alla struttura interna del nucleo, che viene quindi visto nella sua interezza e rincula mantenendo la sua identità. L'elettrone è diffuso elasticamente e l'energia trasferita è data da $\nu = \nu_{el} = Q^2/2M_A$, dove M_A è la massa del nucleo. Al crescere di Q^2 , il fatto che il nucleo abbia dimensione finita fa sì che la sezione d'urto elastica decresca rapidamente a causa della presenza di un fattore di forma.

Per valori di Q^2 a partire da $\sim 0.1 \text{ GeV}^2$ però, la sonda ha la risoluzione spaziale necessaria per rivelare la *struttura interna del nucleo* e il processo più probabile diventa lo scattering sui suoi costituenti. La sezione d'urto è a questo punto dominata dalla diffusione elastica dell'elettrone sui singoli nucleoni, con $\nu = Q^2/2M$ e M massa del nucleone. Anche in questo caso, all'aumentare ancora di Q^2 , i fattori di forma dei nucleoni decrescono rapidamente, finché non si è al di sopra dei 0.5 GeV^2 e si entra nella regione in cui viene rivelata la *struttura interna del nucleone*, detta del *deep inelastic scattering* (DIS).

Fu proprio una serie di esperimenti di DIS su bersagli di idrogeno, condotti all'acceleratore lineare di Stanford (SLAC) alla fine degli anni Sessanta, a rivelare

la struttura interna dei nucleoni. Le funzioni di struttura nella sezione d'urto di diffusione sui nucleoni mostrarono infatti il fenomeno dello *scaling*, mettendo in evidenza la natura puntiforme dei loro costituenti.

Quando infatti un bersaglio è composto da costituenti puntiformi, la sezione d'urto diventa funzione di una sola variabile anzichè delle due variabili indipendenti impulso \mathbf{q} ed energia ν trasferiti. Questo indica che ci troviamo nel regime cinematico in cui lo scattering sul bersaglio composto è dato dalla somma incoerente dei processi di scattering elementare che coinvolgono i singoli costituenti puntiformi. Negli esperimenti di SLAC, le funzioni di struttura mostravano scaling nella variabile di Bjorken $x = Q^2/2m$, dove m è la massa del costituente del nucleone [1]. Tale variabile trova la sua interpretazione fisica nel contesto del modello a partoni di Feynman in uno specifico sistema di riferimento per il nucleone, detto *infinite momentum frame*, nel quale x è proprio la frazione di impulso del nucleone trasportata dal partone che interagisce con la sonda.

Il manifestarsi dello scaling riflette l'esistenza di un meccanismo di reazione dominante, cioè la diffusione incoerente sui singoli costituenti del bersaglio, e non richiede alcuna ipotesi sulla dinamica interna del bersaglio stesso.

Di conseguenza è possibile osservare il fenomeno di scaling in una grande varietà di processi in cui una sonda interagente rilascia grande impulso \mathbf{q} ad un sistema di molti corpi.

Nell'ambito della teoria a molti corpi la variabile di scaling, chiamata comunemente y , ha, al contrario della variabile di Bjorken, interpretazione fisica immediata nel riferimento di quiete del bersaglio. Inoltre, definendo opportunamente una funzione di scaling, è possibile ricavare importanti informazioni sulla dinamica interna del bersaglio, che sarebbe impossibile estrarre direttamente dalla sezione d'urto senza attente considerazioni sulla natura dell'interazione tra sonda e bersaglio.

In questa Tesi, verranno discussi alcuni importanti esempi di sistemi che presentano scaling in y e si cercherà di generalizzare la trattazione al caso del DIS di elettroni da parte di protoni.

Nel Capitolo 1, sarà introdotto il formalismo necessario al calcolo della sezione d'urto di diffusione su un sistema di molti corpi nel caso più semplice di interazione scalare tra sonda e bersaglio. Si analizzerà quindi il caso dell'elio liquido, la cui funzione di risposta, misurata attraverso lo scattering inclusivo di neutroni termici,

mostra scaling, diventando funzione di una sola variabile che lega impulso \mathbf{q} ed energia ν trasferiti.

Il Capitolo 2 sarà dedicato alla diffusione su bersagli nucleari mentre, nel Capitolo 3, verrà derivato lo scaling della sezione d'urto di diffusione profondamente anelastica elettrone-protone nella variabile di Bjorken x .

Nell'ultimo capitolo, si cercherà di generalizzare il formalismo utilizzato nei Capitoli 1 e 2 allo scattering profondamente anelastico elettrone-nucleone. Vedremo che anche in questo caso, sotto le opportune condizioni cinematiche, il regime di scaling emerge in modo naturale ed è possibile estrarre dalla sezione d'urto una funzione di scaling $F(y)$ che, al contrario delle funzioni di struttura, coincide con la risposta del protone e contiene quindi importanti informazioni sulla sua struttura interna. Estenderemo infine l'analisi al caso di un protone legato e, grazie alla definizione della nuova variabile di scaling e al formalismo della teoria a molti corpi in approssimazione impulsiva, sarà possibile spiegare alcune caratteristiche della sezione d'urto di diffusione su nuclei.

Capitolo 1

Risposta lineare e scaling in y

In questo Capitolo, discutiamo la forma della sezione d'urto di diffusione su un sistema di molti corpi, nel caso in cui l'interazione tra sonda e particelle bersaglio sia di natura scalare. È importante sottolineare che questo esempio non è di interesse puramente accademico, ma descrive la diffusione di neutroni termici su atomi di ^3He e ^4He liquido, che è stata studiata in modo approfondito sia dal punto di vista teorico che da quello sperimentale [2].

Nella Sezione 1.1 è illustrata la relazione tra sezione d'urto e funzione di risposta lineare, mentre la Sezione 1.2.1 è dedicata all'analisi del regime di alto impulso trasferito, nel quale è possibile utilizzare l'approssimazione impulsiva, e allo scaling nella variabile y . Infine, nella Sezione 1.2.2, descriviamo brevemente gli esperimenti che hanno fornito la conferma del verificarsi di questo fenomeno.

1.1 Risposta lineare di un sistema di molti corpi

Nel caso di interazione scalare tra sonda e bersaglio, la sezione d'urto del processo in cui un fascio di particelle di impulso \mathbf{k} ed energia E viene diffuso nell'angolo solido $d\Omega$ con energia $E' = E - \nu$ e impulso \mathbf{k}' , può essere scritta nella forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} S(\mathbf{q}, \nu), \quad (1.1)$$

dove σ è la sezione d'urto totale di scattering sul singolo costituente. Vogliamo ora definire la funzione di risposta del bersaglio, $S(\mathbf{q}, \nu)$.

Dato un sistema a molti corpi non relativistico nel suo stato fondamentale, $|0\rangle$, chiamiamo O_q il generico operatore che descrive l'interazione con la sonda, che tra-

1.2 Approssimazione Impulsiva e scaling in y

sferisce impulso \mathbf{q} ed energia ν . Assumendo che l'interazione sonda-bersaglio sia debole, in modo da poter usare l'approssimazione di Born, la *funzione di risposta* del sistema all'interazione può essere scritta come:

$$S(\mathbf{q}, \nu) = \sum_n \langle 0 | O_{\mathbf{q}}^\dagger | n \rangle \langle n | O_{\mathbf{q}} | 0 \rangle \delta(\nu + E_0 - E_n) . \quad (1.2)$$

Gli stati $|0\rangle$ e $|n\rangle$, che rappresentano, rispettivamente, lo stato iniziale e tutti i possibili stati finali del sistema, soddisfano l'equazione di Schrödinger

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle , \quad (1.3)$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle , \quad (1.4)$$

dove H è l'Hamiltoniana che descrive la dinamica interna del bersaglio. Scrivendo la funzione δ , che esprime la condizione di conservazione dell'energia, nella sua rappresentazione integrale, si ottiene

$$\begin{aligned} S(\mathbf{q}, \nu) &= \sum_n \int \frac{dt}{2\pi} e^{i(\nu + E_0 - E_n)t} \langle 0 | O_{\mathbf{q}}^\dagger | 0 \rangle \langle n | O_{\mathbf{q}} | n \rangle \\ &= \sum_n \int \frac{dt}{2\pi} e^{i(\nu + E_0)t} \langle 0 | O_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-iHt} | n \rangle \langle n | O_{\mathbf{q}} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{dt}{2\pi} e^{i(\nu + E_0)t} \langle 0 | O_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-iHt} O_{\mathbf{q}} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{dt}{2\pi} e^{i\nu t} \langle 0 | O_{\mathbf{q}}^\dagger(t) O_{\mathbf{q}} | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Il significato fisico della funzione di risposta scritta in questa forma emerge in modo naturale: rappresenta infatti la probabilità che il sistema torni nello stato fondamentale dopo che la sonda ha trasferito impulso \mathbf{q} all'istante iniziale e $-\mathbf{q}$ all'istante t . Al suo interno possiamo ritrovare tutte le informazioni sulla dinamica del bersaglio, in quanto ne contiene l'intero spettro.

1.2 Approssimazione Impulsiva e scaling in y

1.2.1 Funzione di risposta in Approssimazione Impulsiva

Trattando il processo di scattering sul sistema a molti corpi nel regime di grande impulso trasferito, è possibile introdurre l'*Approssimazione Impulsiva* (AI), alla cui base troviamo due fondamentali ipotesi:

1. essendo la risoluzione spaziale della sonda $\sim 1/|\mathbf{q}|$, per valori di \mathbf{q} sufficientemente grandi il bersaglio è visto come l'insieme dei suoi singoli costituenti. Tipicamente, ciò avviene quando $|\mathbf{q}| \gg 2\pi/d$, con d distanza media tra i costituenti. In queste condizioni, il potere risolutivo della sonda permette di studiare effetti legati alla struttura a corto raggio del bersaglio, come per esempio la presenza di correlazioni dinamiche tra i costituenti;
2. le Interazioni nello Stato Finale (ISF) tra il costituente che partecipa all'interazione, che ha anch'esso impulso grande, $\sim \mathbf{q}$, e il sistema residuo di $(N - 1)$ particelle sono trascurabili. Le $(N - 1)$ particelle si comportano cioè come spettatori.

Per grandi valori di \mathbf{q} lo scattering sul bersaglio si riduce così alla somma incoerente di processi elementari che ne coinvolgono i singoli costituenti. Quindi nel regime di AI, l'interazione con la sonda può essere scritta come somma di operatori che agiscono sul singolo costituente del bersaglio,

$$O_{\mathbf{q}} \rightarrow \sum_i O_i(\mathbf{q}) , \quad (1.6)$$

in modo che la (1.5) diventi

$$S(\mathbf{q}, \nu) = \sum_{ij} \sum_n \int \frac{dt}{2\pi} e^{i(\nu+E_0)t} \langle 0 | O_i^\dagger(\mathbf{q}) e^{-iHt} | n \rangle \langle n | O_j(\mathbf{q}) | 0 \rangle . \quad (1.7)$$

Ora consideriamo in particolare il caso in cui il bersaglio sia un sistema non relativistico costituito da N particelle puntiformi di massa m . L'operatore che descrive l'interazione sistema-sonda è dato dalla

$$\rho_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} , \quad (1.8)$$

e non è altro che la trasformata di Fourier dell'operatore che produce fluttuazioni di densità delle particelle. Nella (1.8) $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ e $a_{\mathbf{p}}$ sono gli usuali operatori di creazione e distruzione dei costituenti del bersaglio. L'interazione consiste nella distruzione di un costituente di impulso \mathbf{p} , al cui posto ne viene creato uno di impulso $\mathbf{p} + \mathbf{q}$. La

1.2 Approssimazione Impulsiva e scaling in y

funzione di risposta assume quindi la forma

$$\begin{aligned}
 S(\mathbf{q}, \nu) &= \int \frac{dt}{2\pi} e^{i\nu t} \langle 0 | \rho_{\mathbf{q}}^\dagger(t) \rho_{\mathbf{q}}(0) | 0 \rangle \\
 &= \int \frac{dt}{2\pi} e^{i\nu t} \langle 0 | e^{iHt} \rho_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-iHt} \rho_{\mathbf{q}} | 0 \rangle \\
 &= \sum_n |\langle n | \rho_{\mathbf{q}} | 0 \rangle|^2 \delta(\nu + E_0 - E_n) ,
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

e, come abbiamo già sottolineato, contiene tutte le informazioni sulla struttura interna del bersaglio.

Per grandi impulsi trasferiti i contributi dominanti alla (1.9) vengono dai termini con $i = j$: la sonda, nell'istante iniziale, interagisce con l' i -esimo costituente del sistema a cui trasferisce impulso \mathbf{q} che viene rilasciato dal medesimo costituente dopo un tempo t .

Consideriamo infatti il valore d'aspettazione nella (1.9)

$$S(\mathbf{q}, t) = \langle 0 | e^{iHt} \rho_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-iHt} \rho_{\mathbf{q}} | 0 \rangle . \tag{1.10}$$

Passando alla rappresentazione nello spazio delle coordinate, sfruttando la completezza degli autostati delle posizioni

$$\int dR |R\rangle \langle R| = 1 , \tag{1.11}$$

e usando il fatto che

$$\langle R' | \rho_{\mathbf{q}} | R \rangle = \delta(R - R') \sum_i^N e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_i} , \tag{1.12}$$

dove $R \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ e \mathbf{r}_i specifica la posizione dell' i -esimo costituente nel bersaglio, la (1.10) si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned}
 S(\mathbf{q}, t) &= \sum_{ij} \int dR dR' dR'' \Psi_0^\dagger(R) \langle R | e^{iHt} | R' \rangle e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}'_i} \\
 &\quad \times \langle R' | e^{-iHt} | R'' \rangle e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}''_j} \Psi_0(R'') ,
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

dove $\Psi_0(R) = \langle R | 0 \rangle$ è la funzione d'onda dello stato fondamentale del bersaglio.

A questo punto separiamo, nella (1.13), i contributi incoerenti e coerenti, corrispondenti rispettivamente ai termini con $i = j$ e $i \neq j$, in modo che

$$S(\mathbf{q}, t) = S_I(\mathbf{q}, t) + S_C(\mathbf{q}, t) , \tag{1.14}$$

con

$$S_I(\mathbf{q}, t) = N \int dR dR' dR'' \Psi_0^\dagger(R) \langle R | e^{iHt} | R' \rangle \langle R' | e^{-iHt} | R'' \rangle \times e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1'' - \mathbf{r}_1')} \Psi_0(R'') \quad (1.15)$$

e

$$S_C(\mathbf{q}, t) = N(N-1) \int dR dR' dR'' \Psi_0^\dagger(R) \langle R | e^{iHt} | R' \rangle e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_1'} \times \langle R' | e^{-iHt} | R'' \rangle e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_2''} \Psi_0(R'') . \quad (1.16)$$

Consideriamo per primi i contributi incoerenti $S_I(\mathbf{q}, t)$. L'Hamiltoniana del sistema di N particelle può essere scritta come

$$H = \tilde{H} + T_1 + H_{ISF} , \quad (1.17)$$

dove \tilde{H} è l'Hamiltoniana del sistema spettatore composto dalle particelle $(2, \dots, N)$, T_1 è l'operatore energia cinetica che agisce sulla particella 1 e H_{ISF} descrive le interazioni tra il costituente colpito e il sistema spettatore di $N-1$ particelle. Queste ultime possono essere trascurate in virtù della prima ipotesi della AI e, poiché \tilde{H} e T_1 commutano, è possibile riscrivere il propagatore nella (1.15) nella forma fattorizzata

$$\begin{aligned} \langle R | e^{iHt} | R' \rangle &\cong \langle \tilde{R} | e^{i\tilde{H}t} | \tilde{R}' \rangle \langle \mathbf{r}_1 | e^{iT_1 t} | \mathbf{r}_1' \rangle \\ &= \sum_n \Phi_n^\dagger(\tilde{R}) \Phi_n(\tilde{R}') e^{iE_n t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{E_{\mathbf{p}} t} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1')} , \end{aligned} \quad (1.18)$$

in cui $\tilde{R} = (\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$. La funzione d'onda $\Phi_n(\tilde{R}) = \langle \tilde{R} | n \rangle$ è associata all' n -esimo autostato di \tilde{H} , che soddisfa l'equazione di Schrödinger per il sistema di $(N-1)$ particelle $\tilde{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, mentre $E_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$ è l'energia cinetica della particella 1, di impulso \mathbf{p} .

Sostituendo l'equazione (1.18) nella (1.15) otteniamo

$$\begin{aligned} S_I(\mathbf{q}, t) &= N \int dR dR' dR'' \Psi_0^\dagger(R) \sum_m \Phi_m^\dagger(\tilde{R}) \Phi_m(\tilde{R}') e^{iE_m t} \\ &\times \sum_n \Phi_n^\dagger(\tilde{R}') \Phi_n(\tilde{R}'') e^{-iE_n t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1')} e^{iE_{\mathbf{p}} t} \\ &\times \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}'(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_1'')} e^{-iE_{\mathbf{p}'} t} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1'' - \mathbf{r}_1')} \Psi_0(\tilde{R}'') . \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.2 Approssimazione Impulsiva e scaling in y

Possiamo rimuovere la dipendenza dagli stati del sistema spettatore usando le relazioni di ortonormalità e completezza

$$\int d\tilde{R}' \Phi_m^\dagger(\tilde{R}') \Phi_n(\tilde{R}') = \delta_{mn} \quad (1.20)$$

e

$$\sum_m \Phi_m^\dagger(\tilde{R}) \Phi_m(\tilde{R}'') = \delta(\tilde{R} - \tilde{R}'') , \quad (1.21)$$

ottenendo così dalla (1.19) la

$$\begin{aligned} S_I(\mathbf{q}, t) = N \int d\tilde{R} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}''_1 \Psi_0^\dagger(\mathbf{r}_1, \tilde{R}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} e^{iE_{\mathbf{p}} t} \\ \times \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}'(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_1)} e^{-iE_{\mathbf{p}'} t} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_1)} \Psi_0(\mathbf{r}''_1, \tilde{R}) . \end{aligned} \quad (1.22)$$

Integrando poi sulla coordinata \mathbf{r}'_1 si trova

$$\int d\mathbf{r}'_1 e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}') \mathbf{r}'_1} \rightarrow (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}') \quad (1.23)$$

e usando la funzione δ per fare un'ulteriore integrazione sull'impulso \mathbf{p}' si arriva all'espressione

$$\begin{aligned} S_I(\mathbf{q}, t) = N \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p} + \mathbf{q}}) t} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}''_1 e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}''_1)} \\ \times \int d\tilde{R} \Psi_0^\dagger(\mathbf{r}_1, \tilde{R}) \Psi_0(\mathbf{r}''_1, \tilde{R}) . \end{aligned} \quad (1.24)$$

All'interno dell'equazione (1.24) possiamo identificare la matrice *densità di singola particella*

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) = N \int d\tilde{R} \Psi_0^\dagger(\mathbf{r}_1, \tilde{R}) \Psi_0(\mathbf{r}'_1, \tilde{R}) , \quad (1.25)$$

legata alla *distribuzione di impulso* $n(\mathbf{p})$ dalla relazione

$$n(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) . \quad (1.26)$$

La distribuzione di impulso è definita in modo che la quantità $d\mathbf{p} \mathbf{p}^2 n(\mathbf{p})$ rappresenta la probabilità di trovare nello stato fondamentale del bersaglio un costituente con impulso compreso tra \mathbf{p} e $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$. Le distribuzioni di impulso di ${}^3\text{He}$ e ${}^4\text{He}$ liquidi,

ottenute col metodo Monte Carlo usando potenziali interatomici fenomenologici [3] sono illustrate in Fig. 1.1.

Sostituendo le (1.25) e (1.26) nella (1.24) otteniamo

$$S_I(\mathbf{q}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})t} n(\mathbf{p}) . \quad (1.27)$$

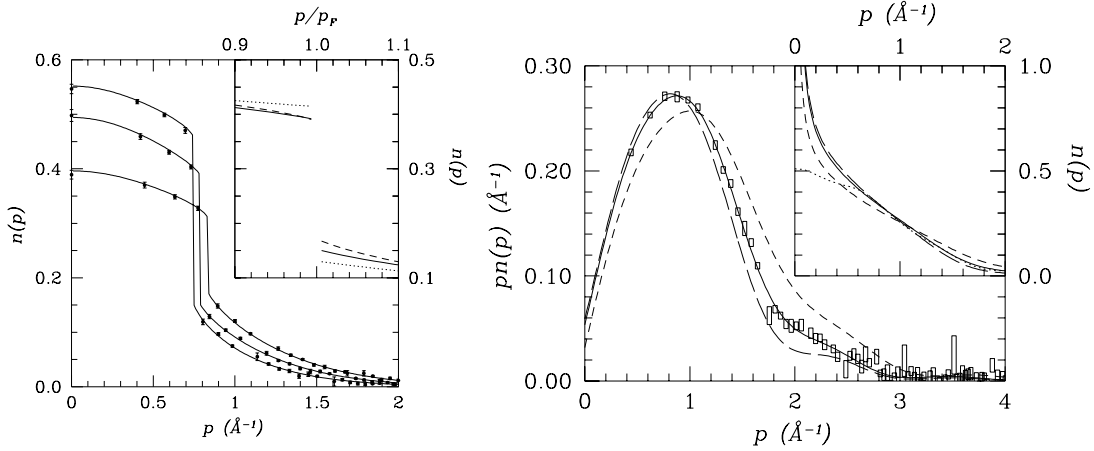


Figura 1.1: Distribuzione di impulso di ^3He (pannello di sinistra) e ^4He (pannello di destra) a $T = 0$, calcolate col metodo Monte Carlo usando un potenziale interatomico fenomenologico [3]. Le diverse curve corrispondono a densità diverse, vicine alle densità di equilibrio.

Passiamo adesso ai contributi coerenti e torniamo quindi all'equazione (1.16). In questo caso il costituente coinvolto nel processo di scattering che assorbe impulso \mathbf{q} , non è lo stesso che lo riemette dopo l'intervallo di tempo t . Quindi scriveremo l'Hamiltoniana del sistema ad N corpi separando i contributi di due particelle diverse che chiameremo 1 e 2:

$$H = \tilde{H} + T_1 + T_2 + H_{ISF} . \quad (1.28)$$

In questo caso \tilde{H} è l'Hamiltoniana del sistema composto dalle $(N - 2)$ particelle $(3, \dots, N)$, T_1 e T_2 gli operatori energia cinetica agenti sulle particelle 1 e 2 e H_{ISF} descrive le interazioni tra le particelle 1 e 2 e il sistema di $(N - 2)$ spettatori. Di nuovo questo contributo può essere trascurato. Inoltre facciamo l'ulteriore ipotesi che le particelle 1 e 2 siano del tutto scorrelate. Questo ci permette di scrivere di

1.2 Approssimazione Impulsiva e scaling in y

nuovo il propagatore nella (1.16) in forma fattorizzata

$$\begin{aligned}
\langle R|e^{iHt}|R'\rangle &\cong \langle \tilde{R}|e^{i\tilde{H}t}|\tilde{R}'\rangle \langle \mathbf{r}_1|e^{iT_1t}|\mathbf{r}'_2\rangle \langle \mathbf{r}_2|e^{iT_2t}|\mathbf{r}'_1\rangle \\
&= \sum_n \Phi_n^\dagger(\tilde{R}) \Phi_n(\tilde{R}') e^{iE_n t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} \\
&\times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)} ,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

in cui $\tilde{R} = (\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$. La funzione d'onda $\Phi_n(\tilde{R}) = \langle \tilde{R}|n\rangle$ è associata all' n -esimo autostato di \tilde{H} , che soddisfa ora l'equazione di Schrödinger per il sistema di $(N-2)$ particelle $\tilde{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, $E_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$ e $E_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2/2m$ sono l'energia cinetica della particella 1 e 2, rispettivamente di impulso \mathbf{p} e \mathbf{k} .

Procedendo in modo del tutto analogo a quanto fatto per i contributi incoerenti possiamo sostituire la (1.29) nella (1.16) ed eliminare di nuovo la dipendenza dagli stati del sistema spettatore attraverso le equazioni analoghe alle (1.20) e (1.21). In tal modo S_C si riduce a

$$\begin{aligned}
S_C(\mathbf{q}, t) &= N(N-1) \int d\tilde{R} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\tilde{R}' d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 d\tilde{R}'' d\mathbf{r}''_1 d\mathbf{r}''_2 \\
&\times \Psi_0^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tilde{R}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} e^{iE_p t} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)} e^{iE_k t} \\
&\times \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}'(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_1)} e^{-iE_{p'} t} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}''_2)} e^{-iE_{k'} t} \\
&\times e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}''_2 - \mathbf{r}'_1)} \Psi_0(\mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2, \tilde{R}) .
\end{aligned} \tag{1.30}$$

A questo punto utilizziamo le funzioni delta, ottenute dalle

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{r}'_1 e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}')\mathbf{r}'_1} &\rightarrow (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}) \\
\int d\mathbf{r}'_2 e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}'_2} &\rightarrow (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})
\end{aligned} \tag{1.31}$$

per integrare sugli impulsi \mathbf{p}' e \mathbf{k}' . Questo ci permette di scrivere

$$\begin{aligned}
S_C(\mathbf{q}, t) &= N(N-1) \int d\tilde{R} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}''_1 d\mathbf{r}''_2 \Psi_0^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tilde{R}) \\
&\times \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}''_2)} \\
&\times e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}''_2} e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{q})\mathbf{r}''_1} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p} + \mathbf{q}})t} \Psi_0(\mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2, \tilde{R}) .
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Usando infine la funzione $\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'')$, risultante dall'integrazione su \mathbf{k} , si ottiene

$$S_C(\mathbf{q}, t) = N(N-1) \int d\tilde{R} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_1'' \Psi_0^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tilde{R}) \times \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'')} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1'' - \mathbf{r}_2)} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})t} \Psi_0(\mathbf{r}_1'', \mathbf{r}_2, \tilde{R}) . \quad (1.33)$$

Riscriviamo di nuovo quest'ultima equazione in funzione della matrice densità

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2) = \int d\tilde{R} \Psi_0^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tilde{R}) \Psi_0(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2, \tilde{R}) , \quad (1.34)$$

che in questo caso dipende dalle coordinate delle due particelle coinvolte nel processo.

Possiamo adesso definire la *distribuzione di impulso generalizzata*

$$n(\mathbf{p}, -\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_1' d\mathbf{r}_2 e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1')} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2)} \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2) . \quad (1.35)$$

in termini della quale è possibile scrivere il contributo coerente alla funzione di risposta come

$$S_C(\mathbf{q}, t) = N(N-1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} n(\mathbf{p}, -\mathbf{q}) e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})t} . \quad (1.36)$$

Un caso molto semplice in cui l'espressione della (1.35) è calcolabile esattamente è quello di un gas di Fermi completamente degenere, per cui si trova [4]

$$n(\mathbf{p}, -\mathbf{q}) = n(\mathbf{p}) \left[(2\pi)^2 \rho \delta(\mathbf{q}) - n(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|) \right] , \quad (1.37)$$

con

$$n(\mathbf{p}) = \theta(k_F - |\mathbf{p}|) , \quad (1.38)$$

dove k_F è l'impulso di Fermi e $\rho = N/V = k_F^3/3\pi^2$ è la densità di costituenti.

Per $\mathbf{q} \neq 0$ la (1.36) assume quindi la forma

$$S_C(\mathbf{q}, t) = -N(N-1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})t} n(\mathbf{p}) n(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|) \quad (1.39)$$

che implica che

$$S_C(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (1.40)$$

ogni volta che $\mathbf{q} \geq 2k_F$.

1.2 Approssimazione Impulsiva e scaling in y

Nel limite termodinamico, l'equazione (1.39) è ancora valida in presenza di interazioni tra gli atomi. Possiamo quindi scrivere il contributo coerente alla funzione di risposta nella forma

$$S_C(\mathbf{q}, \nu) = -N(N-1) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n(\mathbf{p})n(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|) \delta(\nu + E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) \quad (1.41)$$

che mostra come tali contributi sono soppressi (o al limite nulli) per grandi valori dell'impulso trasferito \mathbf{q} (si veda la Fig. 1.1).

Abbiamo quindi ottenuto in modo formale quanto avevamo giustificato attraverso argomenti intuitivi: la risoluzione spaziale della sonda non permette di osservare processi che coinvolgono più di un costituente, essendo inferiore alla loro distanza di separazione. La funzione di risposta si riduce quindi alla somma incoerente delle interazioni che coinvolgono il singolo costituente del bersaglio.

Un'espressione alternativa alla (1.27) per la risposta incoerente può essere ottenuta scrivendo la (1.9) nello spazio delle coordinate,

$$S(\mathbf{q}, \nu) = \sum_n \left| \int dR \langle n|R \rangle \sum_{i=1}^N e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i} \langle R|0 \rangle \right|^2 \delta(\nu + E_0 - E_n) . \quad (1.42)$$

Tenendo conto delle ipotesi della AI, quindi della possibilità di trascurare qualsiasi contributo proveniente da processi che coinvolgono più di un costituente, cioè limitandoci a considerare i contributi incoerenti alla funzione di risposta, otteniamo

$$S(\mathbf{q}, \nu) = \sum_i \sum_n \left| \int dR \langle n|R \rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i} \langle R|0 \rangle \right|^2 \delta(\nu + E_0 - E_n) . \quad (1.43)$$

Inoltre, in assenza di ISF, lo stato finale $|n\rangle$ di impulso \mathbf{q} può essere scritto nella forma di prodotto diretto tra gli stati che descrivono separatamente il costituente colpito e il sistema residuo,

$$|n\rangle = |\mathbf{p}', \mathcal{R}\rangle = |\mathbf{p}'\rangle \otimes |\mathcal{R}(\mathbf{q} - \mathbf{p}')\rangle , \quad (1.44)$$

con energia

$$E_n = E_{\mathbf{p}'} + E_{\mathcal{R}} . \quad (1.45)$$

Lo stato $|\mathbf{p}'\rangle$ descrive il costituente come una particella libera di impulso \mathbf{p}' ed energia $E_{\mathbf{p}'} = |\mathbf{p}'|^2/2m$, mentre $E_{\mathcal{R}}$ è l'energia del sistema spettatore di $(N-1)$

particelle che si trova nello stato $|\mathcal{R}\rangle$, con impulso $\mathbf{q} - \mathbf{p}'$. Di conseguenza la somma sugli stati finali che appare nella (1.43) diventa

$$\sum_n |n\rangle\langle n| \rightarrow \int d^3p' |\mathbf{p}'\rangle\langle \mathbf{p}'| \sum_{\mathcal{R}} |\mathcal{R}(\mathbf{q} - \mathbf{p}')\rangle\langle \mathcal{R}(\mathbf{q} - \mathbf{p}')|. \quad (1.46)$$

Sostituendo le equazioni (1.44)-(1.46) nella (1.43) otteniamo

$$S(\mathbf{q}, \nu) = \int d^3p \int d\epsilon P(\mathbf{p}, \epsilon) \delta(\nu + \epsilon - E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}), \quad (1.47)$$

dove la funzione

$$P(\mathbf{p}, \epsilon) = \sum_{\mathcal{R}} |\langle 0|\mathbf{p}, \mathcal{R}\rangle|^2 \delta(\epsilon + E_{\mathcal{R}} - E_0) \quad (1.48)$$

detta *funzione spettrale*, dà la probabilità di trovare uno dei costituenti con impulso \mathbf{p} ed energia di rimozione ϵ nello stato fondamentale del bersaglio.

Confrontando la (1.47) con la (1.27), possiamo notare che il procedimento alternativo utilizzato per ricavare la funzione di risposta ci permette di tenere conto della distribuzione in energia dei costituenti. La relazione che lega la funzione spettrale $P(\mathbf{p}, \epsilon)$ alla distribuzione di impulso è infatti data da

$$n(\mathbf{p}) = \int d\epsilon P(\mathbf{p}, \epsilon). \quad (1.49)$$

La scelta della formulazione più appropriata della AI dipende dalle caratteristiche dello spettro del bersaglio. Nel caso di bersagli meno complessi, come l'elio liquido che tratteremo nella prossima Sezione, in cui la relazione che lega energia e impulso del costituente è semplice, le due formulazioni sono del tutto equivalenti. Quando invece tra le due variabili c'è una forte correlazione è necessario utilizzare la funzione spettrale $P(\mathbf{p}, \epsilon)$, e l'uso della distribuzione d'impulso può portare infatti a risultati poco accurati [5].

1.2.2 Scaling

Le equazioni (1.47) e (1.48) mostrano che la risposta del bersaglio dipende da \mathbf{q} e ν soltanto attraverso la funzione δ che impone la conservazione dell'energia

$$\nu + E_0 - E_{\mathcal{R}} - E_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = 0. \quad (1.50)$$

1.2 Approssimazione Impulsiva e scaling in y

Il verificarsi del fenomeno di *scaling*, ossia che a meno di un fattore cinematico $S(\mathbf{q}, \nu)$ si riduca ad una funzione di una sola variabile, riflette semplicemente il fatto che nel regime di AI, in cui la conservazione dell'energia è esprimibile attraverso la condizione (1.50), \mathbf{q} e ν non sono più variabili indipendenti. È quindi possibile definire una nuova variabile

$$y = y(\mathbf{q}, \nu) \quad (1.51)$$

tale che per $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$,

$$K(|\mathbf{q}|, \nu)S(\mathbf{q}, \nu) \rightarrow F(y) . \quad (1.52)$$

Un esempio classico di processo in cui è possibile osservare lo scaling della funzione di risposta di un sistema a molti corpi è lo scattering inclusivo di neutroni termici su ${}^4\text{He}$ liquido per grande impulso trasferito $|\mathbf{q}|$ [6, 7]. I primi esperimenti di scattering su tale sistema vennero condotti per provarne sperimentalmente una particolare proprietà. Ci si aspetta infatti che nell' ${}^4\text{He}$ liquido a bassa temperatura un numero macroscopico di particelle occupi lo stato quantistico ad impulso nullo, creando un fenomeno del tutto analogo alla condensazione di Bose-Einstein che si verifica in un gas di particelle libere bosoniche. Il primo a proporre questa teoria fu London nel 1938, mentre Onsager e Penrose ne diedero una formulazione matematica adeguata estendendo il concetto al caso di particelle interagenti e facendo una prima stima della frazione di particelle che si trovano nello stato di condensato.

Le prove sperimentali dell'esistenza di questo condensato sono principalmente indirette; si pensò quindi che, in qualche modo, gli esperimenti sullo scattering di neutroni potessero darne un'evidenza più diretta. Proprio a questo scopo Hohenberg e Platzman [6] suggerirono che, se i neutroni sono diffusi dall'elio liquido a valori di impulso ed energia trasferiti sufficientemente alti, la risposta degli atomi di elio può essere trattata approssimandoli come particelle quasi libere. L'esistenza di un condensato si manifesterebbe nella distribuzione dei neutroni diffusi come un picco molto pronunciato, centrato sull'energia di rinculo della particella libera, dovuto alla presenza di una grande quantità di particelle nello stato di impulso nullo.

Nei primi anni Settanta, Cowley and Woods effettuarono degli esperimenti per tentare di verificare questa predizione usando un impulso trasferito nel range $(2.5 - 9)\text{Å}^{-1}$. La legge di scattering che ottennero, in funzione dell'energia trasferita ad impulso trasferito fissato, mostra un singolo piccolo non molto stretto, centrato ad energie più basse di quella prevista, al contrario di quanto aspettato da Hohenberg e

Platzman. L'esperimento quindi non diede una verifica diretta della condensazione come si sperava, pur non essendo i risultati inconsistenti con la possibilità della sua esistenza [8].

Consideriamo quindi un sistema a molti corpi non relativistico composto da atomi di ${}^4\text{He}$. L'equazione per la conservazione dell'energia che compare nella definizione della funzione di risposta in termini della distribuzione d'impulso ha la forma

$$\nu + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2}{2m} = 0, \quad (1.53)$$

dove m è la massa dell'atomo di elio. Dalla (1.53) segue immediatamente che la variabile

$$y = \frac{m}{|\mathbf{q}|} \left(\nu - \frac{|\mathbf{q}|^2}{2m} \right) = p_{\parallel}, \quad (1.54)$$

con $p_{\parallel} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}/|\mathbf{q}| = |\mathbf{p}| \cos \theta$, dove θ è l'angolo formato dai vettori \mathbf{p} e \mathbf{q} , è indipendente da $|\mathbf{q}|$. Inoltre, la condizione $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ implica che la funzione di risposta si può riscrivere come

$$S(\mathbf{q}, \nu) = \frac{m}{|\mathbf{q}|} 2\pi \int_{|y|}^{\infty} |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| n(|\mathbf{p}|), \quad (1.55)$$

dove

$$n(|\mathbf{p}|) = \int d\epsilon P(\mathbf{p}, \epsilon) \quad (1.56)$$

è la funzione di distribuzione d'impulso dei costituenti. Questo implica che, a meno di un fattore cinematico, nel limite $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ la risposta del sistema diventa funzione dell'unica variabile y , cioè che

$$\frac{|\mathbf{q}|}{m} S(\mathbf{q}, \nu) \rightarrow F(y). \quad (1.57)$$

Notiamo anche che il fattore cinematico, $K(|\mathbf{q}|, \nu) = |\mathbf{q}|/m$ coincide proprio con $|\partial\nu/\partial p_{\parallel}|$, dove $p_{\parallel} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$.

La Fig. 1.2 illustra il comportamento della $F(y)$, definita dall'equazione (1.57), misurata dallo scattering di neutroni su ${}^4\text{He}$ superfluido a $T = 1.6\text{K}$ [9]. Il fatto che le curve corrispondenti a $|\mathbf{q}| > 15\text{\AA}^{-1}$ si sovrappongono l'una all'altra è una chiara manifestazione che è stato raggiunto il regime di scaling. Inoltre, la (1.54) mostra che la variabile di scala y ha un'interpretazione fisica immediata, in quanto può essere identificata con l'impulso longitudinale iniziale dell'atomo che partecipa al processo di diffusione, p_{\parallel} .

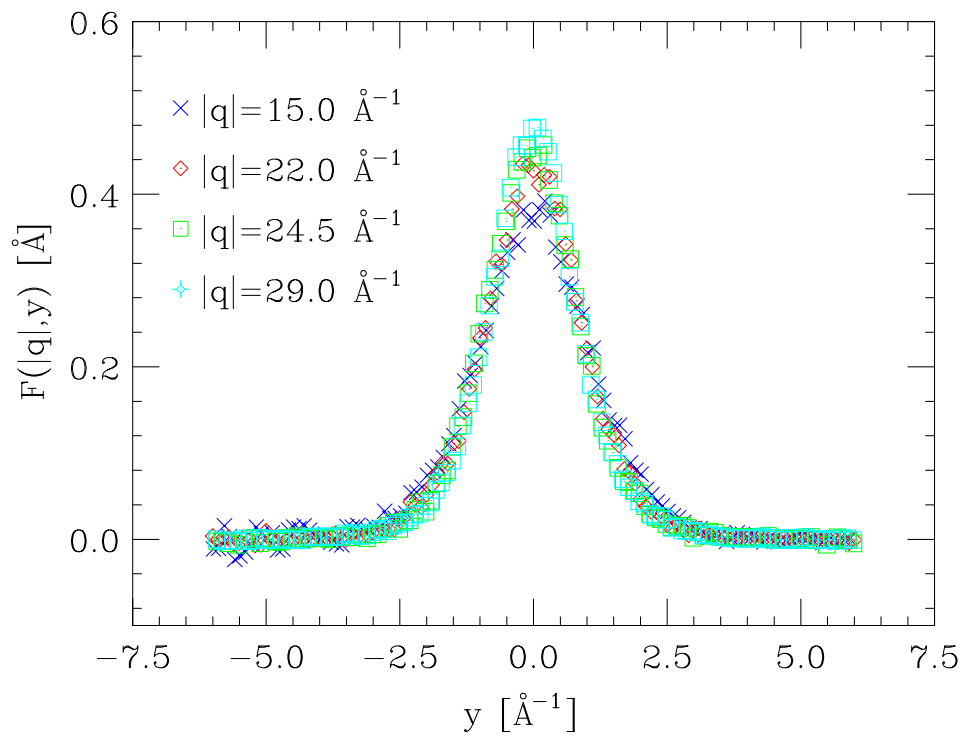


Figura 1.2: Funzione di scaling $F(y)$ misurata dalla diffusione di neutroni su ${}^4\text{He}$ superfluido a $T = 1.6\text{K}$ [9].

Capitolo 2

Scaling in y nella diffusione su nuclei

Come abbiamo visto nel Cap. 1, il manifestarsi dello scaling nella variabile y segue dalla conservazione dell'energia e dell'impulso nei processi di diffusione in regime di AI. È quindi naturale aspettarsi che questo fenomeno possa essere osservato indipendentemente in una varietà di sistemi diversi. Negli ultimi venti anni, la costruzione di una nuova generazione di acceleratori, capaci di produrre fasci continui di elettroni di energia fino a qualche GeV, ha reso possibili studi molto accurati della diffusione elettrone-nucleo a grande impulso trasferito, e l'osservazione dello scaling in questo tipo di processo.

Quando grande impulso $|\mathbf{q}|$ e grande energia ν vengono trasferiti dall'elettrone ad un nucleo attraverso lo scambio di un fotone virtuale, l'interazione elettromagnetica coinvolge un singolo nucleone, che viene espulso dal nucleo con impulso elevato, dell'ordine di $|\mathbf{q}|$. Siamo quindi nelle condizioni in cui il processo può essere descritto nell'ambito dell'AI e, sotto opportune condizioni cinematiche, la sezione d'urto di diffusione elettrone-nucleo si riduce, a meno di un fattore cinematico, al prodotto tra la sezione d'urto elementare elettrone-nucleone, e una funzione di scaling $F(y)$.

Benchè la derivazione della variabile di scaling e della forma della $F(y)$ sia concettualmente analoga a quella discussa nel Cap. 1, vi sono alcune importanti differenze che vanno sottolineate. Innanzitutto, poichè in un nucleo la condizione $|\mathbf{q}| \ll d \sim 1$ fm implica momenti trasferiti dell'ordine del GeV, per descrivere il processo di diffusione elettrone-nucleone è necessario utilizzare la cinematica relativistica. Inoltre, l'esistenza di una forte correlazione tra impulso ed energia dei nucleoni all'interno

2.1 Sezione d'urto elettrone-nucleo in approssimazione impulsiva

del nucleo, predetta dai calcoli teorici ed osservata sperimentalmente [10], rende necessario l'uso della funzione spettrale del bersaglio, che abbiamo introdotto nella Sezione 1.2.1. Infine, essendo il nucleone una particella composta, la sua interazione con la sonda può essere di natura inelastica, e dare luogo alla produzione di particelle diverse. La discussione del Capitolo precedente implica però che lo scaling in y si manifesta solo nel caso in cui la diffusione elettrone-nucleone è di natura elastica, e la particella emessa è un nucleone.

In questo Capitolo, discutiamo la derivazione della sezione d'urto elettrone-nucleo in AI, l'identificazione della variabile di scaling e del suo significato fisico e la procedura per ottenere la funzione di scaling $F(y)$ a partire dalla sezione d'urto misurata.

2.1 Sezione d'urto elettrone-nucleo in approssimazione impulsiva

La sezione d'urto inclusiva per il processo

$$e + A \rightarrow e' + X , \quad (2.1)$$

in cui un elettrone di quadrimpulso iniziale $k = (E_e, \mathbf{k})$ viene diffuso da un nucleo di massa M_A a uno stato finale di quadrimpulso $k' = (E_{e'}, \mathbf{k}')$, può essere scritta in approssimazione di Born nella forma [10]

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{e'}} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E_{e'}}{E_e} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^A . \quad (2.2)$$

Il tensore leptonic $L^{\mu\nu}$ è completamente determinato dalle variabili cinematiche misurate dell'elettrone. Le informazioni sulla struttura del bersaglio sono invece contenute nel tensore nucleare $W_{\mu\nu}^A$, che può essere definito in modo analogo alla funzione di risposta (1.2)

$$W_{\mu\nu}^A = \sum_X \langle 0 | J_\mu^{A\dagger} | X \rangle \langle X | J_\nu^A | 0 \rangle \delta^{(4)}(P_0 + q - P_X) . \quad (2.3)$$

All'interno del tensore compaiono gli stati adronici iniziale e finale $|0\rangle$ e $|X\rangle$, caratterizzati rispettivamente da quadrimpulso $P_0 = (M_A, \mathbf{0})$ e P_X , e l'operatore corrente elettromagnetica J_μ^A , che prende il posto dell'operatore di fluttuazione di densità

(1.8) della funzione di risposta discussa nel Capitolo precedente, e descrive l'interazione elettrone-nucleo. Con $q = k - k' \equiv (\nu, \mathbf{q})$ indichiamo il quadrimpulso trasferito.

Assumiamo anche in questo caso di trovarci nel regime di grande impulso trasferito, $|\mathbf{q}|$, in modo che sia possibile utilizzare l'AI. Il nucleo sar  quindi visto dall'elettrone incidente come un insieme di nucleoni isolati e, dopo l'urto, il nucleone interagente, l'unico che partecipa al processo, e il sistema residuo si muoveranno indipendentemente l'uno dall'altro.

Tali approssimazioni permettono di fare semplificazioni analoghe a quelle descritte nel Capitolo precedente. Possiamo infatti scrivere la corrente elettromagnetica del nucleo come somma delle correnti dei singoli nucleoni

$$J_\mu^A \rightarrow \sum_{i=1}^A j_\mu^i, \quad (2.4)$$

e ridurre poi lo stato finale del sistema al prodotto diretto tra lo stato finale del nucleone interagente con la sonda e quello del sistema residuo

$$|X\rangle \rightarrow |\mathbf{p}', \mathcal{R}\rangle = |\mathbf{p}'\rangle \otimes |\mathcal{R}, \mathbf{p}_R\rangle. \quad (2.5)$$

L'equazione precedente ci permette cos  di scrivere

$$\sum_X |X\rangle \langle X| \rightarrow \int d^3 p' |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'| \sum_{\mathcal{R}} |\mathcal{R}\rangle \langle \mathcal{R}|. \quad (2.6)$$

Sostituendo le (2.4) e (2.6) nella (2.3) e inserendo un set completo di stati di un nucleone libero, che soddisfano la relazione di completezza

$$\int d^3 p |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = 1, \quad (2.7)$$

si arriva a scrivere il tensore nucleare nella forma

$$W_{\mu\nu}^A = \sum_{i=1}^A \sum_{\mathcal{R}} \int d^3 p d^3 p' |\langle 0|\mathbf{p}, \mathcal{R}\rangle|^2 \langle \mathbf{p}|j_\mu^i|\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'|j_\mu^i|\mathbf{p}\rangle \times \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}') \delta^{(0)}(\nu + M_A - E_{\mathcal{R}} - E_{\mathbf{p}'}), \quad (2.8)$$

dove

$$\nu = E_e - E_{e'} \quad (2.9)$$

2.1 Sezione d'urto elettrone-nucleo in approssimazione impulsiva

è l'energia trasferita nel processo e

$$E_{\mathcal{R}} = \sqrt{M_{A-1}^{*2} + |\mathbf{p}|^2} \quad (2.10)$$

con

$$M_{A-1}^* = M_A - M + E . \quad (2.11)$$

è l'energia del sistema spettatore. Nell'equazione (2.11), l'energia E è l'*energia di rimozione* del nucleone, di massa M , dal nucleo bersaglio. Dalla (2.11) segue che, nel limite in cui $M_{A-1}^* \gg \mathbf{p}$, il quadrimpulso del nucleone che partecipa al processo di diffusione è

$$p \equiv (M - E, \mathbf{p}) . \quad (2.12)$$

Utilizzando l'equazione

$$\delta(\nu + E_0 - E_{\mathcal{R}} - E_{\mathbf{p}'}) = \int dE \delta(\nu - E + M - E_{\mathbf{p}'}) \delta(E_0 - E_{\mathcal{R}} - M + E) \quad (2.13)$$

è possibile riscrivere la (2.8) in termini della funzione spettrale

$$P(\mathbf{p}, E) = \sum_{\mathcal{R}} |\langle 0 | \mathbf{p}, \mathcal{R} \rangle|^2 \delta(E_0 - E_{\mathcal{R}} - M + E) , \quad (2.14)$$

introdotta nel Capitolo precedente. Si ottiene così l'espressione

$$W_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^A \int d^3p dE P(\mathbf{p}, E) \int d^3p' \langle \mathbf{p} | j_{\mu}^i | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | j_{\nu}^i | \mathbf{p} \rangle \times \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}') \delta^{(0)}(\nu - E + M - E_{\mathbf{p}'}) , \quad (2.15)$$

nella quale compare il tensore elettromagnetico corrispondente allo scattering su un nucleone libero di impulso \mathbf{p} con quadrimpulso trasferito $q \equiv (\nu, \mathbf{q})$, definito come

$$w_i^{\mu\nu}(p, q) = \int d^3p' \langle \mathbf{p} | j_i^{\mu} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | j_i^{\nu} | \mathbf{p} \rangle \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}') \times \delta^{(0)}(\nu + E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'}) , \quad (2.16)$$

con $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$ ed $E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \sqrt{M^2 + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2}$.

Introducendo

$$\tilde{q} = (\tilde{\nu}, \mathbf{q}) \quad (2.17)$$

$$\tilde{\nu} = \nu + E - M - E_{\mathbf{p}} , \quad (2.18)$$

possiamo scrivere il tensore del bersaglio in funzione di quello di un singolo nucleone

$$W_{\mu\nu}^A = \sum_i \int d^3p dE P(E, \mathbf{p}) w_{\mu\nu}^i(p, \tilde{q}) \delta^{(0)}(\nu - E + M - E_{\mathbf{p}'}) . \quad (2.19)$$

L'uso della variabile cinematica \tilde{q} permette di tenere conto del fatto che, mentre nella diffusione su un nucleone libero l'intero quadrimpulso q viene trasferito dalla sonda al bersaglio, nella diffusione su nucleoni legati all'interno del nucleo una frazione $\delta\nu = \nu - \tilde{\nu}$ viene ceduta al sistema residuo. Questa interpretazione della quantità $\delta\nu$ diventa evidente nel limite $|\mathbf{p}|/M \ll 1$, in cui dalla (2.18) si ottiene

$$\delta\nu = \nu - \tilde{\nu} = E . \quad (2.20)$$

Possiamo adesso sostituire il tensore nucleare (2.19) nell'espressione (2.2) della sezione d'urto differenziale, ottenendo la

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{e'}} = \sum_{i=1}^A \int d^3p dE P(\mathbf{p}, E) \left(\frac{d^2\sigma_i}{d\Omega dE_{e'}} \right) \delta^{(0)}(\nu - E + M - E_{\mathbf{p}'}) , \quad (2.21)$$

dove la sezione d'urto ($d^2\sigma_i/d\Omega dE_{e'}$) descrive il processo elementare di diffusione di un elettrone da parte di un nucleone *off shell*, in quanto legato all'interno del nucleo. Di ciò si tiene conto attraverso la sostituzione $q \rightarrow \tilde{q}$.

La forma della sezione d'urto (2.21) suggerisce il possibile manifestarsi dello scaling in una variabile analoga alla y introdotta nel Capitolo precedente. Ci sono però delle importanti diversità tra la diffusione elettrone-nucleo e quella di neutroni termici su elio liquido. A differenza degli atomi di elio, che si comportano come sfere rigide, i nucleoni non sono privi di struttura; di conseguenza, affinché il regime di scaling si manifesti è necessario che i gradi di libertà interni non vengano eccitati, cioè che lo scattering elettrone-nucleone sia elastico. Inoltre, come vedremo nella prossima Sezione, per ottenere la funzione di scaling dalla sezione d'urto è necessario rimuovere la dipendenza esplicita da q contenuta nella ($d^2\sigma_i/d\Omega dE_{e'}$).

2.2 Scaling in y della sezione d'urto elettrone-nucleo

Per derivare la definizione della variabile di scaling dalla sezione d'urto elettrone-nucleo si procede come nel Capitolo precedente. Tuttavia, come abbiamo anticipato,

2.2 Scaling in y della sezione d'urto elettrone-nucleo

in questo caso l'identificazione della funzione di scaling presenta una complicazione aggiuntiva, dovuta alla dipendenza della sezione d'urto di scattering elementare sia dal quadrimpulso del costituente che dall'impulso trasferito.

L'equazione (2.21) può essere scritta come

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{e'}} = \sum_{i=1}^A \int d|\mathbf{p}| \mathbf{p}^2 d\cos\theta \, 2\pi \, dE \, P(|\mathbf{p}|, E) \left(\frac{d^2\sigma_i}{d\Omega dE_{e'}} \right) \delta(\nu - \nu_0) , \quad (2.22)$$

in cui

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \nu_0(\mathbf{q}; E, \mathbf{p}, \cos\theta) \\ &= E - M + \sqrt{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 + M^2} \\ &= E - M + \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\theta + M^2} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

L'ultima delle (2.23) ci permette di integrare sul $\cos\theta$ e di scrivere quindi l'espressione della sezione d'urto nella forma

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{e'}} = \sum_{i=1}^A \int d|\mathbf{p}| \mathbf{p}^2 \int dE \, 2\pi P(|\mathbf{p}|, E) \left(\frac{d^2\sigma_i}{d\Omega dE_{e'}} \right) \left| \frac{d\nu_0}{d\cos\theta} \right|^{-1} , \quad (2.24)$$

con

$$\left| \frac{d\nu_0}{d\cos\theta} \right| = \frac{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}{\sqrt{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 + M^2}} . \quad (2.25)$$

L'integrazione della funzione delta nella (2.22) dà un risultato diverso da zero soltanto se è soddisfatta la condizione

$$-1 \leq \cos\theta = [(\nu - E + M)^2 - (\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2 + M^2)] / 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \leq 1 , \quad (2.26)$$

dalla quale si determinano gli estremi delle integrazioni sull'impulso e l'energia del nucleone, e quindi la variabile di scaling $y(\mathbf{q}, \nu)$ [11]. Ottenere gli estremi di integrazione presenta difficoltà maggiori rispetto al caso più semplice della diffusione di neutroni su elio liquido del Capitolo precedente. La derivazione dettagliata è discussa in [12].

Consideriamo la condizione di conservazione dell'energia nell'espressione della sezione d'urto nucleare (2.21),

$$\nu = -M + E + E_{\mathbf{p}'} = -M + E + \sqrt{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 + M^2} . \quad (2.27)$$

Separando la componente longitudinale, $p_{||}$, e trasversa, p_{\perp} , dell'impulso del nucleone che partecipa al processo di diffusione e trascurando p_{\perp} , poiché ci troviamo in regime

di grande impulso trasferito, otteniamo

$$\nu = -M + E + \sqrt{p_{\parallel}^2 + |\mathbf{q}|^2 + 2p_{\parallel}|\mathbf{q}| + M^2} . \quad (2.28)$$

Procedendo ora in analogia con l'interpretazione della variabile di y trovata nel caso della diffusione su elio liquido, possiamo nuovamente identificare la variabile di scaling con l'impulso longitudinale. Arriviamo così a un'equazione che definisce y nel caso della diffusione elettrone-nucleo

$$y_{\pm} = -|\mathbf{q}| \pm \sqrt{(\nu - E)^2 + 2M(\nu - E)} . \quad (2.29)$$

L'equazione (2.21) ci mostra che, al contrario di quanto abbiamo visto nel Cap. 1, la funzione di risposta non compare nella sezione d'urto come un fattore moltiplicativo. La dinamica interna del bersaglio e l'interazione tra la sonda e il costituente risultano accoppiati a causa della dipendenza dall'impulso del nucleone \mathbf{p} della sezione d'urto elementare. Inoltre la dipendenza dell'integrando da \mathbf{q} non è contenuta solamente nell'argomento della funzione delta che descrive la conservazione dell'energia, ma coinvolge anche $(d^2\sigma_i/d\Omega dE_{e'})$. Ciò rende più complicato estrarre la funzione di scaling.

Questo problema può essere superato osservando che la funzione spettrale, come illustrato in Fig. ?? per il caso di materia nucleare uniforme con ugual numero di protoni e neutroni, decresce rapidamente al crescere di \mathbf{p} ed E . Ciò rende possibile portare fuori dall'integrale la sezione d'urto elementare $(d^2\sigma_i/d\Omega dE_{e'})$ calcolandola nel picco di $P(|\mathbf{p}|, E)$, \bar{p} , corrispondente ai valori minimi di energia e impulso consentiti. Trattando allo stesso modo il fattore cinematico derivante dall'integrazione attraverso la funzione delta otteniamo così l'espressione

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{e'}} \cong K \sum_{i=1}^A \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{e'}} \right)_{p=\bar{p}} \int d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 \int dE 2\pi P(|\mathbf{p}|, E) , \quad (2.30)$$

in cui si è definito

$$K = \left| \frac{d\nu_0}{d \cos \theta} \right|_{p=\bar{p}}^{-1} . \quad (2.31)$$

Si può identificare l'integrale nella (2.30) con la risposta del bersaglio nucleare, ed estrarla quindi dai dati sperimentali attraverso il rapporto

$$S(\mathbf{q}, \nu) \cong \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{e'}} / K \sum_i \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{e'}} \right)_{p=\bar{p}} . \quad (2.32)$$

2.2 Scaling in y della sezione d'urto elettrone-nucleo

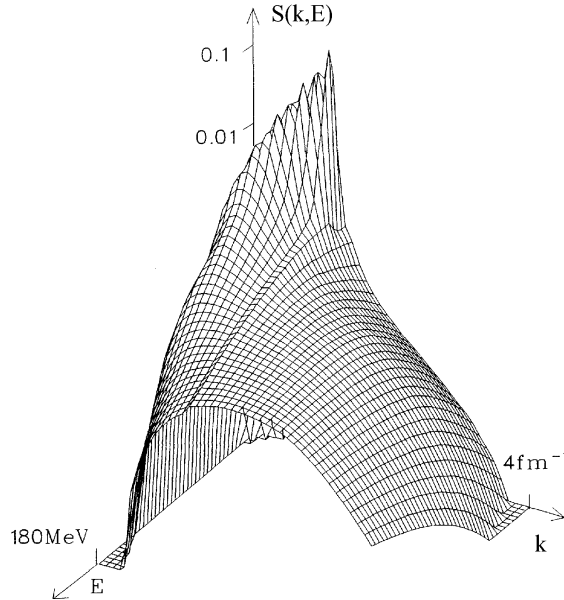


Figura 2.1: Funzione spettrale della materia nucleare con ugual numero di protoni e neutroni, ottenuta utilizzando la teoria a molti corpi non relativistica ed una hamiltoniana nucleare fenomenologica [13].

Avendo rimosso la dipendenza da $|\mathbf{q}|$, ci aspettiamo che per grandi valori dell'impulso trasferito i dati presentino scaling in y , ossia che

$$S(\mathbf{q}, \nu) \rightarrow F(y) \quad (2.33)$$

per $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$.

Il pannello superiore della Fig. 2.2 mostra le sezioni d'urto di scattering di elettroni di 4 GeV su bersaglio di Ferro, misurate alla Thomas Jefferson National Accelerator Facility (JLab) [14]. Le diverse curve corrispondono a diversi valori del momento trasferito, con $1 < |\mathbf{q}| < 4$ GeV. Le funzioni di scaling corrispondenti sono mostrate nel pannello inferiore. Si vede chiaramente che mentre le sezioni d'urto differiscono anche per molti ordini di grandezza, le $F(y)$ si sovrappongono a formare una unica curva per $y < 0$.

Per valori positivi della variabile y si osservano violazioni dello scaling, causate dai contributi alle sezioni d'urto provenienti da processi inelastici. Questo aspetto

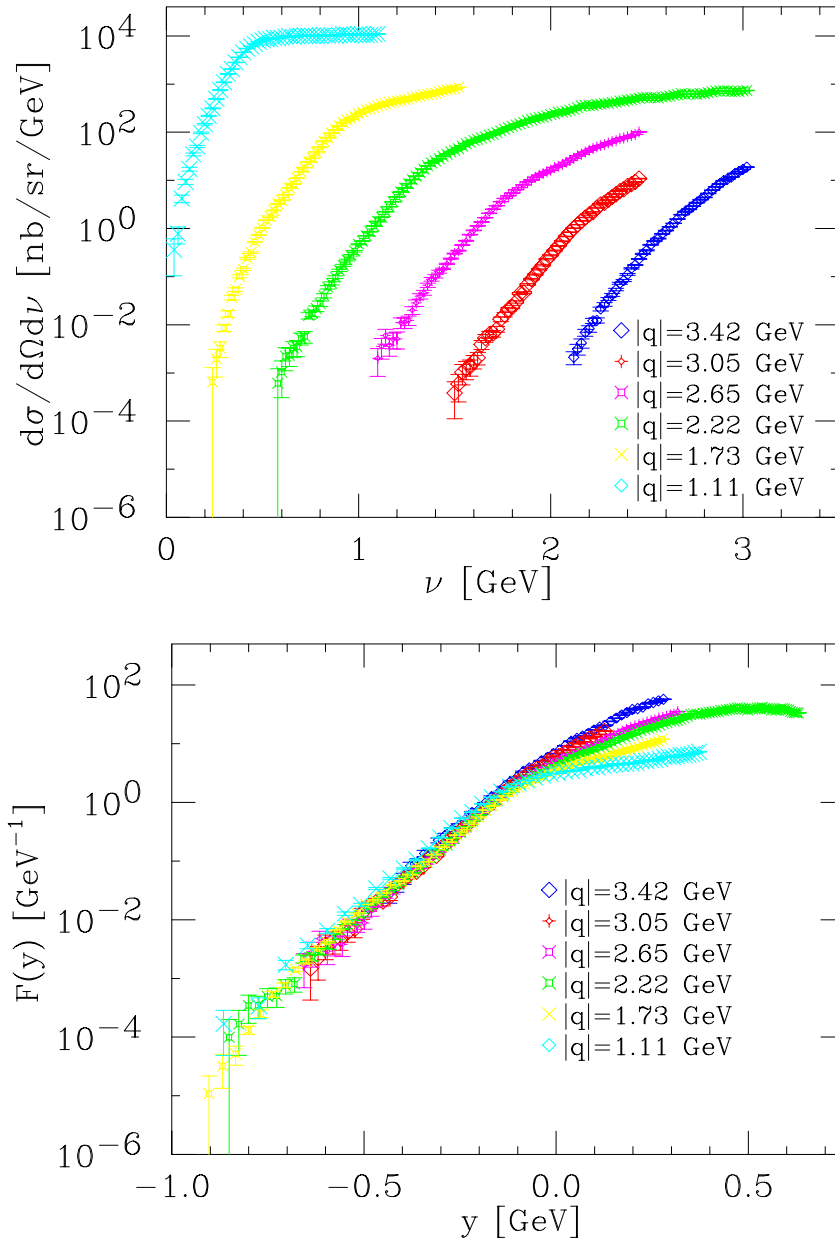


Figura 2.2: Pannello superiore: sezioni d'urto di diffusione di elettroni di 4 GeV su Ferro, graficate in funzione dell'energia trasferita per valori diversi del momento trasferito $|q|$ [14]]. Pannello inferiore: funzioni di scaling ottenute dalla sezioni d'urto del pannello superiore secondo l'equazione (2.32).

2.2 Scaling in y della sezione d'urto elettrone-nucleo

può essere spiegato facilmente considerando le soluzioni dell'equazione (2.29) che definisce la variabile di scaling y . La soluzione y_- corrisponde a valori dell'impulso longitudinale del nucleone negativi e maggiori in valore assoluto di $|\mathbf{q}|$. Il contributo corrispondente alla sezione d'urto è trascurabile, poichè la funzione spettrale decresce molto rapidamente coll'impulso (si veda la Fig. 2.1). La forma della soluzione y_+ , invece, fornisce una immediata spiegazione delle violazioni dello scaling. Se si trascura l'energia di rimozione del nucleone E , si verifica facilmente che i valori positivi di y_+ corrispondono a energia trasferita ν maggiore del valore $Q^2/2M$, in corrispondenza del quale lo scattering è elastico. Quindi la regione $y > 0$ corrisponde ai processi inelastici, nei quali lo stato finale adronico prodotto al vertice di interazione con l'elettrone non è un nucleone. Per questi processi la relazione che esprime la conservazione dell'energia non può essere scritta nella semplice forma che è alla base della comparsa della scaling in y . Di conseguenza, in questa regione le funzioni di scala corrispondenti a valori diversi di $|\mathbf{q}|$ differiscono.

Capitolo 3

Scaling in x nella diffusione su protoni

L'esempio più conosciuto in cui si è manifestato il fenomeno dello scaling, cioè il fatto che dalle sezioni d'urto misurate, che in generale dipendono sia dall'impulso che dall'energia trasferiti, si può estrarre una funzione di un'unica variabile, è probabilmente lo scaling delle funzioni di struttura del protone nella variabile di Bjorken, x . Per l'osservazione di questo tipo di scaling [15, 16], predetto da Bjorken nel 1969 [17], Friedman Kendall e Taylor hanno ricevuto il Premio Nobel nel 1990. In questo Capitolo discutiamo la diffusione di elettroni su protoni, la definizione della x e la sua interpretazione fisica..

Gli elementi essenziali del calcolo della sezione d'urto di diffusione di leptoni su protoni possono essere illustrati considerando un processo più semplice, in cui il bersaglio, anziché un protone, è un muone. Questo caso è discusso in dettaglio nell'Appendice A. La generalizzazione al caso del protone deve tener conto del fatto che, mentre il muone è una particella puntiforme, il protone ha una struttura interna. La diffusione elettrone-protone è uno degli strumenti più potenti per studiare tale struttura, a partire proprio dalle differenze che la sezione d'urto di tale processo presenta rispetto al caso in cui il bersaglio è un muone.

Dopo una breve descrizione della sezione d'urto elastica ed inelastica, nelle Sezioni 3.3 e 3.4 introdurremo la variabile x e le relazioni tra le funzioni di struttura nel regime asintotico del DIS, analoghe alle funzioni di scaling discusse nei Capitoli precedenti, e le distribuzioni dei *partoni*, cioè dei costituenti del protone.

3.1 Scattering Elastico Elettrone-Protone

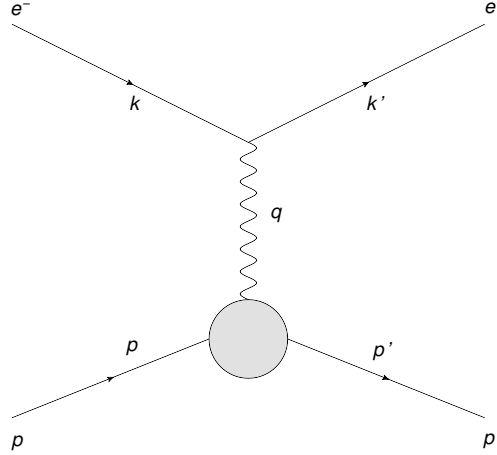


Figura 3.1: Diagramma di Feynman per il processo di diffusione elastica elettrone-protone.

Consideriamo il processo, illustrato dal diagramma di Feynman della Fig. 3.1

$$e(k) + p(p) \rightarrow e(k') + p(p') \quad (3.1)$$

in cui un elettrone di quadrimpulso iniziale k è diffuso su un protone di quadrimpulso p . I quadrimpulsi finali delle due particelle sono rispettivamente k' e p' .

Come nel caso in cui la diffusione avviene su un leptone, discusso nell'Appendice A, quando il bersaglio da cui l'elettrone viene diffuso è un protone, l'interazione consiste nello scambio di un fotone virtuale. Tuttavia ora la corrente associata al protone non è nota e bisogna quindi utilizzare l'espressione più generale possibile per la corrente elettromagnetica

$$J_\mu = \bar{u}(p')\Gamma_\mu u(p) . \quad (3.2)$$

Tenendo conto del fatto che gli spinori $u(p)$ e $\bar{u}(p)$ che descrivono il protone devono soddisfare l'equazione di Dirac, Γ_μ può coinvolgere soltanto i vettori γ_μ , q_μ e $i\sigma_{\mu\nu}q^\nu$, moltiplicati per opportune funzioni degli invarianti relativistici p^2 , p'^2 e q^2 . Possiamo quindi scrivere

$$J_\mu \equiv \bar{u}(p') [\Gamma_1(q^2)\gamma_\mu + \Gamma_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + \Gamma_3(q^2)q_\mu] u(p) . \quad (3.3)$$

Poiché stiamo considerando il caso di diffusione elastica, il protone dopo l'urto mantiene la sua identità, per cui si ha non soltanto $p^2 = M^2$, dove M è la massa del protone, ma anche $(p')^2 = M^2$. Ricordiamo inoltre che $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$.

La condizione di conservazione della corrente, $q^\mu J_\mu = 0$, fa sì che $\Gamma_3(q^2) \equiv 0$, poiché i fattori che moltiplicano le funzioni $\Gamma_1(q^2)$ e $\Gamma_2(q^2)$ si annullano separatamente una volta moltiplicati per q^μ . La (3.3) si riduce quindi a

$$J_\mu = \bar{u}(p') \left[F_1(q^2)\gamma_\mu + \kappa \frac{F_2(q^2)}{2M} i\sigma_{\mu\nu}q^\nu \right] u(p) , \quad (3.4)$$

dove κ è il momento magnetico anomalo del protone, pari a 1.79 magnetoni di Bohr. Le funzioni $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ nell'equazione precedente sono tali che

$$\begin{aligned} F_1(0) &= 1 \\ F_2(0) &= 1 . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Infatti, nel caso in cui $q^2 \rightarrow 0$, la lunghezza d'onda del fotone virtuale è molto grande e si è insensibili alla struttura interna del protone che appare alla sonda come una particella puntiforme di carica e e momento magnetico $(1 + \kappa)e/2M$.

A partire dall'espressione della corrente nell'equazione (3.4) è possibile calcolare la sezione d'urto in modo del tutto analogo al caso dello scattering elettrone-muone. L'unica differenza sarà data dal modulo quadro dell'ampiezza invariante che possiamo adesso scrivere come

$$\overline{\sum_i \sum_f} |M_{if}|^2 = \frac{e^2}{q^2} L_{\mu\nu}^{(e)} W_{(P)}^{\mu\nu} , \quad (3.6)$$

dove

$$W_{(P)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr(\not{p}' + M)\Gamma^\mu(\not{p} + M)\Gamma^\nu \quad (3.7)$$

è il tensore del protone e

$$\Gamma^\mu \equiv \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{\kappa F_2(q^2)}{2M} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \quad (3.8)$$

sostituisce l'usuale matrice γ^μ che avevamo nel caso del muone. A questo punto possiamo di nuovo contrarre i due tensori e procedere in modo analogo alla Sezione precedente ottenendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \frac{E'}{E} \left[\left(F_1^2 + \frac{\kappa^2 Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) + \frac{Q^2}{2M^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] . \quad (3.9)$$

3.1 Scattering Elastico Elettrone-Protone

L'equazione (3.9) è detta *formula di Rosenbluth*. Come anticipato, il confronto con la sezione d'urto di scattering elettrone-muone è immediato: infatti, nel caso in cui il protone fosse un oggetto privo di struttura interna, κ sarebbe nullo e $F_1(q^2) = 1$, e si otterrebbe la (A.23).

È possibile riscrivere la sezione d'urto elastica elettrone-protone in termini di due nuove funzioni, dette *fattori di forma elettrico e magnetico*, definiti dalle

$$\begin{aligned} G_E &= F_1 - \frac{\kappa Q^2}{4M^2} F_2 \\ G_M &= F_1 + \kappa F_2 , \end{aligned} \quad (3.10)$$

ottenendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left[\frac{G_E^2 + (Q^2/4M^2)G_M^2}{1 + Q^2/4M^2} + \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] . \quad (3.11)$$

L'espressione esplicita della sezione d'urto di Mott, $(d\sigma/d\Omega)_{Mott}$ è riportata nell'equazione (A.24) dell'Appendice A.

I fattori di forma possono essere ricavati dal confronto tra la (3.11) e la (A.24). L'equazione (3.11) può essere infatti scritta come

$$\frac{d\sigma/d\Omega}{(d\sigma/d\Omega)_{Mott}} = A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} , \quad (3.12)$$

in cui

$$\begin{aligned} A(Q^2) &= \frac{G_E^2 + (Q^2/4M^2)G_M^2}{1 + Q^2/4M^2} \\ B(Q^2) &= \frac{Q^2 G_M^2}{2M^2} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Effettuando una serie di esperimenti a diversi valori di Q^2 e misurando ogni volta la sezione d'urto in funzione dell'angolo θ è possibile rappresentare la (3.12) come una retta nel piano definito da $(d\sigma/d\Omega)/(d\sigma/d\Omega)_{Mott}$ e $\tan^2(\theta/2)$ (Fig. 3.2).

Il fatto che per un valore fissato di Q^2 l'andamento osservato sperimentalmente di $(d\sigma/d\Omega)/(d\sigma/d\Omega)_{Mott}$ in funzione di $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ sia lineare conferma l'ipotesi che il meccanismo dominante nel processo di scattering sia lo scambio di un singolo fotone. A questo punto il valore di G_M a Q^2 fissato può essere ricavato direttamente dalla seconda delle (3.13), che inserita nella prima ci permette di ricavare anche

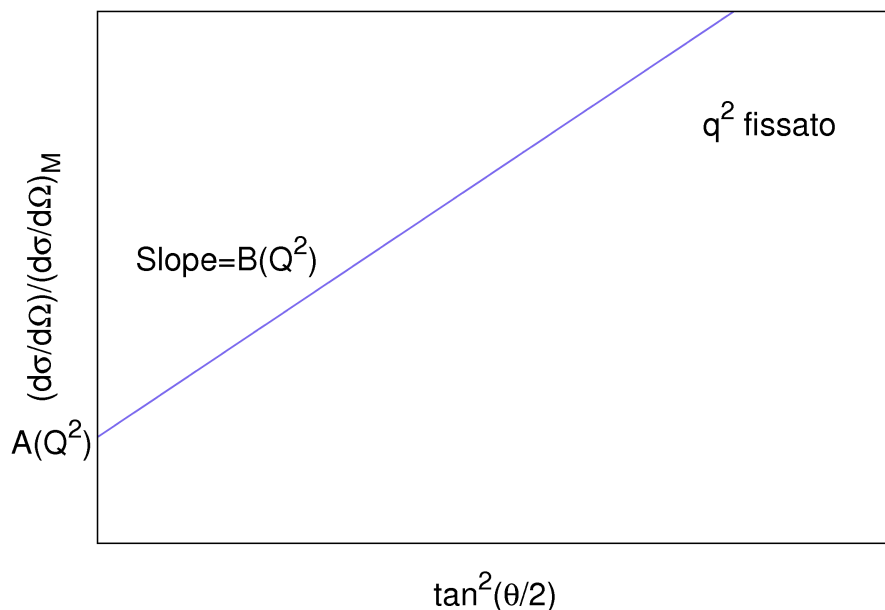


Figura 3.2: Relazione lineare tra $(d\sigma/d\Omega)/(d\sigma/d\Omega)_{Mott}$ e $\tan^2(\theta/2)$ a valori fissati di q^2 .

G_E . Ripetendo il procedimento per diversi valori dell'impulso trasferito si ottiene l'andamento di G_E e G_M in funzione di Q^2 .

Quanto si ottiene dai dati sperimentali [18] è rappresentato per il protone in Fig. 3.3. I fattori di forma risultano abbastanza ben descritti da un andamento dipolare

$$G(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right), \quad (3.14)$$

con $m = 0.71 \text{ GeV}^2$. Corrispondono quindi ad una distribuzione di carica di tipo esponenziale, $\rho \approx \exp(-mr)$, con un raggio quadratico medio di 0.8 fm, di cui il fattore di forma non è altro che la trasformata di Fourier.

3.2 Scattering Anelastico Elettrone-Protone

Finora abbiamo considerato soltanto il caso di diffusione elastica, in cui il protone mantiene la sua identità.

3.2 Scattering Anelastico Elettrone-Protone

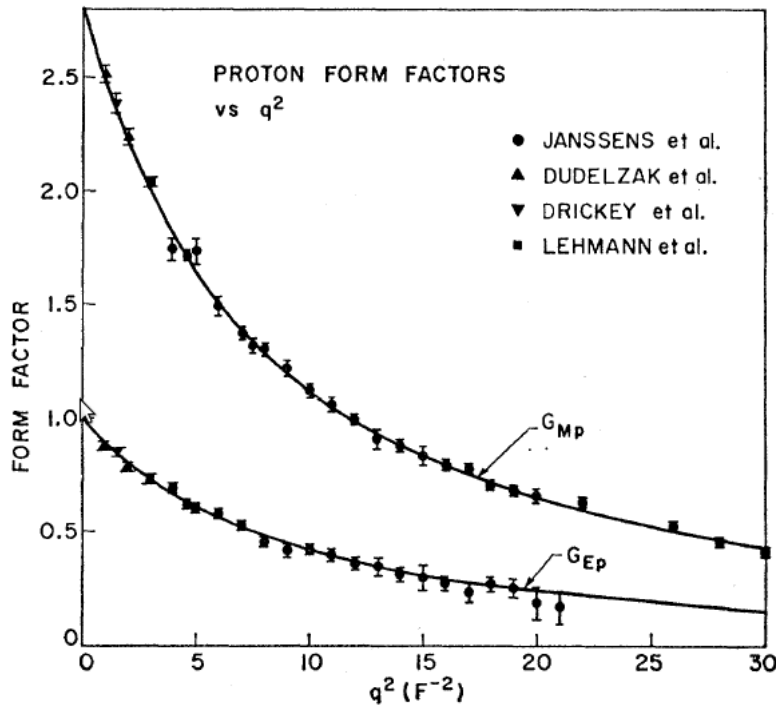
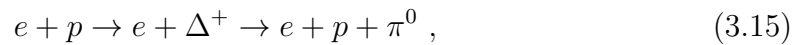


Figura 3.3: Fattori di forma elettrico e magnetico del protone in funzione di q^2 [18].

A grandi valori dell'impulso trasferito la sezione d'urto elastica si riduce, a causa della presenza dei fattori di forma, e diventano più probabili processi in cui il protone viene eccitato o frantumato, e vengono prodotti adroni diversi nello stato finale.

Per valori relativamente piccoli di q^2 si verifica l'eccitazione di stati risonanti che decadono successivamente, come ad esempio nel caso



in cui è prodotta la risonanza Δ^+ che decade poi in un protone e un π^0 .

A valori più alti di q^2 però, il protone viene frantumato e perde completamente la sua identità. Possiamo scrivere questo processo nella forma



dove X rappresenta il sistema adronico nello stato finale.

La prima differenza rispetto al caso elastico risiede nel fatto che l'energia ν e il quadrimomento q^2 trasferiti, prima legati dalla relazione $\nu = -q^2/2M$, sono adesso

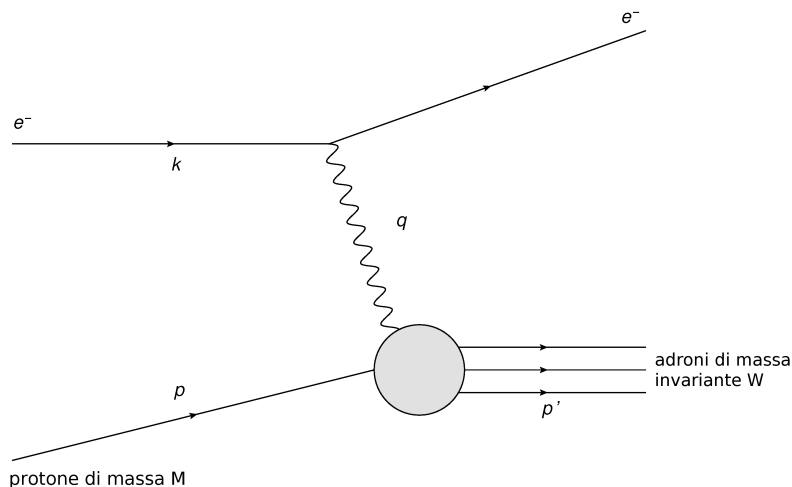


Figura 3.4: Diagramma di Feynman per il processo di diffusione anelastica elettrone-protone.

indipendenti. La presenza della funzione delta nella sezione d'urto elastica elettrone-muone (A.21) esprime proprio il legame tra le due grandezze. Nel caso anelastico invece, la conservazione dell'energia nel vertice adronico prevede che

$$p' = p + q \quad (3.17)$$

da cui

$$(p')^2 = p^2 + 2p \cdot q + q^2 . \quad (3.18)$$

Ora p'^2 non coincide più con la massa al quadrato del protone ma è la massa invariante al quadrato del sistema adronico, che chiameremo W^2 . Inoltre, poichè nel sistema di riferimento del laboratorio $p \cdot q = M\nu$, e ricordando che $-q^2 = Q^2$, otteniamo

$$Q^2 = 2M\nu + M^2 - W^2 . \quad (3.19)$$

Questa relazione mostra che, essendo la massa invariante del sistema adronico variabile, Q^2 (e quindi q^2) e ν sono variabili indipendenti.

La rappresentazione grafica della regione cinematica esplorata, illustrata in Fig. 3.5, è molto semplificata dall'introduzione della variabile adimensionale $x = Q^2/2M\nu$,

3.2 Scattering Anelastico Elettrone-Protone

che, come vedremo in seguito, ha un ruolo molto importante nell'analisi dei processi di diffusione anelastica. In base a quanto detto finora, lo scattering elastico corrisponde al caso in cui $W^2 = M^2$ e quindi $Q^2 = 2M\nu$. Se consideriamo il piano definito da $2M\nu$ e Q^2 , il caso elastico può essere rappresentato da una retta inclinata di 45° rispetto all'asse $2M\nu$, corrispondente a $x = 1$.

La regione al di sopra della retta è cinematicamente proibita mentre al di sotto della retta troviamo la regione di scattering anelastico, in cui $W^2 > M^2$ e quindi $Q^2 < 2M\nu$. La produzione di sistemi adronici con massa invariante W fissata, come ad esempio gli stati risonanti del protone, corrisponde a delle rette parallele a $x = 1$. Se viene prodotta una risonanza di massa invariante W' , la retta intersecherà l'asse orizzontale in $2M\nu = (W')^2 - M^2$. Poiché per definizione $Q^2 = 2M\nu x$, rette a x costante passeranno per l'origine e avranno coefficiente angolare x . La regione in cui sia Q^2 sia ν assumono valori molto grandi, è detta regione di *scattering profondamente anelastico* (*Deep Inelastic Scattering*, o DIS), dove la struttura interna del protone viene rivelata dalla sonda.

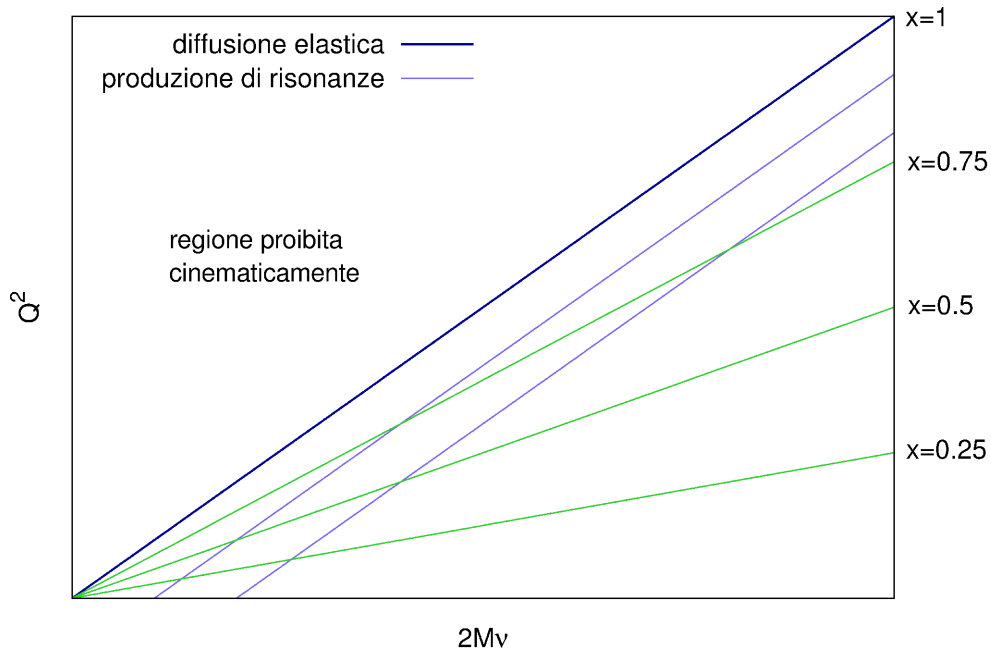


Figura 3.5: Regione cinematica esplorata nel processo $ep \rightarrow eX$

Per derivare l'espressione della sezione d'urto, assumiamo che, come nel caso di scattering elastico, il meccanismo di interazione dominante sia lo scambio di un singolo fotone virtuale e che vengano misurati soltanto l'energia e l'angolo θ dell'elettrone diffuso rispetto alla direzione del fascio di elettroni incidenti. La sezione d'urto così calcolata viene detta *inclusiva* e può essere scritta in modo completamente analogo al caso elastico, con la condizione di sostituire il tensore del protone con quello adronico $W^{\mu\nu}$.

Si avrà quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2 E}{Q^4 E'} L_{\mu\nu}^{(e)} W^{\mu\nu} , \quad (3.20)$$

dove

$$L_{\mu\nu}^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{s_{(e)}, s'_{(e)}} \bar{u}(k', s'_{(e)}) \gamma_\mu u(k, s_{(e)}) \bar{u}(k, s_{(e)}) \gamma_\nu u(k', s'_{(e)}) . \quad (3.21)$$

La definizione del tensore adronico

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_n \langle p | J_\mu^\dagger | n \rangle \langle n | J_\nu | p \rangle (2\pi)^3 \delta^{(4)}(p + q - p_n) , \quad (3.22)$$

coinvolge lo stato iniziale $|0\rangle$ e la somma è su tutti i possibili stati finali adronici $|X\rangle$. Nella (3.22) sono quindi contenute tutte le informazioni sulla struttura interna del bersaglio.

Ai fini del calcolo è necessario contrarre il tensore adronico con quello leptonic. Quest'ultimo è simmetrico negli indici $\mu\nu$, e quindi solo la parte simmetrica di $W^{\mu\nu}$ darà contributo non nullo. Se il protone nello stato iniziale non è polarizzato, la forma più generale per il tensore adronico è

$$W^{\mu\nu} = W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_3}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_4}{M^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) , \quad (3.23)$$

dove le W_i sono funzioni degli invarianti $p \cdot q$ e q^2 , mentre $g^{\mu\nu}$ è il tensore metrico. Imponendo la condizione di invarianza di gauge

$$q_\mu W^{\mu\nu} = 0 \quad (3.24)$$

per ogni ν e q^2 , otteniamo

$$\begin{aligned} W_4 &= -W_2(p \cdot q/q^2) \\ W_3 &= W_2(p \cdot q/q^2)^2 - W_1 M^2/q^2 , \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.3 Scaling di Bjorken

da cui

$$W^{\mu\nu} = W_1(\nu, q^2) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2(\nu, q^2)}{M^2} \left[\left(p^\mu + \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu + \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \right]. \quad (3.26)$$

Contraendo la (3.26) con il tensore leptónico della (3.21), otteniamo

$$L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = 4W_1 k \cdot k' + \frac{W_2}{M^2} (4(p \cdot k)(p' \cdot k') - 2(k \cdot k')M^2). \quad (3.27)$$

Vogliamo di nuovo effettuare il calcolo nel sistema di riferimento del laboratorio, in cui il protone nello stato iniziale è fermo. Sostituendo la (3.27) nella (3.20) si ottiene l'espressione finale della sezione d'urto differenziale elettrone protone nel caso anelastico

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha^2(E')^2}{Q^4} \left[W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.28)$$

La complessità del protone si riflette nella presenza delle funzioni $W_1(\nu, q^2)$ e $W_2(\nu, q^2)$, che prendono il nome di *funzioni di struttura*.

3.3 Scaling di Bjorken

L'espressione (3.28) per la sezione d'urto di scattering anelastico elettrone-protone ha ora una struttura immediatamente confrontabile con quella ottenuta nel caso elastico, sia per il protone che per il muone.

Facendo riferimento alla (3.11) si ricava infatti la forma che le funzioni di struttura W_1 e W_2 assumono nel caso elastico:

$$W_1^{el}(\nu, Q^2) = \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2(Q^2) \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2M} \right) \\ W_2^{el}(\nu, Q^2) = \frac{G_E^2(Q^2) + (Q^2/4M^2)G_M^2(Q^2)}{1 + Q^2/4M^2} \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2M} \right). \quad (3.29)$$

Le (3.29) ci mostrano che, fissato il valore della massa invariante W , che corrisponde alla condizione di diffusione elastica o di produzione di stati risonanti del protone,

$$\left. \begin{array}{l} MW_1(W, Q^2) \\ \nu W_2(W, Q^2) \end{array} \right\} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0, \quad (3.30)$$

a causa della presenza dei fattori di forma G_E e G_M che fanno in modo che la sezione d'urto vada a zero rapidamente per grandi valori di Q^2 .

L'andamento dei dati raccolti negli esperimenti di scattering rispecchia perfettamente questo risultato, mettendo inoltre in evidenza un ulteriore fenomeno di grande interesse. Per valori fissati della variabile $x = Q^2/2M\nu$, già introdotta nella sezione precedente, e per $Q^2 \geq 1\text{GeV}^2$, le funzioni di struttura diventano indipendenti da Q^2 . Questo fenomeno, detto *scaling* di Bjorken, venne predetto per la prima volta nel 1969 [17], ed è stato verificato sperimentalmente da Friedman, Kendall e Taylor [15, 16]. Le funzioni di struttura dipendono dal quadrimpulso e dall'energia trasferiti durante il processo di scattering soltanto attraverso il rapporto adimensionale x , che prende il nome di *variabile di scaling*.

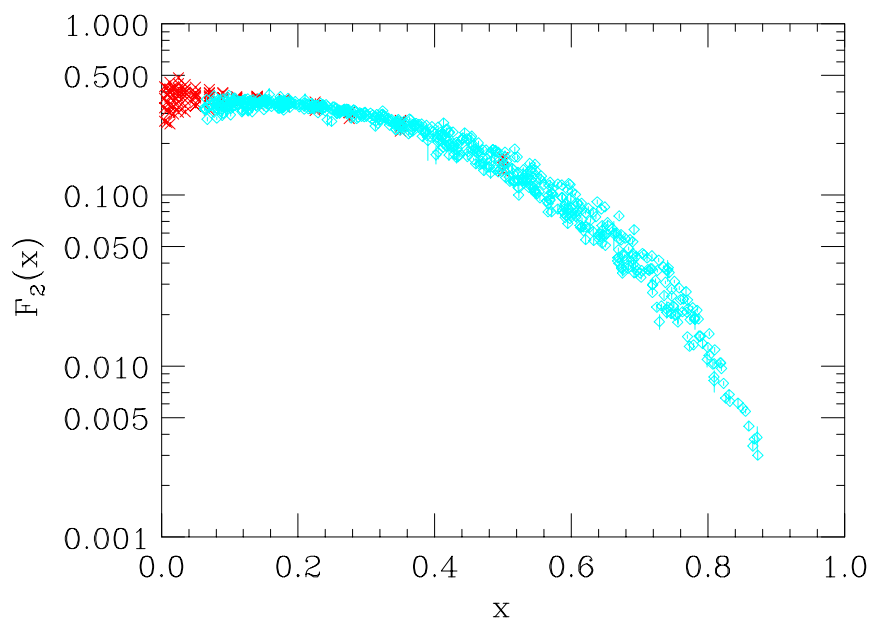


Figura 3.6: Dipendenza dalla variabile x di Bjorken della funzione di struttura del protone F_2^P misurata al CERN [19] e a SLAC [20] usando, rispettivamente, fasci di muoni ed elettroni.

La Fig. 3.3 mostra lo scaling della funzione di struttura del protone, misurata al CERN [19] e a SLAC [20] usando, rispettivamente, fasci di muoni ed elettroni. I dati del CERN corrispondono a $Q^2 \leq 12 \text{ GeV}^2$, mentre quelli di SLAC coprono la regione $Q^2 \leq 20 \text{ GeV}^2$

3.3 Scaling di Bjorken

Il comportamento di scaling nelle funzioni di struttura si verifica in modo naturale qualora lo scattering anelastico elettrone-protone sia dovuto alla somma incoerente dei processi di diffusione sui costituenti puntiformi del protone. In base a quanto abbiamo derivato nel caso del muone infatti, le sezioni d'urto dei processi che coinvolgono particelle prive di struttura non presentano dipendenza da alcuna scala di massa.

Le sezioni d'urto per i due diversi bersagli assumono una forma generale comune

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha E'^2}{Q^4} S, \quad (3.31)$$

in cui S descrive, nel caso in cui sia presente, la struttura del bersaglio considerato.

Nel caso di diffusione elastica su muoni, e quindi di assenza di struttura, otteniamo dalla (A.19)

$$S_{e\mu \rightarrow e\mu} = \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2M^2} \right), \quad (3.32)$$

in cui M è la massa del muone. Sottolineiamo ancora una volta che la presenza della funzione delta esprime proprio il fatto che il processo è elastico e che le variabili ν e Q^2 sono non indipendenti. Questo non è più vero nel caso della diffusione anelastica di elettroni su protoni in cui, dalla (3.28), si ha

$$S_{ep \rightarrow eX} = W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.33)$$

A questo punto, possiamo confrontare le espressioni di S per i due processi. Nel momento in cui assumiamo che per valori alti dell'impulso trasferito la diffusione avvenga su un costituente libero, la sezione d'urto elettrone-protone dovrà ridursi a quella del caso puntiforme. Lo stesso accadrà anche alle funzioni di struttura, che dovranno soddisfare le relazioni

$$\begin{aligned} 2W_1(Q^2, \nu) &= \frac{Q^2}{2m^2} \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2m} \right) \\ W_2(Q^2, \nu) &= \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2m} \right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

dove m è adesso la massa del costituente che partecipa al processo di diffusione. Usando la proprietà della funzione delta $\delta(ax) = a^{-1}\delta(x)$, le (3.34) si possono

riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} 2mW_1(Q^2, \nu) &= \frac{Q^2}{2m\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) = x\delta(1-x) \\ 2mW_2(Q^2, \nu) &= \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) = \delta(1-x), \end{aligned} \tag{3.35}$$

dalla quale emerge chiaramente il comportamento di scaling segnalato dai dati sperimentali. È quindi ragionevole assumere che, entrando nella regione del deep inelastic scattering, e quindi all'aumentare dell'impulso trasferito e man mano che la lunghezza d'onda del fotone virtuale diventa sempre più piccola, lo scattering elastico sul protone, dovuto all'azione coerente dei quark che lo compongono, venga sostituito dalla somma incoerente dei processi elastici che li coinvolgono.

In conclusione, l'ipotesi dello scaling di Bjorken può essere quindi enunciata come segue: nel limite

$$\begin{aligned} Q^2 &\rightarrow \infty \\ \nu &\rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{3.36}$$

con $x = Q^2/2M\nu$ fissata, per le funzioni di struttura valgono le relazioni

$$\begin{aligned} MW_1(x, Q^2) &\rightarrow F_1(x) \\ \nu W_2(x, Q^2) &\rightarrow F_2(x). \end{aligned} \tag{3.37}$$

3.4 Il Modello a Partoni

L'interpretazione fisica del DIS e dello scaling di Bjorken si può spiegare in modo molto semplice scegliendo opportunamente il sistema di riferimento in cui calcolare le variabili cinematiche. Se ci poniamo in un riferimento in cui il protone bersaglio si muove con grande impulso, gli impulsi trasversi e le masse a riposo dei costituenti possono essere trascurati, semplificando così la trattazione, che coinvolge i soli impulsi longitudinali. Questa è la base del *modello a partoni* introdotto per la prima volta da Feynman [21] per spiegare il fenomeno dello scaling di Bjorken. Oggi sappiamo che i *partoni* del modello possono essere identificati con quark e gluoni.

Rappresentando il protone come un aggregato di partoni quasi-liberi, l'interazione con l'elettrone può essere vista, in AI, come la somma incoerente dei processi elastici che coinvolgono i singoli costituenti. Questa approssimazione è valida finché

3.4 Il Modello a Partoni

la durata dell'interazione fotone-partone è così breve da permetterci di trascurare le interazioni tra i partoni stessi. Nell'ambito dello scattering profondamente inelastico questo è possibile perché le interazioni a breve distanza tra i partoni sono deboli. La teoria fondamentale delle interazioni forti prevede infatti che l'accoppiamento tra i quark decresca dando luogo, nel limite di $r \rightarrow 0$, al fenomeno della *libertà asintotica*. In questo regime, i partoni possono essere considerati come particelle libere all'interno del nucleone.

Immaginiamo quindi un sistema di riferimento in cui il protone bersaglio abbia impulso \mathbf{p} molto grande, detto *infinite momentum frame*. La sua massa M può essere trascurata in modo che il suo quadrimpulso risulti $p = (p, 0, 0, p)$.

Possiamo considerare il protone come uno sciame di partoni quasi-liberi. Ognuno di essi può trasportare soltanto una frazione x dell'impulso e dell'energia del protone in modo che l' i -esimo partone abbia quadrimpulso

$$p_i = xp , \quad (3.38)$$

e massa

$$m_i \approx xM , \quad (3.39)$$

con $0 < x < 1$.

Se p è grande, anche le masse e gli impulsi trasversi dei partoni potranno essere trascurati. Assumendo che il singolo costituente interagisca elasticamente con l'elettrone diffuso assorbendo il quadrimpulso q del fotone, dopo l'urto il quadrimpulso del partone sarà $p'_i = xp + q$ e avremo

$$\begin{aligned} (p'_i)^2 &= (xp + q)^2 = m_i^2 \\ x^2 p^2 + 2xp \cdot q + q^2 &\approx 0 . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Se $|x^2 p^2| = x^2 M^2 \ll q^2$ si ottiene infine

$$x = \frac{-q^2}{2p \cdot q} = \frac{-q^2}{2M\nu} , \quad (3.41)$$

in cui il prodotto scalare invariante $p \cdot q$ è stato calcolato nel riferimento del laboratorio.

La variabile di scaling di Bjorken trova quindi nel contesto del modello a partoni un'interpretazione fisica immediata, in quanto coincide con la frazione di impulso

trasportata dal singolo partone costituente. Tuttavia questa identificazione è valida soltanto nell'infinita momentum frame in cui siamo autorizzati a trascurare impulsi trasversi e masse a riposo dei partoni.

Poiché sappiamo che i quark all'interno del protone sono particelle di spin $1/2$, la sezione d'urto di scattering sul singolo partone può essere scritta in modo analogo a quella $e - \mu$. I quark hanno però carica frazionaria, quindi sarà necessaria, nella (A.19), la sostituzione

$$\alpha \rightarrow \alpha e_i \quad (3.42)$$

dove e_i è la frazione di carica dell' i -esimo partone.

In conclusione, la sezione d'urto di scattering elastico elettrone-partone può essere scritta come

$$\frac{d^2\sigma_i}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2(E')^2}{Q^4} \left[e_i^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + e_i^2 \frac{Q^2}{2m_i^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i} \right) . \quad (3.43)$$

Confrontando la (3.43) con la (3.28) e ricordando che $m_i = xM$, è immediato ricavare il contributo del partone i -esimo alle funzioni di struttura del protone W_1 e W_2 :

$$\begin{aligned} W_1^i &= e_i^2 \frac{Q^2}{4M^2 x^2} \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx} \right) \\ W_2^i &= e_i^2 \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Poiché ognuno dei partoni all'interno del protone può portare una diversa frazione di impulso, dobbiamo introdurre la funzione $f_i(x)$, che rappresenta la probabilità che l' i -esimo partone trasporti proprio la frazione di impulso x . Assumiamo che il processo di scattering elettrone-quark coinvolga un solo partone alla volta lasciando che gli altri facciano da spettatori, il che ci permette di fare la somma incoerente dei contributi dei singoli quark. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} W_1(Q^2, \nu) &= \sum_i \int e_i^2 \frac{Q^2}{4M^2 x} f_i(x) \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx} \right) dx \\ W_2(Q^2, \nu) &= \sum_i \int e_i^2 f_i(x) \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx} \right) dx . \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.4 Il Modello a Partoni

Le (3.45) possono essere integrate utilizzando di nuovo le proprietà della funzione delta. Così facendo si ottengono le relazioni

$$\begin{aligned} MW_1(Q^2, \nu) &= \sum_i \frac{e_i^2}{2} f_i(x) \equiv F_1(x) \\ \nu W_2(Q^2, \nu) &= \sum_i e_i^2 x f_i(x) \equiv F_2(x) , \end{aligned} \quad (3.46)$$

dalle quali segue che

$$2xF_1(x) = F_2(x) . \quad (3.47)$$

Quest'ultima relazione è detta *relazione di Callan-Gross* ed è valida soltanto nel caso in cui le particelle costituenti del bersaglio abbiano spin 1/2 [22]. La (3.47) venne sperimentalmente confermata dall'andamento dei dati sperimentali e fu una delle prime conferme dell'ipotesi che i partoni del modello di Feynman coincidono con i quark.

I numeri quantici del protone si ottengono correttamente assumendo che sia costituito da due quark di tipo u e uno di tipo d , detti *quark di valenza*, e non vengono modificati dalla presenza di coppie quark-antiquark (f, \bar{f}), chiamati *quark del mare*, il cui contributo è nullo per ogni flavor f ($f = u, d, s, c, b, t$).

Usando la seconda delle equazioni (3.46) possiamo scrivere la funzione di struttura di scattering elettrone-protone F_2 come

$$F_2 = x \left\{ \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [s(x) + \bar{s}(x)] \right\} . \quad (3.48)$$

Nell'espressione precedente $u(x)$ è, ad esempio, la distribuzione di densità di probabilità dei quark di tipo u , $\bar{u}(x)$ quella per gli antiquark \bar{u} e così via. Stiamo inoltre assumendo che il contributo dei quark pesanti, di flavor c, b e t , sia trascurabile.

Esprimendo le funzioni di distribuzione in termini di contributi di valenza e del mare, per qualsiasi flavor $f(x)$ si ha

$$q(x) = q_v(x) + q_s(x) . \quad (3.49)$$

Nel protone, il contributo di valenza viene soltanto dai quark u e d , mentre gli antiquark e i quark strange faranno parte del mare. Si avrà quindi

$$q_v(x) = 0 \quad \text{per } q \equiv s, \bar{s}, \bar{u}, \bar{d} \quad (3.50)$$

e

$$\begin{aligned} u(x) &= u_v(x) + u_s(x) \\ d(x) &= d_v(x) + d_s(x) . \end{aligned} \tag{3.51}$$

Facendo l'ulteriore semplificazione che i tre quark leggeri contribuiscano al mare con la stessa frequenza e la stessa funzione di distribuzione, possiamo inoltre scrivere

$$u_s(x) = d_s(x) = s_s(x) = \bar{u}_s(x) = \bar{d}_s(x) = \bar{s}_s(x) = s(x) , \tag{3.52}$$

che, sostituita nella (3.48) insieme alle (3.50) e (3.51), ci permette di ottenere l'espressione della funzione di struttura del protone:

$$F_2(x) = \frac{x}{9}[4u_v(x) + d_v(x)] + \frac{4}{3}xs(x) . \tag{3.53}$$

Abbiamo calcolato la funzione di struttura $F_2(x)$ per il protone data dalla (3.53), utilizzando le funzioni di distribuzione dei partoni ottenute dalla collaborazione CTEQ analizzando i tutti dati di DIS disponibili [23]. L'andamento di F_2 in funzione di x è mostrato nella Fig. 3.7 per diversi valori di Q^2 . La sovrapposizione delle curve corrispondenti a Q^2 diversi dimostra in modo evidente il verificarsi del fenomeno di scaling.

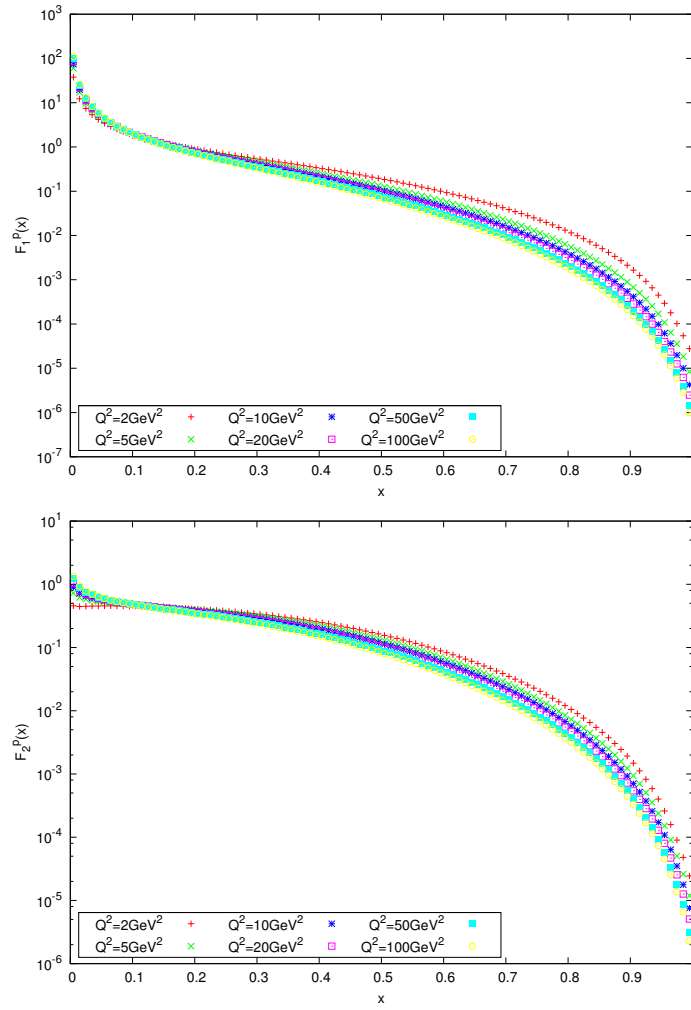


Figura 3.7: Dipendenza dalla variabile x di Bjorken delle funzioni di struttura del protone F_1^P (a) e F_2^P (b).

Capitolo 4

Scaling in y nella diffusione su protoni

In questo Capitolo discuteremo la relazione tra lo scaling osservato nella diffusione da sistemi di molti corpi, come l'elio liquido e i nuclei atomici, analizzati rispettivamente nei Capitoli 1 e 2, e lo scaling nella variabile di Bjorken osservato nella diffusione profondamente inelastica di leptoni da protoni e discusso nel Capitolo 3. Questa analisi permette di dare un'interpretazione fisica alla variabile di scala nel sistema del laboratorio e mostra che il verificarsi dello scaling non implica né che i costituenti elementari del bersaglio siano di massa nulla, né che si comportino come particelle libere.

Estenderemo poi la trattazione al caso di un nucleone legato e in moto all'interno di un nucleo e vedremo come l'uso della nuova variabile di scaling consenta di analizzare alcuni importanti aspetti della diffusione profondamente anelastica di leptoni su bersagli nucleari.

4.1 Il protone come sistema di molti corpi

Si può generalizzare il formalismo utilizzato nel Capitolo 2 al caso della diffusione profondamente anelastica leptone-protone. Se consideriamo il protone come un sistema di molti corpi, in modo del tutto analogo a quanto visto per i nuclei, è possibile estrarre la funzione di risposta dalla sezione d'urto di scattering [24].

L'elettrone è adesso diffuso su un protone libero di massa M , i cui N costituenti sono particelle di Dirac puntiformi dotate di massa m e di carica e_i , legate all'interno

4.1 Il protone come sistema di molti corpi

del nucleone. Ricordando la (2.21), possiamo scrivere la sezione d'urto di scattering $e-p$ in approssimazione impulsiva come

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE_{e'}} = \sum_{i=1}^N \int d^3k dk_0 P(\mathbf{k}, k_0) \left(\frac{d\sigma_i}{d\Omega dE_{e'}} \right) \delta(\nu + k_0 - E_{\mathbf{k}'}) , \quad (4.1)$$

in cui \mathbf{k} è l'impulso del costituente del nucleone che interagisce con la sonda e

$$k_0 = M - E_{\mathcal{R}}^N(-\mathbf{k}) \quad (4.2)$$

è la sua energia. Nella (4.2), $E_{\mathcal{R}}^N(-\mathbf{k})$ è l'energia di rinculo del sistema residuo composto di $(N - 1)$ partoni. L'energia del partone dopo l'interazione è invece data dall'equazione $E'_k = \sqrt{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 + m^2}$, in cui \mathbf{q} è l'impulso trasferito dalla sonda al partone. La funzione spettrale $P(\mathbf{k}, k_0)$ che compare nella (4.1), descrive adesso la distribuzione in impulso ed energia dei costituenti del nucleone. Non esaminiamo le caratteristiche della funzione spettrale dei partoni, in quanto questo richiederebbe l'introduzione di un modello dinamico per la struttura del protone, cosa al di fuori degli argomenti che ci siamo proposti di discutere in questo lavoro.

Le sezioni d'urto elementari che compaiono nella (4.1) sono relative alla diffusione elastica dell'elettrone da parte del partone. Poiché i costituenti del bersaglio sono particelle legate, è conveniente introdurre nuovamente le variabili

$$\tilde{q} = (\tilde{\nu}, \mathbf{q}) \quad (4.3)$$

$$\tilde{\nu} = \nu + k_0 - E_k \quad (4.4)$$

$$\tilde{p} = (E_k, \mathbf{k}) . \quad (4.5)$$

La sezione d'urto assume la forma

$$\frac{d\sigma_i}{d\Omega dE_{e'}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left[\sigma_2^i + 2\sigma_1^i \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] , \quad (4.6)$$

in cui

$$\begin{aligned} \sigma_1^i &= \frac{m^2}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \left[w_1^i + \frac{1}{2} \frac{k_{\perp}^2}{m^2} w_2^i \right] \\ \sigma_2^i &= \frac{m^2}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} \left\{ w_1^i \left(\frac{\tilde{q}}{q^2} - 1 \right) + w_2^i \left[\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_{\mathbf{k}} - \tilde{\nu} \frac{\tilde{q}p}{\tilde{q}^2} \right)^2 - \frac{p_{\perp}^2}{2} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.7)$$

dove $k_{\perp} = |\mathbf{k} \wedge \mathbf{q}|/|\mathbf{q}|$ è la componente dell'impulso del costituente perpendicolare all'impulso trasferito $|\mathbf{q}|$.

Nelle (4.7) compaiono le funzioni di struttura dei costituenti w_1^i e w_2^i che, trattandosi di particelle puntiformi e facendo riferimento alla (3.44), avranno la forma

$$\begin{aligned} w_1^i &= -e_i^2 \frac{\tilde{q}}{4m^2} \\ w_2^i &= e_i^2 . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sostituendo le (4.6), (4.7) e (4.8) nella (4.1), si ottiene l'usuale espressione della sezione d'urto di diffusione elettrone-nucleone in termini delle funzioni di struttura del bersaglio,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE_{e'}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left[W_2 + 2W_2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] , \quad (4.9)$$

in cui

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{i=1}^N \int d^3k dk_0 P(\mathbf{k}, k_0) \sigma_1^i \delta(\nu + k_0 - \sqrt{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 + m^2}) \\ W_2 &= \sum_{i=1}^N \int d^3k dk_0 P(\mathbf{k}, k_0) \sigma_2^i \delta(\nu + k_0 - \sqrt{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 + m^2}) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Per determinare la funzione di scaling del protone bersaglio, si procede come nel caso dei nuclei esaminato nel Capitolo 2. I contributi alle funzioni di struttura provenienti dalle sezioni d'urto elementari elettrone-partone possono essere portati fuori dall'integrale sfruttando di nuovo le proprietà della funzione spettrale.

Possiamo quindi scrivere le funzioni di struttura come

$$W_{1,2} = \sum_{i=1}^N (\sigma_{1,2}^i)_{k=\bar{k}} \int d^3k dk_0 P(\mathbf{k}, k_0) \delta(\nu + k_0 - \sqrt{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 + m^2}) \quad (4.11)$$

e, definendo

$$\bar{\sigma}_{1,2} = \sum_{i=1}^N (\sigma_{1,2}^i)_{k=\bar{k}} , \quad (4.12)$$

estrarre la funzione di risposta del protone che tenderà alla funzione di scaling nel limite di $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$:

$$S(\mathbf{q}, \nu) = \frac{W_1}{\bar{\sigma}_1} = \frac{W_2}{\bar{\sigma}_2} \rightarrow F(y) . \quad (4.13)$$

Quanto detto finora è valido indipendentemente dalla natura on-shell o off-shell dei costituenti del nucleone e dalla richiesta che abbiano massa trascurabile.

4.2 Scaling in \tilde{y} nel limite di Bjorken

La funzione delta contenuta nelle (4.10) dà la condizione di conservazione dell'energia, dalla quale possiamo determinare, come nei casi esaminati nel Capitoli precedenti, la nuova variabile di scaling y .

Possiamo scrivere la conservazione dell'energia come

$$\begin{aligned}\nu + M &= \sqrt{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 + m^2} + E_{\mathcal{R}}(-\mathbf{k}) \\ &= \sqrt{\mathbf{k}^2 + 2k_{\parallel}|\mathbf{q}| + \mathbf{q}^2 + m^2} + E_{\mathcal{R}}(-\mathbf{k}) .\end{aligned}\quad (4.14)$$

Trascurando la massa del partone e il termine $\mathbf{k}^2/\mathbf{q}^2$, e sviluppando la radice quadrata si ha

$$\nu + M = |\mathbf{q}| \sqrt{\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{q}^2} + \frac{2k_{\parallel}}{|\mathbf{q}|} + 1} + E_{\mathcal{R}}(-\mathbf{k}) = |\mathbf{q}| \left(1 + \frac{k_{\parallel}}{|\mathbf{q}|} \right) + E_{\mathcal{R}}(-\mathbf{k}) . \quad (4.15)$$

La relazione precedente ci permette di legare tra loro l'energia ν e l'impulso $|\mathbf{q}|$ trasferiti, definendo la variabile \tilde{y} in cui ci aspettiamo che la funzione di risposta del protone presenti scaling come

$$\tilde{y} = \nu - |\mathbf{q}| = k_{\parallel} + E_{\mathcal{R}}(-\mathbf{k}) - M . \quad (4.16)$$

La combinazione ottenuta non dipende dalle variabili cinematiche del leptone.

La variabile \tilde{y} , analogamente al caso dello scattering di neutroni su elio liquido, ha un significato fisico molto chiaro nel riferimento di quiete del nucleone. A meno del termine correttivo $E_{\mathcal{R}}(-\mathbf{k}) - M$, la (4.16) corrisponde all'impulso longitudinale del partone nel laboratorio.

Questo è in netto contrasto con quanto accade nel caso dello scaling di Bjorken. La variabile di scaling x ha infatti significato fisico solo nell'infinite momentum frame, in cui coincide con la frazione dell'impulso del nucleone trasportata dal partone coinvolto nel processo di scattering.

Mentre la variabile di Bjorken è Lorentz invariante, la nuova variabile di scaling \tilde{y} non lo è. Esiste però un'altra variabile in cui i dati sullo scattering profondamente anelastico di leptoni su protoni presentano scaling, la *variabile di Nachtmann* [25]

$$\xi = \frac{2x}{1 + \sqrt{1 + \frac{4M^2x^2}{Q^2}}} , \quad (4.17)$$

alla quale la variabile \tilde{y} è legata, nel sistema di riferimento del laboratorio, dalla relazione

$$\tilde{y} = -M\xi . \quad (4.18)$$

Nel limite di Bjorken, in cui $Q^2 \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow \infty$, la variabile di Nachtman tende alla variabile di Bjorken x e di conseguenza

$$\tilde{y} \rightarrow -Mx . \quad (4.19)$$

Quanto detto permette così di fornire, nell'ambito del DIS, una chiara interpretazione fisica della variabile di Nachtman, che venne introdotta per la prima volta in un contesto del tutto diverso.

Come abbiamo visto, le funzioni di struttura adimensionali del protone, $F_1 = MW_1$ e $F_2 = \nu W_2$, presentano scaling nella variabile x per grandi valori dell'impulso trasferito. Ci aspettiamo quindi che nel limite di Bjorken F_1 ed F_2 scalino anche nella nuova variabile, essendo questa proporzionale ad x .

In questo limite è infatti possibile trascurare la massa del partone coinvolto nel processo di scattering, m , e gli impulsi trasversi, ottenendo

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &\rightarrow 1 \\ \bar{\sigma}_2 &\rightarrow \frac{Q^2}{|\mathbf{q}|^2} . \end{aligned} \quad (4.20)$$

che sostituite nelle (4.10) danno

$$\begin{aligned} W_1 &= \int d^3k dk_0 P(\mathbf{k}, k_0) \delta(\nu + k_0 - \sqrt{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 + m^2}) \\ W_2 &= \frac{Q^2}{|\mathbf{q}|^2} \int d^3k dk_0 P(\mathbf{k}, k_0) \delta(\nu + k_0 - \sqrt{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 + m^2}) . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dalle (4.21) è evidente la dipendenza da $|\mathbf{q}|$ di W_2 , che non presenta quindi scaling in \tilde{y} per $|\mathbf{q}|$ fissato, mentre nel caso di W_1 possiamo scrivere che

$$W_1 = F(\tilde{y}) , \quad (4.22)$$

dove $F(\tilde{y})$ è proprio la funzione di scaling (4.13).

Il fattore $Q^2/|\mathbf{q}|^2$ che compare nella seconda delle (4.21), nel limite di Bjorken, può essere scritto nella forma

$$\frac{Q^2}{|\mathbf{q}|^2} = \frac{(|\mathbf{q}| - \nu)(|\mathbf{q}| + \nu)}{|\mathbf{q}|^2} \rightarrow -\frac{2\tilde{y}}{\nu} . \quad (4.23)$$

4.3 Scaling in y per un nucleone legato

Dall'equazione precedente insieme alle (4.21) e (4.22), segue che

$$\begin{aligned} F_1 &= MW_1 = MF(\tilde{y}) \\ F_2 &= \nu W_2 = -2\tilde{y}F(\tilde{y}) , \end{aligned} \tag{4.24}$$

che quindi F_1 e F_2 scalano in \tilde{y} per $|\mathbf{q}|$ fissato.

La funzione di scaling del protone $F(\tilde{y})$ non può quindi in generale essere identificata né con F_1 né con F_2 . Questo è dovuto al fatto che mentre la struttura della funzione di scaling è determinata unicamente dalla dinamica del bersaglio, F_1 ed F_2 contengono parte della sezione d'urto di interazione elettromagnetica elettrone-partone.

Dalla seconda delle (4.24), considerando la relazione che lega le due variabili di scaling x e \tilde{y} nel limite di Bjorken (4.19), ritroviamo direttamente la relazione di Callan-Gross[?]

$$F_2 = -\frac{2\tilde{y}}{M}F_1 = 2xF_1 . \tag{4.25}$$

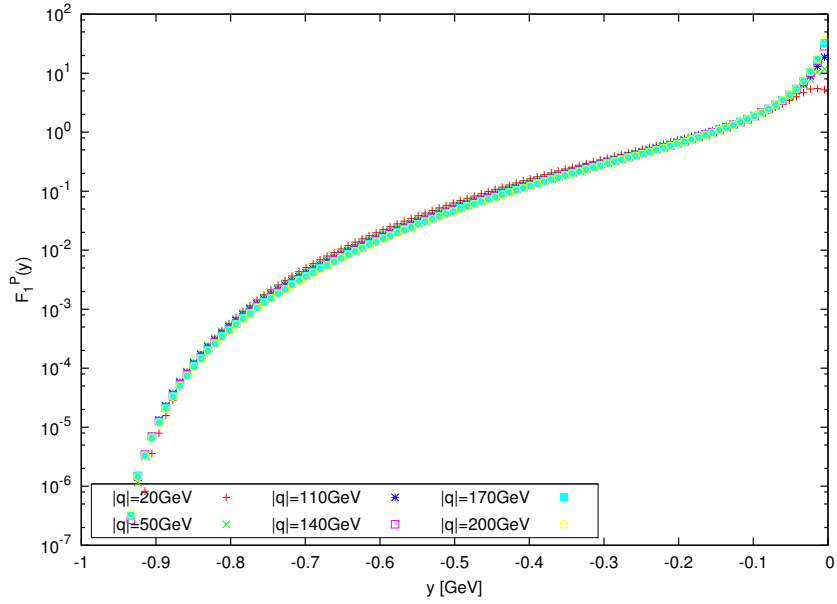
In Fig. 4.1 è mostrato lo scaling delle funzioni di struttura adimensionali del protone, F_1 ed F_2 , nella nuova variabile. Come nel Capitolo 3, le funzioni di struttura sono state calcolate usando le distribuzioni dei partoni della collaborazione CTEQ [23]. Dal confronto con la Fig. 3.7 possiamo constatare che la qualità dello scaling nella nuova variabile è almeno pari a quella dello scaling nella variabile di Bjorken.

4.3 Scaling in y per un nucleone legato

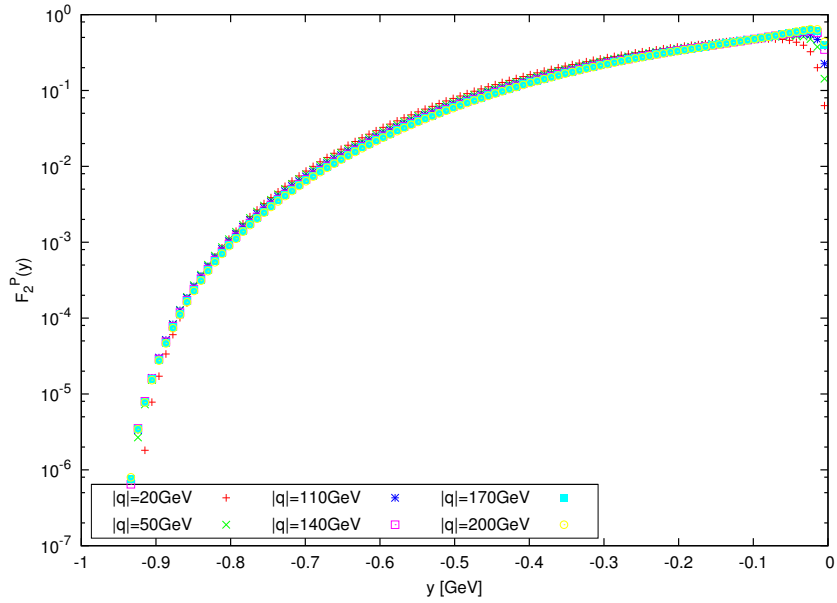
Esperimenti di DIS su bersagli nucleari hanno mostrato che il rapporto tra la sezione d'urto nucleare σ_A e quella del deuterio σ_D , entrambe normalizzate al numero di costituenti del bersaglio,

$$R = \frac{2}{A} \frac{\sigma_A}{\sigma_D} , \tag{4.26}$$

differisce dall'unità in modo significativo. La Fig. 4.2 mostra l'andamento di R ottenuto da Day e Sick [26] estrapolando tutte le sezioni d'urto nucleari disponibili e facendo in limite per $A \rightarrow \infty$. Si vede chiaramente che non soltanto la sezione d'urto di scattering su bersagli nucleari non è data dalla somma delle sezioni d'urto di diffusione sui singoli nucleoni, ma dipende dalla variabile di scaling y . Tuttavia, in determinate regioni del grafico, la dipendenza di R da y può essere giustificata



(a)



(b)

Figura 4.1: Dipendenza dalla variabile \tilde{y} , definita nella (4.16), delle funzioni di struttura del protone F_1 (a) e F_2 (b) a $|\mathbf{q}|$ fissato.

4.3 Scaling in y per un nucleone legato

tenendo conto delle conseguenze, sulle funzioni di struttura del nucleone, degli effetti di legame e del moto del protone all'interno del nucleo.

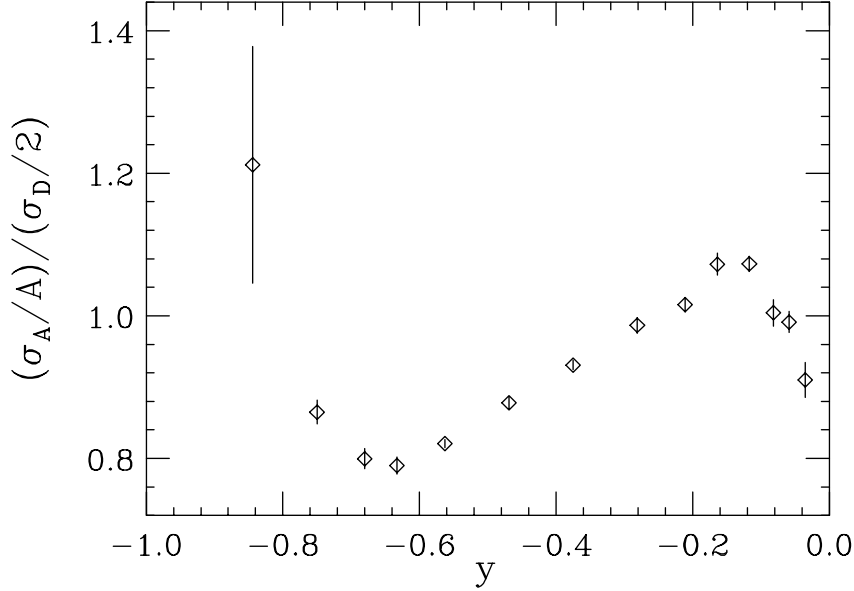


Figura 4.2: Dipendenza dalla variabile y di $R = 2\sigma_A/A\sigma_D$.

Se consideriamo il caso di un nucleone legato in un nucleo di massa M_A , la condizione di conservazione dell'energia assume la forma

$$\nu + M_A = \sqrt{|\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 + m^2} + E_{\mathcal{R}}^N(-\mathbf{k} - \mathbf{p}) + E_{\mathcal{R}}^A(-\mathbf{p}) \quad (4.27)$$

Questa volta il nucleone non è più fermo, ma si muove all'interno del nucleo con impulso \mathbf{p} . Il partone che interagisce con la sonda, che trasferisce di nuovo impulso \mathbf{q} , è in moto all'interno del nucleone con impulso \mathbf{k} . Le energie $E_{\mathcal{R}}^N(-\mathbf{k} - \mathbf{p})$ e $E_{\mathcal{R}}^A(-\mathbf{p})$ costituiscono l'energia di rinculo del sistema residuo del nucleone e del nucleo rispettivamente. Procedendo analogamente alla Sezione precedente, si ottiene

$$\nu + M_A = |\mathbf{q}| + p_{\parallel} + k_{\parallel} + E_{\mathcal{R}}^N(-\mathbf{k} - \mathbf{p}) + E_{\mathcal{R}}^A(-\mathbf{p}), \quad (4.28)$$

dove p_{\parallel} e k_{\parallel} sono le proiezioni, lungo la direzione dell'impulso trasferito, dell'impulso del nucleone nel nucleo e del partone nel nucleone.

È possibile così ricavare la nuova variabile di scaling, data da

$$\begin{aligned} y = \nu - |\mathbf{q}| &= k_{||} + p_{||} + E_{\mathcal{R}}^N(-\mathbf{k} - \mathbf{p}) + E_{\mathcal{R}}^A(-\mathbf{p}) - M_A \\ &= \tilde{y} + p_{||} + E_{\mathcal{R}}^A(-\mathbf{p}) - (M_A - M) , \end{aligned} \quad (4.29)$$

in cui l'energia del nucleo residuo $E_{\mathcal{R}}^A$ è stata definita nella (2.10).

Trattiamo di nuovo il caso in cui in cui $M_A \gg |\mathbf{p}|$, in modo da poter scrivere

$$E_{\mathcal{R}}^A(-\mathbf{p}) = M_{\mathcal{R}} = M_A - M + E , \quad (4.30)$$

che sostituita nella (4.29) ci permette di definire la variabile di scaling come

$$y = \tilde{y} + p_{||} + E . \quad (4.31)$$

Dalla definizione (4.31) è possibile studiare due effetti che coinvolgono le funzioni di struttura del nucleone, il primo conseguenza della presenza di un'energia di legame e il secondo, invece, legato al fatto che il nucleone è in moto all'interno del nucleo. Vogliamo analizzare i due effetti separatamente.

Consideriamo inizialmente che il nucleone sia fermo, e che sia quindi nullo l'impulso longitudinale $p_{||}$, e assumiamo che l'energia di legame sia pari ad una costante

$$E = \langle E \rangle . \quad (4.32)$$

Per esempio, il valore di $\langle E \rangle$ ottenuto dalla

$$\langle E \rangle = \int d^3p dE EP(\mathbf{p}, E) \quad (4.33)$$

usando la funzione spettrale della materia nucleare della Fig. 2.1 è pari a 60MeV.

L'effetto dell'energia di legame sulle funzioni di struttura adimensionali del protone consiste in uno shift costante a valori della variabile di scaling y più negativi.

In Fig. 4.3 è mostrato l'andamento di $F_1(y)$ ed $F_1(y - \langle E \rangle)$, con $\langle E \rangle = 60MeV$. Utilizziamo a titolo di esempio la funzione di struttura F_1 in quanto, come osservato nella Sezione precedente, corrisponde nel limite di Bjorken e a meno di un fattore costante che coincide con la massa del protone, alla funzione di risposta $F(y)$.

La decrescenza di F_1 man mano che y raggiunge valori sempre più negativi fa in modo che si abbia

$$F_1(y - \langle E \rangle) < F_1(y) , \quad (4.34)$$

4.3 Scaling in y per un nucleone legato

e che quindi

$$R = \frac{F_1(y - \langle E \rangle)}{F_1(y)} < 1 . \quad (4.35)$$

La Fig. 4.4 mostra come il rapporto definito nella (4.35) sia inferiore ad uno per tutto il range di valori di y , da cui sono stati però esclusi i valori tra -0.03 e 0 . Per valori di y così prossimi a zero infatti i contributi dei quark del mare diventano dominanti e subentrano effetti collettivi che rendono inadeguato l'uso dell'approssimazione impulsiva.

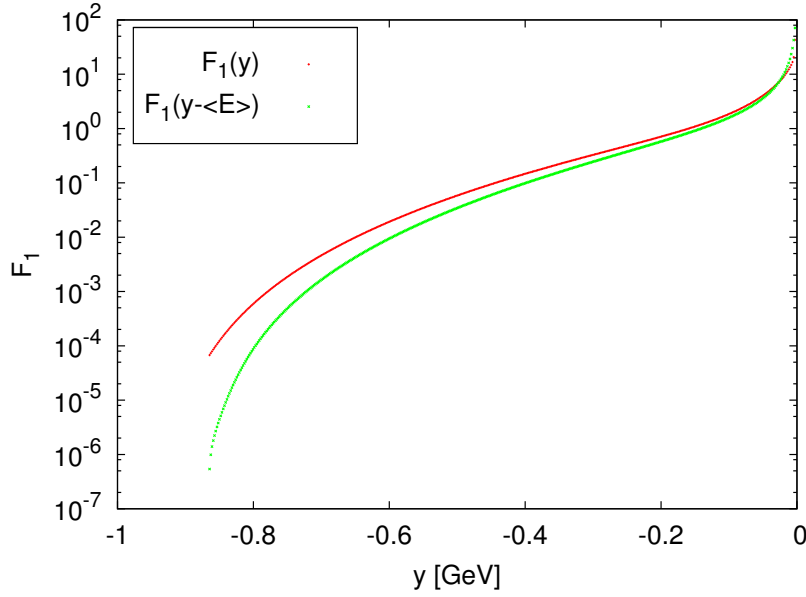


Figura 4.3: Andamento di $F_1(y)$ ed $F_1(y - \langle E \rangle)$, con $\langle E \rangle = 60 MeV$, in funzione di y .

Si vuole adesso considerare il caso di un protone in moto all'interno del nucleo con impulso longitudinale $p_{||} \neq 0$. La funzione di struttura nucleare, che chiamiamo F_1^A , è calcolabile attraverso la relazione

$$F_1^A(y) = \int dp_{||} n(p_{||}) F_1(y - p_{||} - \langle E \rangle) , \quad (4.36)$$

in cui $n(p_{||})$ è la distribuzione di impulso longitudinale ed è definita come

$$n(p_{||}) = 2\pi \int dp_{\perp} p_{\perp} n(|\mathbf{p}|) . \quad (4.37)$$

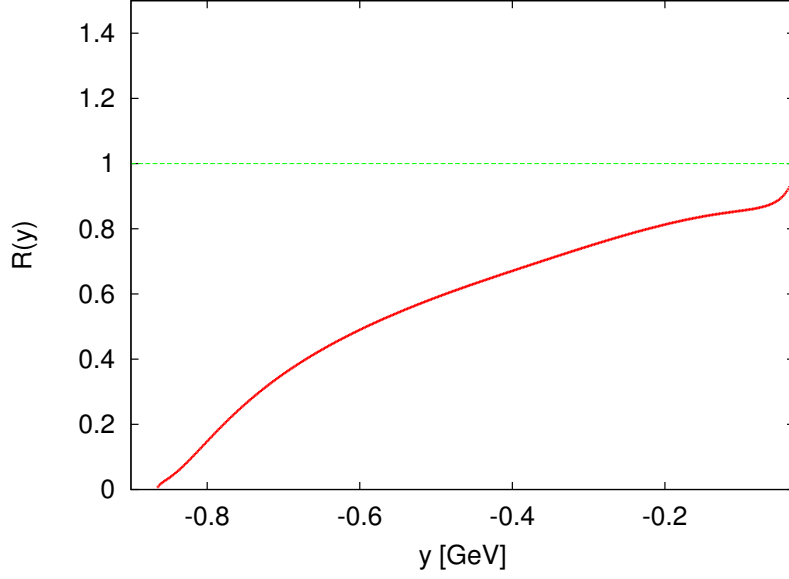


Figura 4.4: Andamento del rapporto R , definito dalla (4.35), in funzione di y .

Anche in questo caso abbiamo assunto che l'energia di legame sia costante, e che quindi la funzione spettrale sia data da

$$P(\mathbf{p}, E) \sim n(|\mathbf{p}|)\delta(E - \langle E \rangle) . \quad (4.38)$$

La distribuzione di impulso ottenuta attraverso l'equazione

$$n(\mathbf{p}) = \int dE P(\mathbf{p}, E) , \quad (4.39)$$

usando di nuovo la funzione spettrale in Fig. 2.1, è ben approssimata da una distribuzione gaussiana, che possiamo scrivere come

$$n(p_{||}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{p_{||}^2}{\sigma^2}} , \quad (4.40)$$

con $\sigma = 1.05\text{fm}^{-1}$. Riscriviamo quindi la (4.36) come

$$F_1^A(y) = \int dp_{||} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{p_{||}^2}{\sigma^2}} F_1(\tilde{y}) , \quad (4.41)$$

con

$$\tilde{y} = y - \langle E \rangle - p_{||} . \quad (4.42)$$

4.3 Scaling in y per un nucleone legato

Nella Sezione precedente abbiamo discusso la relazione che lega \tilde{y} alla variabile di Nachtmann ξ , da cui segue, nel limite di Bjorken, che $\tilde{y} \rightarrow -Mx$. Poiché la variabile di Bjorken è tale che

$$0 \leq x \leq 1, \quad (4.43)$$

segue immediatamente che

$$-M \leq \tilde{y} \leq 0. \quad (4.44)$$

La (4.44) ci permette di determinare gli estremi per l'integrazione in $p_{||}$,

$$\begin{aligned} p_{||} &\leq y + M - \langle E \rangle \\ p_{||} &\geq y - \langle E \rangle. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Si può a questo punto calcolare la F_1^A attraverso la (4.41) e, anche in questo caso, mostrare l'andamento del rapporto

$$R(y) = \frac{F_1^A(y)}{F_1(y)}. \quad (4.46)$$

Dalla Fig. 4.5 è evidente l'effetto del moto del nucleone all'interno del nucleo sull'andamento in y di R che, per valori di y vicini a $-M$, supera sensibilmente l'unità.

Se ci mettiamo nella situazione in cui $y \sim -M$ e trascuriamo l'energia di legame $\langle E \rangle$ in quanto molto inferiore alla massa del protone, le (4.45) diventano

$$\begin{aligned} p_{||} &\leq \Delta \\ p_{||} &\geq -M + \Delta, \end{aligned} \quad (4.47)$$

con $0 < \Delta \ll M$, ossia l'integrale

$$F_1^A(y) = \int_{-M+\Delta}^{\Delta} dp_{||} \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{-\frac{p_{||}^2}{\sigma^2}} F_1(\tilde{y}), \quad (4.48)$$

calcolato nell'intorno di $-M$, prende contributi solamente da valori negativi dell'impulso longitudinale. Quanto appena detto implica che ci troviamo nella regione in cui

$$y < \tilde{y} = y - \langle E \rangle - p_{||}, \quad (4.49)$$

che fa sì che si abbia $F_1(\tilde{y}) > F_1(y)$ e, di conseguenza, $R(y) > 1$.

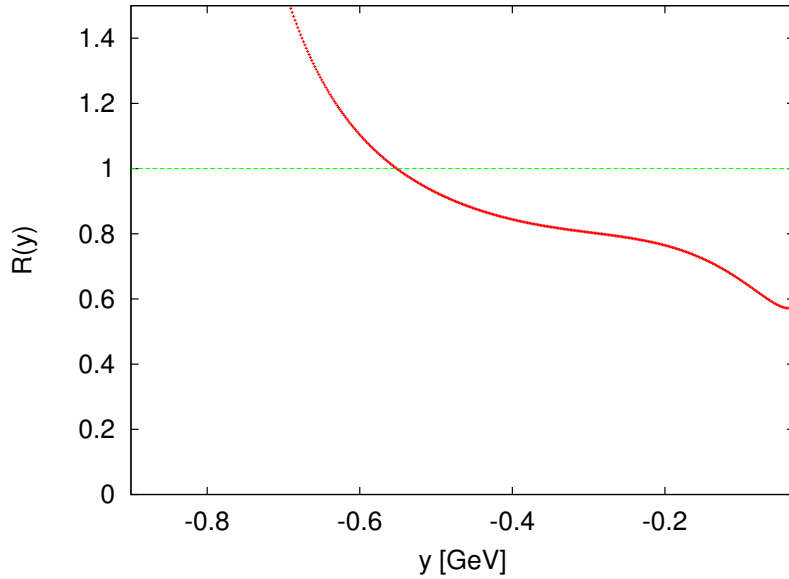


Figura 4.5: Andamento del rapporto R , definito dalla (4.46), in funzione di y .

Quindi, nell'ambito del formalismo della teoria a molti corpi e dello scaling, possiamo dare un'interpretazione fisica di quanto osservato negli esperimenti di scattering profondamente anelastico su bersagli nucleari. Partendo dalla definizione della nuova variabile di scaling per il nucleone legato, si arriva facilmente a spiegare, in termini di effetti di legame, la regione del grafico in Fig. 4.2 in cui il rapporto tra le sezioni d'urto assume valori inferiori ad uno. Inoltre, grazie all'approssimazione d'impulso che ci permette di scrivere le funzioni di struttura in funzione della distribuzione di impulso del nucleone in moto all'interno del nucleo, possiamo giustificare il fatto che R assume valori abbondantemente al di sopra all'unità quando y si avvicina a $-M$.

Naturalmente, le approssimazioni usate per ottenere i risultati mostrati in Fig. 4.5 fanno sì che l'andamento di R venga riprodotto soltanto a livello qualitativo.

Conclusioni

In questa Tesi abbiamo discusso la possibilità di estendere il formalismo dello scaling nella variabile y , utilizzato con successo nel caso della diffusione di neutroni termici su elio liquido e di elettroni su nuclei, allo scattering profondamente anelastico elettrone-protone.

Abbiamo visto che il fenomeno, anche in questo caso, emerge in modo naturale nell'ambito dell'approssimazione impulsiva come manifestazione di un regime cinematico in cui il processo di diffusione può considerarsi dominato dai processi di scattering elementare sui partoni. Questo meccanismo di reazione è comune a tutti i sistemi fisici che presentano scaling ed è del tutto indipendente dalla dinamica. Trattando il protone come un sistema di molti corpi, è quindi possibile estrarre dalla sezione d'urto del processo una funzione di scaling $F(y)$.

Le differenze tra il più familiare scaling di Bjorken e quello nella nuova variabile possono essere riassunte in due punti fondamentali:

1. al contrario della variabile di Bjorken, y ha una chiara interpretazione fisica nel sistema di quiete del bersaglio, in cui può essere identificata con l'impulso longitudinale del costituente coinvolto nell'interazione;
2. la funzione di scaling $F(y)$, opportunamente definita, coincide con la funzione di risposta del bersaglio e può fornire importanti informazioni sulla struttura interna del protone. Di conseguenza non può essere identificata con nessuna delle due funzioni di struttura adimensionali, F_1 e F_2 , che scalano in x e che contengono al loro interno non soltanto la dinamica del protone ma anche l'interazione elettromagnetica elettrone-partone. Soltanto nel limite in cui la massa dei partoni e gli impulsi trasversi possono essere trascurati, cioè nel limite di Bjorken, è possibile stabilire una relazione che lega le due funzioni di struttura ad $F(y)$.

Conclusioni

Abbiamo infine esteso l'analisi al DIS su bersagli nucleari. La sezione d'urto di scattering su nuclei non è data dalla somma delle sezioni d'urto di diffusione sui singoli nucleoni, ma dipende dalla variabile di scaling y . Di conseguenza il rapporto tra la sezione d'urto nucleare e quella del deuterio normalizzate al numero di costituenti, R , differisce da uno.

Il formalismo dello scaling in y ci ha permesso di interpretare i dati sperimentali degli esperimenti di DIS, giustificando con successo, l'andamento qualitativo di tale rapporto in funzione di y in due particolari regioni del grafico:

1. i valori inferiori ad uno di R , nella regione di y intermedie, possono essere interpretati semplicemente a partire dalla definizione della variabile di scaling del protone legato. Da questa seguono infatti direttamente gli effetti dell'energia di legame sulle funzioni di struttura, e in particolare su F_1 che nel limite di Bjorken, a meno di una costante, coincide con la funzione di scaling, che vengono shiftate a valori più bassi;
2. tenendo invece conto del moto del nucleone all'interno del nucleo, l'effetto sulle funzioni di struttura nella regione in cui $y \sim -M$ risulta in uno shift a valori più alti rispetto al caso di un protone libero, che fa sì che i valori di R siano maggiori dell'unità.

La possibilità di utilizzare lo scaling in y per interpretare le sezioni d'urto di diffusione su nuclei è di particolare interesse, poiché nuovi dati molto accurati per bersagli diversi sono stati recentemente ottenuti a JLab [28]. L'analisi di questi dati rappresenta lo sviluppo più immediato del lavoro di Tesi ed è attualmente già in corso.

Appendice A

Scattering elettrone-muone

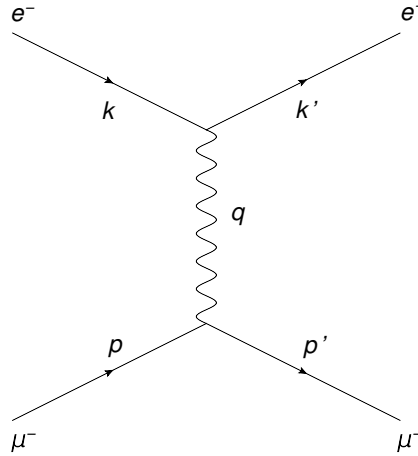


Figura A.1: Diagramma di Feynman per il processo di diffusione elettrone-muone.

Consideriamo il processo

$$e(k) + \mu(p) \rightarrow e(k') + \mu(p') \quad (\text{A.1})$$

in cui un elettrone di quadrimpulso iniziale k è diffuso su un muone di quadrimpulso p . I quadrimpulsi finali delle due particelle saranno rispettivamente k' e p' .

La sezione d'urto associata può essere scritta come

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} \omega_{if} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k' \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p' , \quad (\text{A.2})$$

dove Φ è il flusso di elettroni incidenti, V il volume di normalizzazione. La probabilità di transizione dallo stato iniziale a quello finale nell'unità di tempo, ω_{if} , è

legata all'elemento di matrice $S_{if} = \langle f|S|i \rangle$ dalla relazione

$$\omega_{if} = \frac{|S_{if}|^2}{T} . \quad (\text{A.3})$$

Nell'equazione (A.3), T è il tempo dell'interazione e

$$|S_{if}|^2 = TV(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \frac{1}{2E_k V} \frac{1}{2E_p V} \frac{1}{2E_{k'} V} \frac{1}{2E_{p'} V} \sum_i \sum_f |M_{if}|^2 . \quad (\text{A.4})$$

E_k è l'energia della particella di quadrimpulso k e così via, mentre M_{if} è l'ampiezza invariante che contiene tutte le informazioni sulla fisica del processo considerato. Il modulo quadro dell'ampiezza invariante viene sommato sugli spin delle particelle finali e mediato su quelli delle particelle iniziali.

Il flusso Φ degli elettroni incidenti è definito come

$$\Phi = \frac{v_{rel}}{V} , \quad (\text{A.5})$$

dove v_{rel} è la velocità relativa tra l'elettrone e il muone bersaglio. Considerando il riferimento del laboratorio in cui il muone è a riposo v_{rel} coincide con la velocità dell'elettrone e, nell'ipotesi in cui possiamo trascurarne la massa, la (A.5) diventa

$$\Phi = \frac{1}{V} . \quad (\text{A.6})$$

Sostituendo le equazioni (A.3),(A.4) e (A.6) nella (A.2), l'espressione della sezione d'urto si può scrivere come

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \sum_i \sum_f |M_{if}|^2 \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} . \quad (\text{A.7})$$

L'interazione tra elettrone e muone è elettromagnetica, quindi mediata da un fotone virtuale che trasporta impulso q e descritta dalla corrente elettromagnetica $J_\mu^{em} = \bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)$. Questo permette di scrivere l'ampiezza invariante come

$$\sum_i \sum_f |M_{if}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_e s_\mu s'_e s'_\mu} \left| \bar{u}(k', s'_e) \gamma^\mu u(k, s_e) \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(p', s'_\mu) \gamma_\mu u(p, s_\mu) \right|^2 , \quad (\text{A.8})$$

dove il fattore $\frac{1}{4}$ viene dalla media sugli spin iniziali ed e è la carica dell'elettrone.

Ricordando che gli spinori di Dirac u e \bar{u} che descrivono i fermioni soddisfano la relazione

$$\sum_s u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} , \quad (\text{A.9})$$

la (A.8) può essere scritta come prodotto di due tensori leptonici, uno per l'elettrone e uno per il muone

$$\overline{\sum_i} \sum_f |M_{if}|^2 = \frac{e^2}{q^2} L_{\mu\nu}^{(e)} L_{(\mu)}^{\mu\nu} , \quad (\text{A.10})$$

dove

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{(e)} &= \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{k}' + m) \gamma_\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu] \\ &= 2[k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - g_{\mu\nu} (k \cdot k' - m^2)] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e m è la massa del leptone. La contrazione tra i due tensori porta a

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{(e)} L_{(\mu)}^{\mu\nu} &= 8[(k' \cdot p')(k \cdot p) + (p \cdot k')(k \cdot p') \\ &\quad - m^2(p \cdot p') - M^2(k \cdot k') + 2m^2 M^2] . \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Vogliamo calcolare la sezione d'urto nel riferimento del laboratorio, in cui il muone è inizialmente a riposo. In tal caso si ha

$$\begin{aligned} p &= (M, \mathbf{0}) \\ k &= (E, \mathbf{k}) \\ k' &= (E', \mathbf{k}') \\ q^2 &= (k - k')^2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

e trascurando i termini proporzionali alle masse al quadrato dei leptoni si ottiene $q^2 = -2k \cdot k' = 2M^2 - 2p \cdot p'$ che, inserita nella (A.12) insieme alle (A.13) ci permette di ottenere

$$L_{\mu\nu}^{(e)} L_{(\mu)}^{\mu\nu} = 8 \left[2M^2 E E' + \frac{q^2}{2} M (E - E') + \frac{M^2 q^2}{2} \right] . \quad (\text{A.14})$$

A questo punto si utilizzano le espressioni

$$\begin{aligned} q^2 &= -4E E'^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ E' - E &= -\nu = \frac{q^2}{2M} \\ M(E' - E) &= E E' (\cos \theta - 1) , \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

dove θ è l'angolo di diffusione dell'elettrone rispetto alla direzione del fascio incidente, (FIGURA) attraverso le quali il prodotto tra i due tensori leptonici diventa

$$L_{\mu\nu}^{(e)}L_{(\mu)}^{\mu\nu} = 16M^2EE' \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Inserendo le equazioni (A.16) e (A.10) nella (A.2) si arriva a scrivere la sezione d'urto differenziale nella forma

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega_e} = \frac{4\alpha^2(E')^2}{q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] 2M \frac{d^3p'}{2E_{p'}} \delta^{(4)}(q + p - p'), \quad (\text{A.17})$$

dove α è la costante di struttura fine.

Se il muone nello stato finale non è osservato, possiamo integrare in d^3p' . Considerando che

$$\int \frac{d^3p'}{2E_{p'}} \delta^{(4)}(p + q - p') \rightarrow \delta[(p + q)^2 - M^2], \quad (\text{A.18})$$

che $p^2 = M^2$ e che $p \cdot q = M\nu$, ponendo $Q^2 = -q^2$ otteniamo

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega_e} = \frac{4\alpha^2(E')^2}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right). \quad (\text{A.19})$$

Possiamo fare un'integrazione ulteriore sull'energia finale dell'elettrone, E' . Tenendo conto del fatto che l'argomento della funzione delta nella (A.19) dipende da E' attraverso le espressioni (A.15) e usando la proprietà

$$\int dx \delta(f(x)) \equiv \left[\frac{df}{dx} \right]^{-1}, \quad (\text{A.20})$$

la (A.19) diventa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e} = \frac{4\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{Q^4} \left[1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^{-1} \left[1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (\text{A.21})$$

Possiamo fare in modo che la sezione d'urto differenziale di scattering elettrone-muone abbia la forma di prodotto tra la sezione d'urto di Mott, che descrive la semplice diffusione di elettroni relativistici in un campo Coulombiano, e un fattore che tiene conto del rinculo del bersaglio e dell'interazione magnetica dovuta al fatto che stiamo considerando particelle dotate di spin.

Tenendo conto della conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{E'} \left(E' + \frac{2EE'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{E'} \left(E' + \frac{Q^2}{2M} \right) = \frac{1}{E'} (E' + \nu) = \frac{E}{E'} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

e inserirla nella (A.21) ottenendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \frac{E'}{E} \left(1 + \frac{Q^2}{2M} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (\text{A.23})$$

dove

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 - \frac{\nu}{E} - \frac{Q^2}{4E^2} \right) \quad (\text{A.24})$$

è appunto la sezione d'urto di Mott. Il fattore moltiplicativo E/E' è quello dovuto al rinculo, mentre il resto tiene conto

Bibliografia

- [1] R. G. Roberts, *The Structure of the Proton* (Cambridge University Press 1990).
- [2] H.R. Glyde e E.C. Svensson, in *Methods in Experimental Physics*, Vol. 23 (Academic Press, San Diego, 1987)p. 303.
- [3] S. Moroni, G. Senatore e S. Fantoni, Phys. Rev. B **55**, 1040 (1997).
- [4] F. Mazzanti, A. Polls e J. Boronat, Phys. Lett **A220**, 251 (1996).
- [5] O.Benhar, A. Fabrocini e S. Fantoni, Phys. Rev. Lett. **87**, 052501 (2001).
- [6] P.C. Hoenberg e P.M. Platzman, Phys. Rev. **152**, 198 (1966).
- [7] T.R. Sosnick, W.M. Snow, R.N. Silver and P.E. Sokol, Phys. Rev. B **43**, 216 (1991).
- [8] W.C. Kerr, K. N. Pathak, K. S. Singwi, Phys. Rev. A **2**, 2416-2426 (1970).
- [9] R.T. Arzula *et al*, Phys. Rev. B **56**, 14620 (1997).
- [10] O. Benhar, D. Day, I. Sick, Rev. Mod. Phys. **80**, 189 (2008)
- [11] D.B. Day, J.S. Mc Carthy, T.W. Donnelly e I. Sick, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **40**, 357 (1990).
- [12] O. Benhar, D. Meloni, Nucl. Phys. **A789**, 379 (2007).
- [13] O. Benhar, A. Fabrocini e S. Fantoni, Nucl. Phys. **A505**, 267 (1989).
- [14] J. Arrington *et al*, Phys. Rev. C **64**, 014602 (2001).
- [15] M. Breidenbach *et al*, Phys. Rev. Lett. **23**, 935 (1969).

BIBLIOGRAFIA

- [16] J.I. Friedman, H.W. Kendall, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **22**, 203 (1972).
- [17] J.D. Bjorken, *Phys. Rev.* **179**, 1547-1553 (1969).
- [18] E.B. Hughes *et al*, *Phys Rev.* **129B**, 458 (1965).
- [19] M. Arneodo, *et al*, *Nucl. Phys.* **B483**, 3 (1997).
- [20] L. W. Whitlow *et al*, *Phys. Lett.* **B282**, 475 (1992).
- [21] R.P. Feynman, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1415 (1969).
- [22] C.G. Callan, Jr. e D.J. Gross, *Phys. rev, Lett.* **22**, 156 (1969).
- [23] Hung-Liang Lai *et al*, *Phys. Rev. D* **82** 074024 (2010).
- [24] O. Benhar, V.R. Pandharipande e I. Sick, *Phys. Lett.* **B489**, 131 (2000).
- [25] O. Nachtman, *Nucl. Phys.* **B63**, 237 (1973).
- [26] D. Day e I. Sick, *Phys. Lett.* **B274**, 16 (1992).
- [27] O. Benhar, *Intern. J. Mod. Phys. B* **17**, 5139 (2003).
- [28] J. Arrington *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 202301 (2009).