

“Sapienza” Università di Roma



Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di laurea in Fisica  
Anno Accademico 2008-2009

Tesi di Laurea Specialistica

**Interazioni nucleari da modelli di teorie di campo effettive**

**Relatore:**

*Dott. Omar Benhar Noccioli*

**Candidato:**

*Lorenzo Asti*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Interazione nucleone-nucleone</b>	<b>5</b>
1.1 Teoria di Yukawa . . . . .	10
1.1.1 Determinazione della lagrangiana di interazione . . . . .	10
1.1.2 Determinazione del potenziale nucleone-nucleone . . . . .	13
1.2 Potenziali fenomenologici . . . . .	14
<b>2 Teorie di campo effettive (EFT)</b>	<b>19</b>
2.1 Un <i>toy model</i> per la costruzione di EFT per bosoni di Goldstone . . . . .	21
2.2 L'azione effettiva come strumento formale per la costruzione di EFT . . . . .	29
2.2.1 L'azione effettiva come generatore dei diagrammi 1PI . . . . .	31
2.2.2 Costruzione di EFT tramite l'azione effettiva in presenza di gerarchia di massa . . . . .	36
2.3 Teorie effettive per bosoni di Goldstone di simmetrie non Abeliane . . . . .	38
<b>3 La QCD e le sue simmetrie interne</b>	<b>47</b>
3.1 La lagrangiana della QCD . . . . .	47
3.2 Simmetrie della QCD . . . . .	51
<b>4 Teoria perturbativa chirale</b>	<b>55</b>

---

4.1	Costruzione della lagrangiana di bassa energia per le interazioni forti . . .	55
4.1.1	Lagrangiane pioniche . . . . .	57
4.1.2	Interazione pione-nucleone . . . . .	69
4.1.3	Interazione nucleone-nucleone . . . . .	73
	<b>Conclusioni</b>	<b>83</b>
	<b>A Derivazione dell'OPEP dalla Lagrangiana chirale all'ordine più basso</b>	<b>89</b>
	<b>B <i>Old-fashion perturbation theory</i></b>	<b>95</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>96</b>

# Introduzione

La descrizione delle interazioni forti tra i nucleoni è di vitale importanza per comprendere a livello quantitativo la struttura e le proprietà dei nuclei atomici e delle stelle di neutroni. L'approccio convenzionale a questo problema è basato sull'ipotesi, proposta originariamente da Yukawa, che le forze nucleari siano dovute allo scambio di mesoni [1]. Quasi tutti i modelli che vengono attualmente utilizzati sono stati sviluppati nell'ambito di questo approccio.

Oggi sappiamo che i nucleoni sono sistemi composti di dimensione finita, e che le forze nucleari si devono considerare interazioni *residue* agenti tra particelle la cui carica forte, o *colore*, è nulla. La derivazione di questo tipo di interazione dalla lagrangiana della teoria fondamentale delle interazioni forti, chiamata cromodinamica quantistica (*Quantum Chromo-Dynamics*, o QCD) presenta però difficoltà che non è stato ancora possibile superare. La maggior parte degli studi teorici dei sistemi nucleari vengono quindi effettuati utilizzando modelli dinamici fenomenologici, dai quali si ricavano potenziali che descrivono in modo accurato le proprietà del sistema di due nucleoni [2].

Lo studio dei nuclei con numero di massa  $A \leq 12$ , per i quali l'equazione di Schrödinger si può risolvere esattamente usando metodi stocastici, ha mostrato che per riprodurre l'energia dello stato fondamentale e dei primi stati eccitati è necessario includere nell'hamiltoniana nucleare un potenziale a tre corpi, caratterizzato da una componente attrattiva dovuta allo scambio di due pioni e una repulsiva, che viene descritta in modo puramente fenomenologico. L'energia potenziale dovuta al potenziale a tre corpi in questi sistemi è

tipicamente  $\sim 5\%$  di quella associata alle interazioni binarie [3].

I risultati dei calcoli teorici indicano anche che il ruolo delle interazioni che coinvolgono più di due nucleoni aumenta rapidamente con la densità, e diviene dominante per determinare l'equazione di stato della materia nucleare nel regime caratteristico delle stelle di neutroni  $\rho > 2\rho_0$ , dove  $\rho_0 = .16 \text{ fm}^{-3}$  è la densità centrale dei nuclei atomici [4]. Ovviamente, in queste condizioni diviene anche plausibile ipotizzare che contribuiscano in modo significativo forze a quattro o più nucleoni.

Il problema principale connesso con l'introduzione di interazioni a più di due nucleoni è la formulazione di uno schema consistente, all'interno del quale si possano derivare tutte le interazioni nucleari. All'inizio degli anni novanta del secolo scorso, Weinberg ha suggerito che questo schema potesse essere individuato nella teoria delle perturbazioni chirale [5].

La teoria delle perturbazioni chirale è una teoria effettiva della QCD che permette, a partire dalla simmetria e dalla rottura di simmetria della teoria fondamentale, di studiare in modo sistematico i sistemi adronici nel regime di bassa energia.

Nel settore dei quark leggeri,  $u$  e  $d$ , la lagrangiana della QCD è approssimativamente invariante sotto trasformazioni di fase globali agenti indipendentemente sulle componenti destrorse e sinistrorse dei campi dei quark. Questa simmetria, chiamata simmetria chirale, è rotta esplicitamente a causa del fatto che le masse dei quark, pur essendo piccole, non sono esattamente nulle. Inoltre, la simmetria chirale è rotta spontaneamente, in quanto il vuoto della teoria è invariante solo sotto trasformazioni di spin isotopico. Sia la rottura esplicita che la rottura spontanea si manifestano nello spettro adronico. La piccola massa del pione, molto minore delle altre masse adroniche, si spiega con la sua natura di quasi-bosone di Goldstone. Questa interpretazione implica che i pioni interagiscono debolmente a bassa energia, e suggerisce che in questo regime sia possibile usare la teoria delle perturbazioni.

Nel calcolo delle ampiezze dei processi fisici, i termini della serie perturbativa vengono

ordinati secondo le potenze del rapporto tra l'impulso associato alle linee esterne,  $Q$ , e una scale di energia tipica della QCD,  $\Lambda_\chi \sim 1$  GeV.

La teoria delle perturbazioni chirale è stata dapprima applicata allo studio dei sistemi pione-pione e pione-nucleone, nei quali la natura di bosoni di Goldstone dei pioni garantisce la convergenza dell'espansione. L'estensione al settore in cui sono presenti due nucleoni è concettualmente molto più problematica, a causa della natura dell'interazione, in quanto essa dà luogo a stati legati, che non possono essere descritti perturbativamente. Weinberg ha però dimostrato che i contributi non perturbativi all'ampiezza di diffusione nucleone-nucleone sono associati ai diagrammi contenenti stati intermedi puramente nucleonici, e possono essere sommati a tutti gli ordini risolvendo un'equazione di Lippmann-Schwinger. Questo importante risultato ha aperto la strada agli studi dell'interazione nucleare nell'ambito della teoria effettiva chirale.

La teoria effettiva chirale presenta notevoli vantaggi, in quanto permette di sviluppare uno schema basato sull'uso della teoria delle perturbazioni, che non è invece utilizzabile direttamente a partire dalla teoria di Yukawa. Inoltre, all'interno di questo schema le interazioni che coinvolgono due, tre o più nucleoni compaiono in modo del tutto naturale.

La tesi è strutturata nel modo seguente.

Il Capitolo 1 è dedicato ad una discussione delle ipotesi fondamentali alla base della descrizione dei nuclei in termini di nucleoni puntiformi interagenti tramite un potenziale. Vengono anche analizzati la teoria di Yukawa e i moderni modelli fenomenologici di interazione nucleone-nucleone.

Nel Capitolo 2 vengono discusse in modo generale le teorie di campo effettive per la descrizione di processi di bassa energia. Attraverso un *toy model* dal carattere esemplificativo vengono mostrate le caratteristiche ed i vantaggi di questo strumento. Viene introdotta l'azione effettiva come strumento di costruzione di teorie di bassa energia e

viene illustrata la strategia per la costruzione di teorie effettive per i bosoni di Goldstone in presenza di rottura di simmetria nel caso abeliano e non abeliano.

Nel Capitolo 3 viene discussa la lagrangiana della QCD e la relativa simmetria chirale.

Nel Capitolo 4 viene illustrato come, applicando i metodi descritti nel Capitolo 2, sia possibile costruire una teoria di bassa energia per i pioni come bosoni di Goldstone della rottura della simmetria chirale. Il ragionamento viene poi esteso per includere nel modello l'interazione pione-nucleone. Infine è esposta la trattazione dell'interazione nucleone-nucleone a due e tre corpi. Quest'ultima, come sottolineato sopra, rappresenta uno dei principali punti di forza del modello chirale delle interazioni forti.



# Capitolo 1

## Interazione nucleone-nucleone

A partire dalla scoperta del neutrone, nel 1932, la descrizione dell'interazione tra i nucleoni è stata considerata uno dei problemi centrali della Fisica. Nello stesso 1932, Heisenberg formulò un primo modello fenomenologico, basato sull'introduzione del formalismo dello spin isotopico, secondo il quale la forza agente tra protone e neutrone era dovuta, in analogia con quanto avviene nello ione  $H_2^+$ , allo scambio di una particella di carica elettrica negativa e spin zero [6]. Pochi anni dopo, nel 1935, Yukawa [1] propose la prima descrizione delle forze nucleari basata sulla teoria dei campi quantistici, che era stata già applicata con grande successo alla trattazione dei fenomeni elettromagnetici. La teoria di Yukawa era basata sull'ipotesi che le forze nucleari siano dovute allo scambio di una particella di spin zero la cui massa,  $\mu$ , può essere stimata a partire dal range delle interazioni nucleari,  $r_0 \sim 10^{-13}$  cm, usando la relazione  $\mu \sim r_0^{-1} \sim 200$  MeV. Le particelle predette dalla teoria di Yukawa sono state successivamente identificate con i mesoni  $\pi$ , scoperti nel 1947, la cui massa è  $\sim 140$  MeV.

Successivamente alla scoperta dei mesoni  $\pi$ , la ricerca sulle forze nucleari proseguì con tale intensità che H.A. Bethe, in un famoso articolo intitolato "What holds the nucleus together?", pubblicato nel 1953 [7], scrisse: "Nell'ultimo quarto di secolo i fisici hanno dedicato a questo problema una quantità enorme di lavoro sperimentale e teorico. Probabilmente più ore di lavoro di quante ne siano state dedicate a qualsiasi altro problema

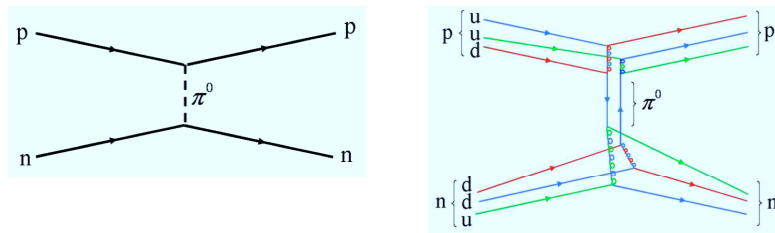


Figura 1.1: Rappresentazione schematica dell'interazione protone-neutrone dovuta allo scambio di un pione neutro (pannello di sinistra) in termini dei gradi di libertà elementari della QCD (pannello di destra).

scientifico”.

Negli anni sessanta, la teoria di Yukawa venne ampliata aggiungendo all'interazione dovuta allo scambio di un pione altri contributi, associati allo scambio di particelle più pesanti, come i mesoni  $\rho$  e  $\omega$ , di masse pari, rispettivamente, a 770 e 782 MeV.

In linea di principio, poichè i nucleoni sono sistemi composti di dimensione finita, le loro interazioni dovrebbero essere descritte a partire dai gradi di libertà fondamentali della teoria di gauge delle interazioni forti, cioè quark e gluoni. A causa della grande complessità della QCD i risultati di questo tipo di approccio, ottenuti da calcoli numerici su reticolo [8], sono però ancora incompleti e difficilmente utilizzabili.

A basse energie o lunghe distanze, tipicamente  $\gtrsim 1$  fm ( $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$ ), la natura delle interazioni forti è determinata dalla proprietà della QCD che va sotto il nome di confinamento. A causa del confinamento i quark non vengono osservati come particelle libere, ma solo in combinazioni di carica di colore totale nulla: gli adroni. Di conseguenza, le interazioni forti tra gli adroni sono dovute all'azione di forze analoghe alle forze di Van der Waals che agiscono tra molecole elettricamente neutre, come illustrato schematicamente nella Fig. 1.1. È quindi ragionevole costruire modelli delle forze nucleari basati sui gradi di libertà adronici.

Ovviamente, la descrizione dei nuclei atomici in termini di nucleoni puntiformi interagenti tramite un potenziale è fondata sull'ipotesi che gli effetti dovuti alle dimensioni finite

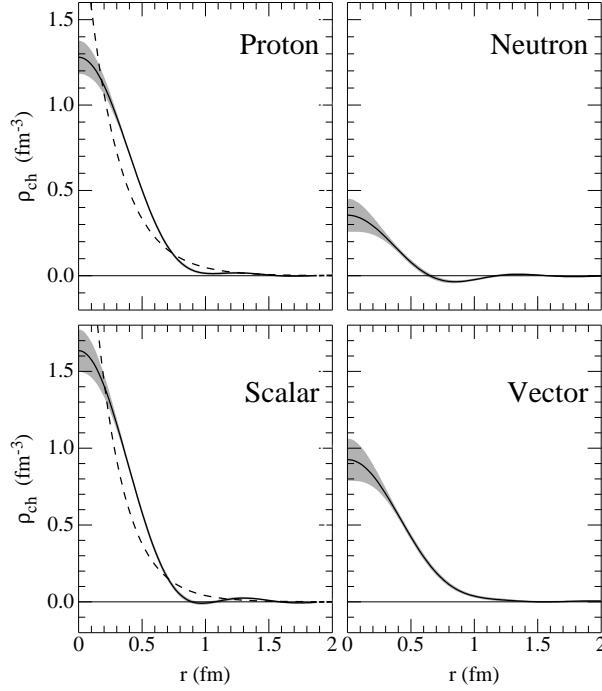


Figura 1.2: Pannello superiore: distribuzioni di carica di protone e neutrone. Pannello inferiore: combinazioni isoscalari e isovettoriali delle distribuzioni del pannello superiore. Le linee continue e le zone ombreggiate rappresentano, rispettivamente, i dati e l'incertezza sperimentale. Le linee tratteggiate corrispondono ad un modello in cui le densità vengono approssimate da una funzione esponenziale. ottenute.

e alla struttura interna siano trascurabili. Questa ipotesi può essere verificata, a livello semiquantitativo, analizzando le distribuzioni di carica elettrica che si ottengono dagli esperimenti di diffusione elastica di elettroni. Il pannello superiore della Fig. 1.2 mostra le distribuzioni di carica di protone e neutrone,  $\rho_{ch}^p$  e  $\rho_{ch}^n$  risultanti dall'analisi dei dati sperimentali disponibili [9], mentre in quello inferiore sono rappresentate le combinazioni isoscalari e isovettoriali,  $\rho_{ch}^p \pm \rho_{ch}^n$ . La combinazione isoscalare fornisce informazioni sul raggio della distribuzione di carica del nucleone “nudo”, cioè privo del contributo dovuto alla presenza di una “nuvola” di pioni carichi che lo circonda.

Per valutare in che misura i nucleoni all'interno di un nucleo possano essere considerati come particelle con la loro individualità dobbiamo confrontarne le dimensioni, illustrate

in Fig. 1.2, con la distanza di separazione media,  $d$ . Ipotizzando che protoni e neutroni si comportino come le molecole di un gas, il valore di  $d$  si può ricavare dai risultati delle misure dei raggi dei nuclei stabili, che vengono parametrizzate nella forma  $R = r_0 A^{1/3}$ , dove  $A$  è il numero di massa del nucleo e  $r_0 = 1.14$  fm. Si può quindi considerare  $r_0$  come un limite inferiore a  $d$ . Una stima più accurata deve tenere conto della correlazione tra le posizioni occupate dai nucleoni, dovuta principalmente alla natura fortemente repulsiva dell'interazione a corto raggio. L'importanza della componente repulsiva delle forze nucleari nel determinare la struttura dei nuclei emerge chiaramente dall'analisi delle densità di carica misurate. Come illustrato in Fig. 1.3, al crescere di  $A$  la densità al centro dei nuclei tende infatti al valore  $\rho_0 = 0.16$  fm $^{-3}$ , indipendente da  $A$ . Per effetto delle correlazioni, le proprietà del nucleo sono più simili a quelle di un liquido che a quelle di un gas. Stime numeriche del valore di  $d$  in presenza degli effetti di correlazione forniscono un valore  $\lesssim 2$  fm.

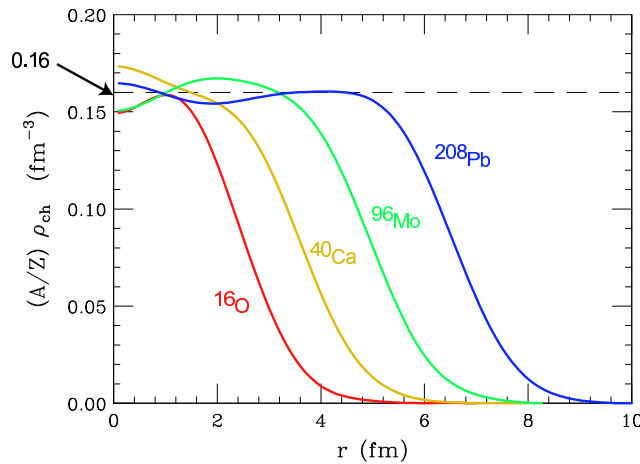


Figura 1.3: Densità di carica in funzione della distanza dal centro per nuclei diversi.

La Fig. 1.4, che mostra le densità scalari di due nucleoni posti a distanza  $d$ , suggerisce che per distanze  $\gtrsim 1.5$  fm, che si possono considerare una stima realistica a densità  $\sim \rho_0$ , l'overlap non è molto significativo. In questo regime sembra quindi ragionevole trattare i nucleoni come gradi di libertà elementari. Naturalmente, al crescere della densità  $d$

descresce, e a  $d \lesssim 1$  fm questa approssimazione cessa di essere applicabile, e si deve passare ad una descrizione basata sui gradi di libertà dei costituenti dei nucleoni. È probabile che queste condizioni si verifichino nel *core* delle stelle compatte più massive.

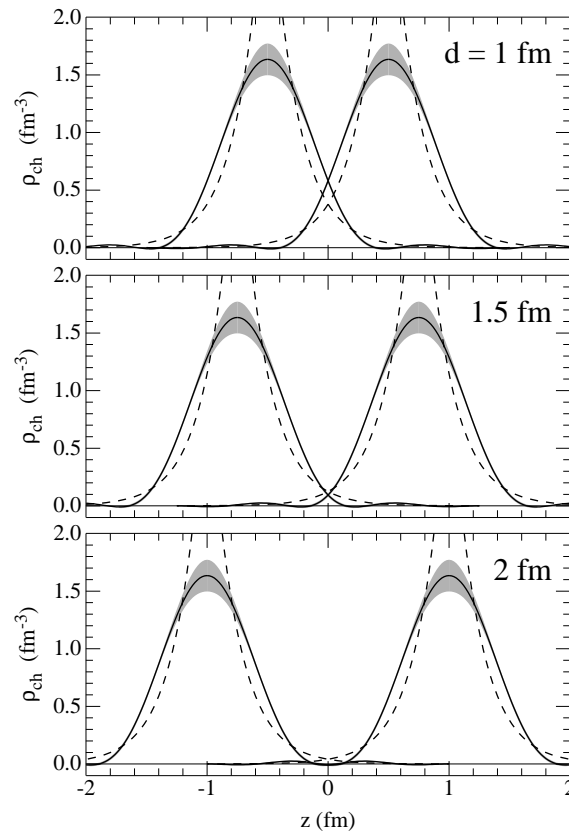


Figura 1.4: Profili di densità isoscalare di due nucleoni posti a distanza relativa  $d$ .

In questo capitolo descriveremo i modelli di interazione nucleare cosiddetti realistici, cioè in grado di riprodurre le proprietà osservate del sistema di due nucleoni, sia nello stato legato, il nucleo del deuterio, o deutone, che negli stati di scattering a energie fino alla soglia di produzione dei pioni ( $\sim 280$  MeV nel sistema del laboratorio).

## 1.1 Teoria di Yukawa

Come abbiamo anticipato, il primo tentativo di descrivere le forze nucleari utilizzando la teoria quantistica relativistica dei campi è dovuto a Yukawa. A causa della massa elevata dei nucleoni però (tipicamente il rapporto tra impulso e massa di un nucleone all'interno di un nucleo è  $\lesssim 3\%$ ), gli effetti relativistici sono quasi sempre trascurabili, e l'interazione viene descritta da un potenziale, che si ottiene a partire dalla lagrangiana della teoria nel limite non relativistico.

### 1.1.1 Determinazione della lagrangiana di interazione

Secondo la teoria di Yukawa la lagrangiana del sistema di protoni interagenti tramite lo scambio di un mesone  $\pi$  neutro ha la forma

$$\mathcal{L}_p = \bar{\psi}_p(i\cancel{\partial} - m_p)\psi_p + \eta_0\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_0\partial^\mu\varphi_0 - \frac{1}{2}m_0^2\varphi_0^2\right) - g_0\varphi_0\bar{\psi}_p\Gamma\psi_p \quad (1.1)$$

dove  $\psi_p$  e  $\varphi$  sono il campo del protone quello del pione neutro, il cui comportamento è descritto rispettivamente dalle lagrangiane di Dirac e Klein-Gordon. Il parametro  $\eta_0 = \pm 1$ , che rappresenta il segno relativo con cui le due lagrangiane si combinano, è da determinare. L'ultimo termine rappresenta l'interazione, che viene scritta in analogia con quella tra elettrone e fotone, indicando con  $\Gamma$  una matrice agente nello spazio degli spinori di Dirac, anch'essa da determinare.

La parità intrinseca del pione è stata determinata grazie all'osservazione della cattura di  $\pi^-$  da parte di elettroni della shell K del deuterio, associata alla produzione di due neutroni, cioè del processo



in cui lo stato iniziale ha momento angolare  $J = 1$ . L'unico stato con  $J = 1$  che si può formare con due neutroni è lo stato  ${}^3P_1$ , che ha parità negativa. Quindi, assumendo che la parità sia conservata dalle interazioni forti, si deve attribuire parità negativa al pione.

Per costruire una lagrangiana invariante dobbiamo moltiplicare il campo del pione per una forma bilineare nel campo fermionico che trasformi come uno pseudoscalare, cioè che cambi segno sotto trasformazioni di parità. Poniamo dunque  $\Gamma = i\gamma_5$  e scriviamo la lagrangiana che descrive l'interazione tra due protoni così ottenuta

$$\mathcal{L}_p = \bar{\psi}_p(i\not{\partial} - m_p)\psi_p + \eta_0\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_0\partial^\mu\varphi_0 - \frac{1}{2}m_0^2\varphi_0^2\right) - g_0\varphi_0\bar{\psi}_p(i\gamma_5)\psi_p. \quad (1.3)$$

L'ipotesi che la forza agente tra due protoni sia, a meno di effetti elettromagnetici, la stessa che si esercita tra due neutroni è formulata già nel lavoro di Heisenberg del 1932. La principale verifica sperimentale di questa ipotesi è venuta dallo studio dei *nuclei speculari*<sup>1</sup>. Consideriamo per esempio la coppia di nuclei  ${}^3\text{H}$  e  ${}^3\text{He}$ . In termini di interazioni tra i nucleoni che li costituiscono l'unica differenza tra i due consiste nella presenza di una coppia *nn* nel primo nucleo sostituita dalla coppia *pp* nel secondo. Nel 1937 H.A. Bethe ha dimostrato che la differenza osservata tra le energie di legame di questi due nuclei è unicamente dovuta all'interazione coulombiana tra i protoni presenti nel nucleo di  ${}^3\text{He}$ , fornendo così una prima verifica diretta della proprietà delle forze nucleari chiamata *simmetria di carica*. Successivamente l'ipotesi è stata confermata dallo studio dei nuclei speculari con numero atomico sempre maggiore, confrontando non solo l'energia dello stato fondamentale ma l'intero spettro di eccitazione dei due nuclei, che risulta lo stesso a meno di correzioni elettromagnetiche.

Lo studio sperimentale della diffusione nucleone-nucleone ha mostrato che la simmetria di carica è una manifestazione di una proprietà più generale dell'interazione nucleare, chiamata *invarianza isotopica*. Utilizzando il formalismo introdotto da Heisenberg, protone e neutrone possono essere descritti come due stati della stessa particella, il *nucleone*, caratterizzata dal numero quantico di *isospin*  $t = 1/2$ . L'isospin può essere trattato

---

<sup>1</sup>Due nuclei si dicono *speculari* se hanno lo stesso numero di massa  $A$  e carica che differisce di una sola unità, cioè se sono ottenibili l'uno dall'altro scambiando un neutrone con un protone o viceversa. Grazie a nuclei radioattivi  $(A,Z)$ , che a causa del decadimento di un neutrone generano il nucleo speculare  $(A,Z-1)$ , è stato possibile confrontare le caratteristiche di molte coppie di nuclei speculari

come un momento angolare quanto-meccanico; protone e neutrone appartengono ad un doppietto e corrispondono, rispettivamente, alle proiezioni  $t_3=+1/2$  e  $-1/2$ . Le coppie protone-protone e neutrone-neutrone hanno isospin totale  $T=1$ , mentre una coppia protone-neutrone può essere in uno stato simmetrico, con  $T=1$ , o antisimmetrico, con  $T=0$ . L'invarianza isotopica implica che la forza che si esercita tra due protoni o due neutroni è la stessa che si esercitò tra un protone ed un neutrone nello stato simmetrico con  $T = 1$ .

Le lagrangiane per i sistemi  $nn$  e  $np$  si possono dunque scrivere nella forma (1.3) e l'invarianza isotopica può essere implementata calcolando le ampiezze di diffusione dei tre processi  $pp$ ,  $pn$ ,  $nn$  e imponendo che soddisfino le relazioni previste dall'invarianza isotopica. In questo modo vengono determinati i valori dei parametri del modello di Yukawa e si ottiene la relazione che lega la costante di accoppiamento dei pioni carichi  $g_+$  a quella dei pioni neutri  $g_0$ :

$$g_+ = \sqrt{2}g_0 . \quad (1.4)$$

La lagrangiana complessiva del modello di Yukawa si può scrivere in forma molto compatta, utilizzando il formalismo dello spin isotopico, in termini del doppietto di isospin dei campi dei nucleoni

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

e di un tripletto di isospin dei campi pionici, le cui componenti sono legate ai campi fisici,  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$  e  $\varphi_0$  dalle relazioni

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \varphi_1 = (\varphi_+ + \varphi_-)/\sqrt{2} \\ \varphi_2 = (\varphi_+ - \varphi_-)/\sqrt{2} \\ \varphi_3 = \varphi_0 \end{cases} . \quad (1.6)$$

Infine, separando la parte libera da quella in interazione, la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I , \quad (1.7)$$



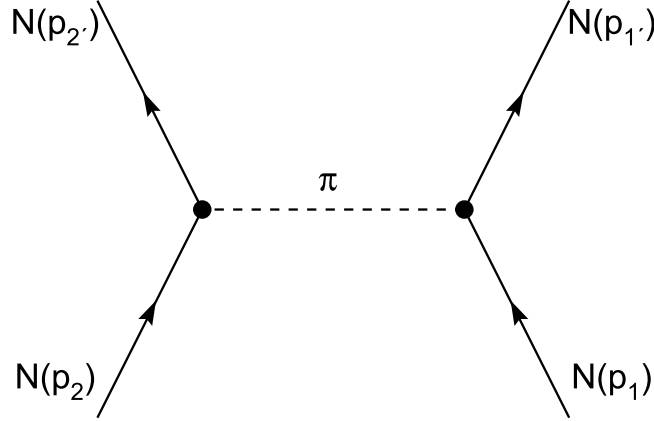


Figura 1.5: Diagramma di Feynman che descrive l'interazione tra due nucleoni tramite lo scambio di un pione.

con

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}_N(i\not{\partial} - M)\Psi_N + \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_i\partial^\mu\varphi_i - \frac{1}{2}m_\pi^2\varphi_i^2\right), \quad (1.8)$$

$$\mathcal{L}_I = -ig_0\bar{\Psi}_N\gamma_5(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Phi})\Psi_N, \quad (1.9)$$

dove  $M$  e  $m_\pi$  sono, rispettivamente, la massa del nucleone e del pione,  $\boldsymbol{\tau} \equiv (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$  e le  $\tau^i$  sono matrici di Pauli agenti nello spazio dell'isospin.

### 1.1.2 Determinazione del potenziale nucleone-nucleone

Consideriamo il processo di diffusione mostrato in Fig. 1.5. Usando la lagrangiana d'interazione (1.9) possiamo calcolare l'ampiezza di diffusione nucleone-nucleone al secondo ordine in  $g_0$  nel limite non relativistico. Dal risultato di questo calcolo si ottiene il potenziale di interazione tra due nucleoni dovuto allo scambio di un pione [10]

$$\begin{aligned} v_\pi &= \frac{g_0^2}{4M^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} = \\ &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{m_\pi^3}{4M^2} \frac{1}{3}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \left\{ \left[ (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + S_{12} \left( 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \right] \frac{e^{-x}}{x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{m_\pi^3} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \right\}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

dove  $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ ,  $x = m_\pi r$  e  $S_{12}$  è l'operatore definito come

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) , \quad (1.11)$$

analogo a quello che descrive l'interazione tra due dipoli magnetici.

Per  $g_0^2/(4\pi) \sim 14$ , il potenziale (1.10) riproduce in modo abbastanza accurato gli sfasamenti, misurati dagli esperimenti di diffusione nucleone-nucleone, corrispondenti a stati di momento angolare elevato. Poichè in questi stati la presenza della barriera centrifuga rende trascurabile la probabilità che due nucleoni si trovino a piccola distanza relativa, ciò indica che il meccanismo di scambio di un pione descrive in modo soddisfacente l'andamento a lungo raggio ( $r \gtrsim 1.5$  fm) dell'interazione nucleone-nucleone.

A medio e corto raggio diventano dominanti meccanismi più complessi, come lo scambio di due o più pioni, anche in interazione tre loro, o di mesoni più pesanti,  $\rho$  e  $\omega$ . Inoltre, come illustrato nella Fig. 1.4, a distanze relative  $\lesssim 1$  fm i nucleoni, essendo particelle composite di dimensione finita, tendono a sovrapporsi. In queste condizioni l'interazione dovrebbe, in linea di principio, essere descritta utilizzando i gradi di libertà dei costituenti dei nucleoni.

## 1.2 Potenziali fenomenologici

I potenziali fenomenologici che descrivono l'interazione complessiva tra due nucleoni sono generalmente scritti nella forma

$$v = \tilde{v}_\pi + v_R \quad (1.12)$$

dove  $\tilde{v}_\pi$  si ottiene dal potenziale di scambio di un pione (1.10) rimuovendo il contributo contenente la funzione- $\delta$ , mentre  $v_R$  descrive l'interazione a medio e corto raggio. La dipendenza da spin e isospin e la natura non centrale dell'interazione possono essere

evidenziate riscrivendo l'Eq. (1.12) nella forma

$$v(ij) = \sum_{ST} [v_{TS}(r_{ij}) + \delta_{S1}v_{tT}(r_{ij})S_{12}] P_{2S+1}\Pi_{2T+1} , \quad (1.13)$$

dove  $S$  e  $T$  sono, rispettivamente, lo spin e l'isospin totale della coppia interagente e

$$P_1 = \frac{1}{4}[1 - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)] , \quad P_3 = \frac{1}{4}[3 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)] \quad (1.14)$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}[1 - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)] , \quad \Pi_3 = \frac{1}{4}[3 + (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)] \quad (1.15)$$

sono gli operatori di proiezione sugli stati a spin e isospin definito.

Le funzioni  $v_{TS}(r_{ij})$  e  $v_{tT}(r_{ij})$  descrivono la dipendenza dalla distanza relativa nei diversi canali di spin e isospin, e a grande  $r_{ij}$  si riducono alle corrispondenti componenti del potenziale dovuto allo scambio di un pione. Il loro andamento viene determinato in modo da riprodurre i dati disponibili sul sistema di due nucleoni, cioè le proprietà del deutone (energia di legame, momento magnetico e momento di quadrupolo elettrico) e gli sfasamenti misurati negli esperimenti di diffusione.

Dalle equazioni (1.13), (1.14) e (1.15) segue che è possibile utilizzare una rappresentazione alternativa del potenziale, basata sul set di sei operatori

$$O_{ij}^{n \leq 6} = [1, (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j), S_{ij}] \otimes [1, (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)] . \quad (1.16)$$

Possiamo quindi riscrivere la (1.13) nella forma

$$v(ij) = \sum_{n=1}^6 v^{(n)}(r_{ij}) O_{ij}^{(n)} , \quad (1.17)$$

dove le funzioni  $v^{(n)}$  sono combinazioni lineari delle  $v_{TS}$  e  $v_{tT}$ . Il potenziale statico (1.17) riproduce in modo abbastanza accurato le proprietà del deutone. Per descrivere lo scattering nucleone-nucleone in stati S e P (cioè con momento angolare relativo, rispettivamente, 0 e 1, si devono includere due operatori addizionali dipendenti dall'impulso

$$O_{ij}^{n=7,8} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \otimes [1, (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)] , \quad (1.18)$$

dove  $\mathbf{L}$  è il momento angolare.

I potenziali che producono i migliori fit dei dati di diffusione disponibili ( $\sim 4000$  sfasamenti, a energie fino a  $\sim 280$  MeV nel sistema del laboratorio, riprodotti con un  $\chi^2/\text{dato} \sim 1$  utilizzando circa 40 parametri), vengono scritti in termini di diciotto operatori, con

$$O_{ij}^{n=9,\dots,14} = [\mathbf{L}^2, \mathbf{L}^2(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j), (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})^2] \otimes [1, \boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j], \quad (1.19)$$

$$O_{ij}^{n=15,\dots,18} = [1, \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j, S_{ij}] \otimes T_{ij}, \quad (\tau_{zi} + \tau_{zj}), \quad (1.20)$$

dove

$$T_{ij} = \frac{3}{r^2}(\boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\tau}_j \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j). \quad (1.21)$$

Gli operatori  $O_{ij}^{n=15,\dots,18}$  tengono conto dei piccoli effetti della rottura della simmetria di carica, dovuta alle differenze di massa e costante di accoppiamento tra i pioni carichi e quello neutro.

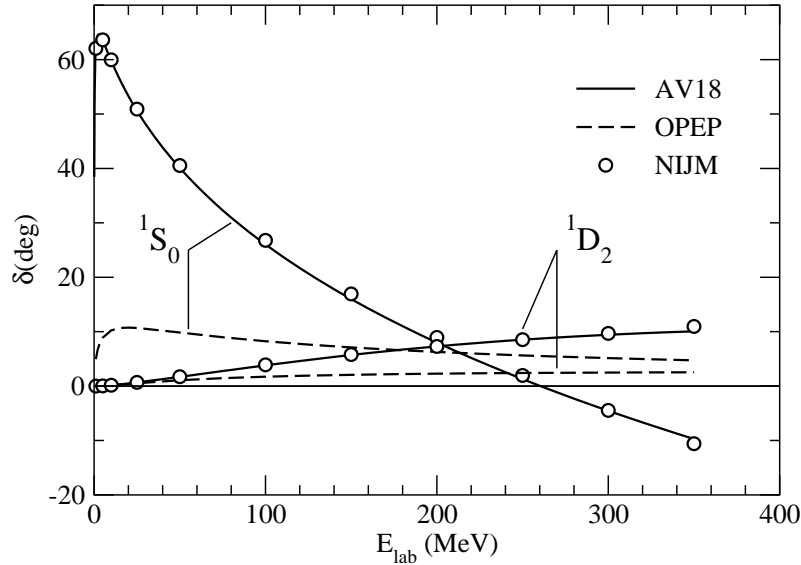


Figura 1.6: Confronto tra gli sfasamenti corrispondenti agli stati  $^1S_0$  and  $^1D_2$  estratti dell'analisi dei dati sperimentali [11] e il risultato dei fit effettuati usando il potenziale dovuto allo scambio di un pione (linee tratteggiate) e il potenziale Argonne  $v_{18}$  [2] (linee continue).

L'accuratezza con cui i modelli di potenziale più raffinati riproducono i dati sperimentali è illustrata nella Fig. 1.6. Le linee continue rappresentano il fit ottenuto dal

modello chiamato Argonne  $v_{18}$  [2], mentre quelle tratteggiate sono state ottenute usando il potenziale di scambio di un pione. Si vede chiaramente che il potenziale ottenuto dalla teoria di Yukawa riproduce in modo semiquantitativo l'andamento degli sfasamenti nello stato  ${}^3D_2$ , corrispondente a momento angolare  $L = 2$ , mentre fallisce completamente nel caso dello stato  ${}^1S_0$ , corrispondente a  $L = 0$ .

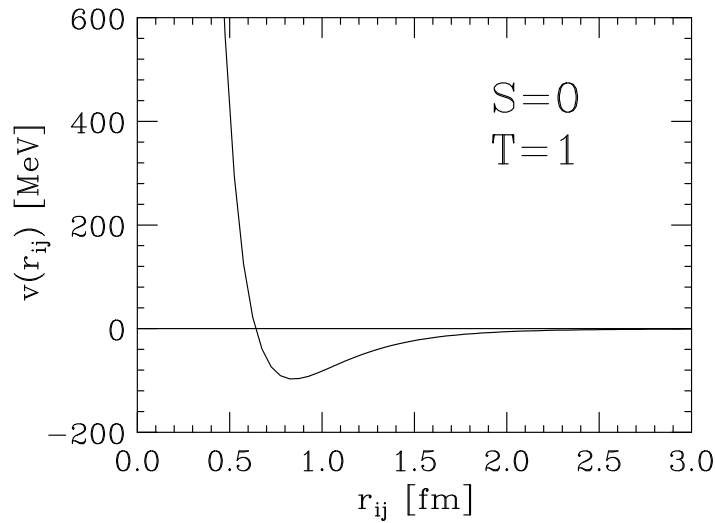


Figura 1.7: Dipendenza radiale del potenziale NN descrivente l'interazione tra due nucleoni nello stato di momento angolare relativo  $\ell = 0$ , spin e isospin totale  $S = 0$  e  $T = 1$ .

L'andamento del potenziale NN in uno stato di momento angolare relativo  $L = 0$  e spin e isospin totali pari a  $S=0$  e  $T=1$  è mostrato in Fig.1.7. Si osserva chiaramente come il core repulsivo a corto raggio, causato dallo scambio di mesoni pesanti o a processi che coinvolgono direttamente i costituenti dei nucleoni, è seguito da una regione intermedia attrattiva, dovuta in gran parte allo scambio di due pioni; infine, per grandi distanze interparticellari domina il meccanismo di scambio di un pione.



## Capitolo 2

# Teorie di campo effettive (EFT)

In fisica ci si trova spesso di fronte alla situazione in cui si è interessati solamente a processi che hanno un'energia caratteristica limitata. La descrizione questi processi in termini di un modello che renda conto in modo completamente generale del comportamento del sistema fisico è di solito troppo complicata ed in definitiva poco utile. Si cerca allora di costruire modelli che descrivano il comportamento del sistema a bassa energia e che siano più facilmente risolubili.

Un esempio concreto di una situazione come quella appena descritta può essere la descrizione delle eccitazioni roto-vibrazionali di una molecola. In questo caso lo spettro è comunque determinato dall'interazione elettrostatica di tutti i nuclei ed elettroni presenti nella molecola ma la descrizione in questi termini del fenomeno si rivela troppo complicata nella pratica. Si costruisce quindi una interazione effettiva in termini dei soli gradi di libertà significativi - le posizioni dei nuclei - e si risolve il problema di determinare lo spettro di questa teoria. Questo modello, noto col nome di approssimazione di Born - Oppenheimer, descrive la dinamica del sistema ad energie inferiori a quelle caratteristiche delle eccitazioni elettroniche.

Anche in teoria dei campi si delineano spesso situazioni di questo tipo. In questo caso si parla di *Teorie di Campo Effettive* (*Effective Field Theories* o EFT). Un esempio in questo senso è la teoria di Fermi per le interazioni deboli [12] . Questa prima

modellizzazione del fenomeno è costruita in termini di un'interazione locale tra correnti opportunamente costruite per rendere conto della fenomenologia. Il segnale evidente che la teoria di Fermi non può essere considerata come una descrizione esaustiva della dinamica delle interazioni deboli è il fatto che la costante di accoppiamento del modello,  $G_F = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ , ha dimensioni di una  $\mathcal{E}^{-2}$  (dove con il simbolo  $\mathcal{E}$  indichiamo sempre nel testo una grandezza con le dimensioni di un'energia), ovvero che la teoria non è rinormalizzabile. Una teoria completa delle interazioni deboli si ebbe circa trent'anni dopo la formulazione di Fermi grazie ai lavori di Glashow [13], Weinberg [14] e Salam [15] in cui la forza debole viene modellata con lo scambio di bosoni vettoriali massivi,  $W^\pm$  e  $Z^0$ . La teoria di Fermi può quindi essere considerata come la prima approssimazione di una teoria effettiva valida per energie molto al di sotto della soglia di produzione dei bosoni mediatori.

Una condizione naturale per l'applicazione di EFT sono le teorie di campo che presentano il fenomeno della rottura spontanea di simmetria. Infatti il *teorema di Goldstone* [16] garantisce che, in questi casi, siano presenti eccitazioni bosoniche a massa nulla che interagiscono con una intensità che va zero con il quadrimpulso. I bosoni di Goldstone sono quindi naturali candidati ad essere gradi di libertà in funzione dei quali si può costruire una EFT di bassa energia.

In questo capitolo inizieremo col descrivere, nella Sezione 2.1, un semplice modello di rottura di simmetria mostrando quale sia la logica per la scelta della parametrizzazione in cui costruire una teoria di bassa energia per i bosoni di Goldstone. Nella Sezione 2.2 daremo una giustificazione più formale per la costruzione di EFT introducendo la trasformata di Legendre in teoria dei campi. Infine, nella Sezione 2.3 mostreremo come costruire EFT per i bosoni di Goldstone associati alla rottura di simmetrie non abeliane, generalizzando a questi casi il ragionamento della sezione 2.1.



## 2.1 Un *toy model* per la costruzione di EFT per bosoni di Goldstone

In questa sezione discutiamo il piú semplice modello di teoria di campo con rottura spontanea di simmetria e mostriamo come se ne possa derivare una teoria effettiva di bassa energia per i bosoni di Goldstone. Questo per mostrare chiaramente, con un esempio, qual è in generale la connessione tra una teoria effettiva e la relativa teoria fondamentale soggiacente.

Ricordiamo brevemente il contenuto del teorema di Goldstone [16]: se in un sistema si presenta il fenomeno della rottura spontanea di simmetria, per cui lo stato di vuoto non è invariante sotto il gruppo di simmetria completo della leggi che governano il comportamento del sistema, allora, per ogni generatore rotto esiste un eccitazione (particella) che:

- sia a massa nulla,
- si disaccoppi nel limite di impulso nullo,
- abbia i numeri quantici che identificano il generatore rotto a cui corrisponde.

Consideriamo per un campo scalare complesso la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu^* \phi \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \quad , \quad (2.1)$$

con

$$\begin{aligned} V(\phi^* \phi) &= \frac{\lambda^2}{4} (\phi^* \phi - v^2)^2 \\ &= \underbrace{\frac{\lambda^2}{4} v^4}_{\text{cost.}} - \frac{\lambda^2}{4} v^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda^2}{4} (\phi^* \phi)^2 \quad . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Questa è invariante sotto trasformazioni globali del gruppo abeliano  $U(1)$ :

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi, \quad \alpha = \text{cost.} \quad (2.3)$$

La densità di hamiltoniana è

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + V(\phi^* \phi) \geq 0 \quad . \quad (2.4)$$

Quindi, poiché i termini dell'Hamiltoniana sono tutti definiti positivi, classicamente l'energia è minimizzata dalla configurazione di campo statico, costante e tale che  $V(\phi^* \phi) = 0$ . Questa condizione si realizza se  $\phi^* \phi = v^2 = \text{cost.}$  Ciò si verifica per infiniti valori costanti del campo che sono connessi tra loro da una trasformazione di simmetria.

Quantisticamente questa situazione si traduce nella condizione  $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = v \neq 0$ . Ancora una volta questo non accade per un unico stato ma per tutti gli stati connessi da una trasformazione di simmetria tali che  $\langle \phi \rangle = z$ , con  $|z|^2 = v^2$ .

Per identificare i gradi di libertà del problema, scegliamo lo stato di vuoto in modo che sia  $\langle \phi \rangle = v \in \mathbb{R}$ . Parametrizziamo quindi i campi come

$$\begin{cases} \phi(x) &= v + \frac{1}{\sqrt{2}} (R(x) + iI(x)) \\ \phi^*(x) &= v + \frac{1}{\sqrt{2}} (R(x) - iI(x)) \end{cases} \quad (2.5)$$

dove  $R(x)$  e  $I(x)$  sono due campi reali.

Sostituendo le (2.5) nella (2.2) otteniamo

$$V(\phi^* \phi) = \frac{\lambda^2}{4} (\phi^* \phi - v^2)^2 = \frac{\lambda^2}{4} \left[ \sqrt{2}vR + \frac{1}{2} (R^2 + I^2) \right]^2 = \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{2} \lambda^2 v^2 R^2 + \frac{\lambda^2}{2\sqrt{2}} vR (R^2 + I^2) + \frac{\lambda^2}{16} (R^4 + I^4 + 2R^2 I^2) \quad . \quad (2.7)$$

Possiamo quindi riscrivere la lagrangiana nella forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} \partial_\mu R \partial^\mu R + \frac{1}{2} \partial_\mu I \partial^\mu I - \frac{1}{2} (\lambda v)^2 R^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu R \partial^\mu R + \frac{1}{2} \partial_\mu I \partial^\mu I - \frac{1}{2} m_R^2 R^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -\frac{\lambda^2 v}{2\sqrt{2}} R I^2 - \frac{\lambda^2}{16} (R^4 + 2R^2 I^2 + I^4) \\ &= -\frac{g}{2!} R I^2 - \frac{g'}{4!} (R^4 + 2R^2 I^2 + I^4) \quad , \end{aligned} \tag{2.9}$$

avendo identificato

$$m_R = \lambda v \quad ; \quad m_I = 0 \quad ; \quad g = \frac{\lambda^2 v}{\sqrt{2}} \quad ; \quad g' = \frac{3}{2} \lambda^2 \quad . \tag{2.10}$$

La teoria descrive quindi due campi scalari reali, uno dei quali ha massa nulla ( $m_I = 0$ ) come conseguenza del *Teorema di Goldstone* [16] per la rottura spontanea della simmetria  $U(1)$ , in interazione tramite i vertici indicati in Fig. 2.1. Ci troviamo di fronte ad una naturale gerarchia nelle masse delle particelle, ma la separazione tra due scale di energia non è del tutto evidente nella lagrangiana con questa parametrizzazione; infatti non è manifesto il fatto che le interazioni del bosone di Goldstone si spengano a basse energie, così come richiesto dal Teorema di Goldstone.

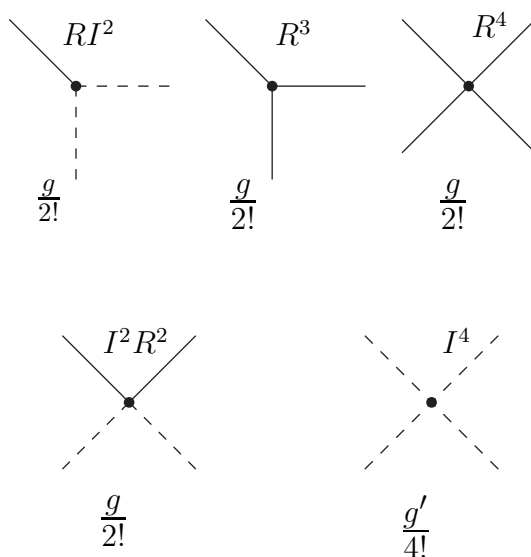


Figura 2.1: Vertici  $R - I$

Per chiarire questo punto consideriamo, il processo di scattering di due particelle leggere di bassa energia, ovvero con  $E_{cm} \ll m_R$ .

Definiamo l'ampiezza invariante per un processo con  $N$  particelle nello stato iniziale ed  $M$  nello stato finale tramite la relazione:

$$S_{fi}(p_1, \dots, p_N; p'_1, \dots, p'_M) = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)}{\sqrt{\prod_i^{N,M} 2\omega_i}} \mathcal{A}(p_1, \dots, p_N; p'_1, \dots, p'_M), \quad (2.11)$$

dove  $S$  è la matrice di diffusione.

Per il processo considerato, al *tree level*, ovvero all'ordine zero nell'espansione nel numero di *loop*, l'ampiezza che corrisponde ai grafici di Feynmann rappresentati in Fig. 2.2 vale

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p, q; p', q') &= i \frac{\left(-\frac{3}{2}\lambda^2\right)}{4!} 4! + \\ &+ \frac{i^2}{2} \left(\frac{-\frac{\lambda^2 v}{\sqrt{2}}}{2!}\right)^2 4 \cdot 2 \left[ \frac{i}{(p+q)^2 - m_R^2} + \frac{i}{(p-p')^2 - m_R^2} + \frac{i}{(p-q')^2 - m_R^2} \right] \\ &= -\frac{3}{2}i\lambda^2 - \frac{\lambda^4 v^2}{2} \left[ \frac{i}{(p+q)^2 - m_R^2} + \frac{i}{(p-p')^2 - m_R^2} + \frac{i}{(p-q')^2 - m_R^2} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

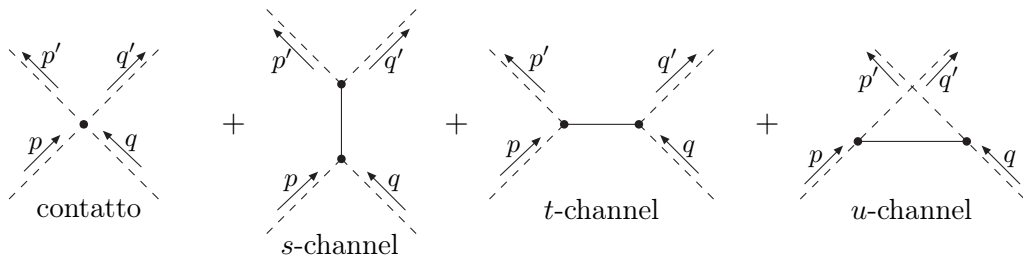


Figura 2.2: Diagrammi di Feynman *ad albero* per lo scattering  $I - I$

Poiché il processo avviene a bassa energia possiamo espandere i propagatori della particella pesante in potenze di  $k^2/m_R^2$ , dove  $k$  è il quadrimpulso che fluisce nella linea

del propagatore:

$$\frac{i}{k^2 - m_R^2} = -\frac{i}{m_R^2} \left[ 1 + \frac{k^2}{m_R^2} + \frac{k^4}{m_R^4} + \dots \right] \quad . \quad (2.13)$$

Se teniamo i termini fino all'ordine  $k^2/m_R^2$  e usiamo le relazioni (2.10), otteniamo

$$\mathcal{A} = \underbrace{-\frac{3}{2}i\lambda^2 - 3\lambda^2 \frac{m_R}{2} \left( \frac{-i}{m_R} \right)}_{=0} + i \frac{\lambda^2}{2m_R^2} [(p+q)^2 + (p-p')^2 + (p-q')^2] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_R^4}\right) \quad ; \quad (2.14)$$

quindi, ricordando che le particelle negli stati finali e iniziali sono a massa nulla e usando le variabili di Mandelstam, arriviamo al risultato

$$\mathcal{A} = i \frac{\lambda^2}{2m_R^2} [(p \cdot q)^2 + (p \cdot p')^2 + (p \cdot q')^2] = i \frac{\lambda^2}{2m_R^2} (s^2 + t^2 + u^2) \quad . \quad (2.15)$$

A causa della cancellazione nell'eq. (2.14), abbiamo ottenuto, dopo l'espansione di bassa energia nei propagatori, un'ampiezza polinomiale nei quadrimpulsi entranti e uscenti. In questo modo vediamo che  $\mathcal{A} \rightarrow 0$  nel limite di  $p_i \rightarrow 0$ ; i bosoni di Goldstone sono quindi effettivamente liberi nel limite di quadrimpulso nullo come richiesto dal teorema.

La cancellazione citata non è accidentale ma ha al contrario rilevante significato fisico. Per renderci conto di ciò risolviamo lo stesso problema usando una parametrizzazione alternativa dei campi, con la quale cerchiamo di rendere esplicite le caratteristiche del bosone di Goldstone direttamente nella lagrangiana. Poniamo allora

$$\phi(x) = \chi(x) e^{i\theta(x)} \quad (2.16)$$

dove  $\chi(x)$  e  $\theta(x)$  sono due campi scalari reali. In questo modo un'operazione di simmetria si riflette nell'aggiunta di un termine costante al campo  $\theta(x)$ . Affinché l'azione sia invariante sotto queste trasformazioni, il campo  $\theta$  deve quindi comparire nella Lagrangiana solo tramite le sue derivate, essendo quindi evidentemente privo di massa e libero nel limite di piccole derivate (cioè piccoli quadrimpulsi).

Per identificare meglio i gradi libertà è conveniente usare un'ulteriore modifica della parametrizzazione dei campi, in modo da rendere esplicita la scelta del punto di rottura di simmetria ( $\langle\phi\rangle = v$ ), ed imporre la normalizzazione canonica. Poniamo quindi

$$\begin{cases} \chi(x) = v + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(x) \\ \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}v}\xi(x) \end{cases} \quad (2.17)$$

La lagrangiana si scrive allora come

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\right)^2\frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \frac{\lambda^2}{4}\left(\sqrt{2}v\psi + \frac{1}{2}\psi^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \frac{1}{2}\lambda^2v^2\psi^2 \\ &\quad - \frac{\lambda^2v}{2\sqrt{2}}\psi^3 - \frac{\lambda^2}{16}\psi^4 - \frac{1}{\sqrt{2}v}\psi\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \frac{1}{4v^2}\psi^2\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Identifichiamo quindi  $\xi$  con il bosone di Goldstone ( $m_\xi = m_I = 0$ ) e  $\psi$  con la particella pesante ( $m_\psi = m_R = \lambda v$ ). La lagrangiana così parametrizzata presenta i vertici rappresentati in Fig. 2.3 dove ogni linea continua rappresenta un capo pesante mentre ogni linea tratteggiata rappresenta il campo del bosone di Goldstone che questa volta compare sempre tramite una derivata.

In questa forma, nei termini di interazione il campo del bosone di Goldstone compare sempre tramite la sua derivata, che nell'ampiezza farà comparire il quadrimpulso della rispettiva particella entrante o uscente.

Con questa parametrizzazione si rende manifesta la natura dei bosoni di Goldstone ma a prezzo di avere una lagrangiana non evidentemente rinormalizzabile, quando comunque lo sono gli elementi di matrice  $S$ . La scelta della parametrizzazione dipende dal problema che si sta considerando; nel caso delle teorie effettive, queste sono per loro stessa natura non rinormalizzabili, quindi è preferibile una parametrizzazione che favorisca l'evidenza dei bosoni di Goldstone.

Ora eseguiamo nuovamente, con i campi appena ridefiniti, il calcolo dell'ampiezza di scattering di due particelle di massa nulla. Siamo interessati solo al vertice  $\psi\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi$  in

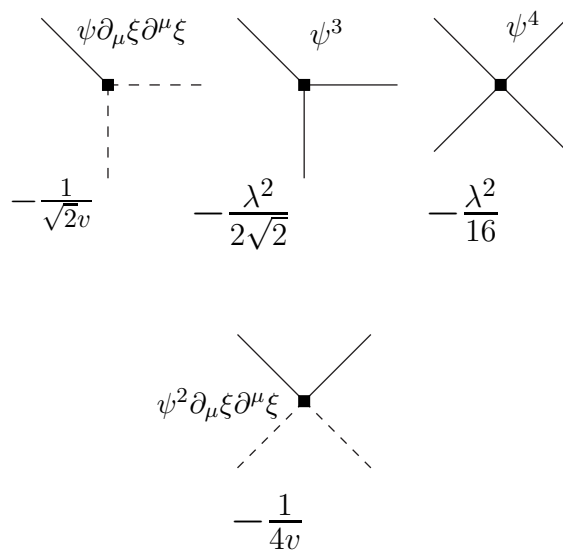
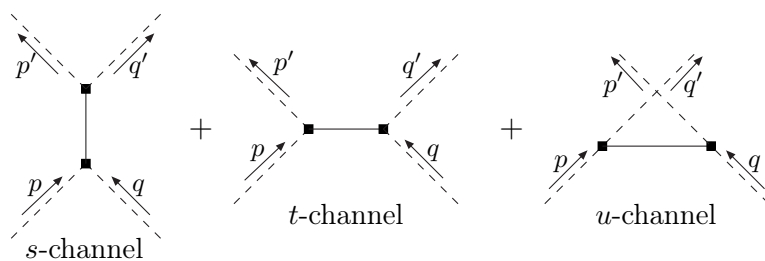

 Figura 2.3: Vertici  $\psi - \xi$ 

Fig. 2.3 per cui la costante d'accoppiamento vale  $-\frac{1}{\sqrt{2}v}$ . Il processo, al *tree level* coinvolge i grafici in Fig. 2.4,

per cui l'ampiezza vale

$$\mathcal{A} = \frac{i^2}{2}(4 \cdot 2) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}v}\right)^2 \left[ \frac{i(p \cdot q)(p' \cdot q')}{(p+q)^2 - m_R^2} + \frac{i(p \cdot p')(q \cdot q')}{(p-p')^2 - m_R^2} + \frac{i(q \cdot p')(p \cdot q')}{(p-q')^2 - m_R^2} \right] \quad (2.19)$$


 Figura 2.4: Diagrammi di Feynman *ad albero* per lo scattering  $\xi - \xi$

La (2.19), notando che le particelle coinvolte nello scattering sono di massa nulla, si può riscrivere come

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2v^2} \left[ \frac{i(2p \cdot q)^2}{(p+q)^2 - m_R^2} + \frac{i(2q \cdot q')^2}{(p-p')^2 - m_R^2} + \frac{i(2q \cdot p')^2}{(p-q')^2 - m_R^2} \right] . \quad (2.20)$$

Anche qui possiamo espandere secondo la eq.(2.13) ritrovando lo stesso risultato della eq.(2.15). Ciò è in accordo col *teorema di Haag* [17] secondo cui la matrice  $S$  è invariante per ridefinizioni dei campi.

L'espansione di bassa energia dà come risultato ampiezze polinomiali nei momenti delle particelle entranti e uscenti.

A questo punto possiamo fare l'osservazione cruciale secondo cui, per l'ampiezza del processo considerato, lo stesso risultato della (2.15), allo stesso ordine in  $\frac{1}{m_R}$ , si può ottenere da una *lagrangiana effettiva* per i bosoni di Goldstone con un accoppiamento locale che coinvolga le derivate dei campi leggeri:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - a (\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi)^2 \\ \text{con } a &= \frac{1}{4\lambda^2 v^4} \quad , \quad [a] = \mathcal{E}^{-4} \quad , \end{aligned} \quad (2.21)$$

che abbia quindi il vertice rappresentato in Fig. 2.5.

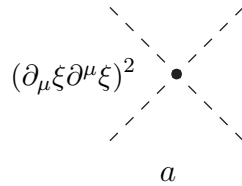


Figura 2.5: Vertice della lagrangiana effettiva

L'unico vincolo per la costruzione della lagrangiana effettiva, oltre ai principi fondamentali delle teorie di campo, sono le simmetrie della teoria fondamentale.



Se volessimo riprodurre i risultati della teoria fondamentale a livelli di accuratezza maggiore (ovvero ad ordini superiori in  $\lambda$  e/o  $\frac{1}{m_R}$ ) dovremmo aggiungere altri termini nella lagrangiana effettiva e, contestualmente altre costanti dimensionali il cui valore è da determinarsi da calcoli con teoria sottostante o da test sperimentali, con evidente perdita di potere predittivo.

Vedremo più avanti, nel Capitolo 4, come si possa trovare un criterio oggettivo per la scelta dei termini di interazione da utilizzare, una volta fissato il grado di accuratezza a cui si vuole effettuare il calcolo di un'osservabile.

Notiamo infine come gli accoppiamenti effettivi abbiano sempre un carattere locale in quanto la loro origine è riconducibile ad espansioni polinomiali nei propagatori di particelle mediatrici pesanti:

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 - M^2} = \\
 &= -\frac{i}{M^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-y)} \left( 1 + \frac{p^2}{M^2} + \frac{p^4}{M^4} + \dots \right) = \\
 &= -\frac{i}{M^2} \left( 1 - \frac{\square^2}{M^2} + \frac{\square^4}{M^4} - \dots \right) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-y)} = \\
 &= \left( 1 - \frac{\square^2}{M^2} + \frac{\square^4}{M^4} - \dots \right) \delta^{(4)}(x - y) \quad . \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Quantità polinomiali nello spazio dei momenti si traducono in quantità locali nello spazio delle coordinate.

## 2.2 L'azione effettiva come strumento formale per la costruzione di EFT

Una trattazione più formale della costruzione di teorie effettive di bassa energia si può affrontare nel contesto del formalismo dell'integrale funzionale. Ricordiamo brevemente i punti essenziali di questo approccio.

Si può definire il *funzionale generatore* tramite il seguente integrale funzionale:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i[S(\phi) + \int d^4x J(x)\phi(x)]} \quad , \quad (2.23)$$

dove  $S(\phi)$  è l'azione definita come

$$S(\phi) = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x [\mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{Int}(x)] \quad . \quad (2.24)$$

Le *funzioni di Green* si scrivono quindi come

$$\begin{aligned} G(x_1 \dots x_n) &\equiv \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle = \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS(\phi)} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS(\phi)}} \\ &= (-i)^n \frac{\left. \frac{\delta^n Z}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}}{Z[J=0]} = \\ &\quad \text{somma di tutti i diagrammi connessi e} \\ &\quad \text{sconnessi con } n \text{ gambe esterne.} \\ &= \frac{\quad}{Z[J=0]} \quad . \quad (2.25) \end{aligned}$$

Definendo

$$e^{iW[J]} \equiv Z[J] \longrightarrow W[J] = -i \ln Z[J] \quad , \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} G(x_1 \dots x_n) &= (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \\ &= \text{somma dei soli diagrammi connessi con } n \text{ gambe esterne} \quad (2.27) \end{aligned}$$

Le funzioni di Green contengono tutta l'informazione sui processi di scattering in cui la somma del numero di particelle entranti e di quelle uscenti sia uguale a  $n$ . Le formule di riduzione LSZ [18] legano infatti la funzione di Green a  $n$  punti all'ampiezza di tali processi.

### 2.2.1 L'azione effettiva come generatore dei diagrammi 1PI

Riassunti gli elementi del formalismo dell'integrale funzionale, possiamo operare una *trasformazione di Legendre* sui campi, come introdotto da Jona Lasinio [19], definendo

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \langle \phi(x) \rangle_J \equiv \varphi(x) \in \mathbb{C} \quad , \quad (2.28)$$

che è una funzione di  $J$ :

$$\varphi = \varphi(J) \quad . \quad (2.29)$$

Notiamo che

$$\varphi(J = 0) = \langle \phi(x) \rangle = \langle \phi(0) \rangle = \text{cost.} \quad (2.30)$$

è il valore d'aspettazione del campo  $\phi$  nel vuoto, ovvero corrisponde al parametro d'ordine della transizione di fase associata ad un'eventuale rottura spontanea di simmetria. La (2.29) può essere, almeno in linea di principio, invertita trovando

$$J = J(\varphi) \quad . \quad (2.31)$$

Definiamo l'*azione effettiva* come:

$$\Gamma(\varphi) = W(J) - \int d^4x J(x)\varphi(x) \quad . \quad (2.32)$$

Differenziando troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} &= \int d^4y \frac{\delta W}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi(x)} \varphi(y) - J(x) = \\ &= -J(x) \quad , \end{aligned} \quad (2.33)$$

avendo usato nell'ultimo passaggio la definizione (2.28).

L'ultima relazione è l'analogo delle equazioni di Hamilton nel formalismo canonico della meccanica e indica che la configurazione  $\bar{\varphi}$  per cui l'azione effettiva è stazionaria,

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} \right|_{\bar{\varphi}} = 0 \quad , \quad (2.34)$$

corrisponde ad una  $J$  nulla:

$$J(\bar{\varphi}) = 0 \quad . \quad (2.35)$$

Il ruolo dell'azione effettiva è quello di generare per differenziazione i *diagrammi irriducibili ad una particella* (*one particle irriducible* o 1PI), ovvero quei diagrammi che *non* possono essere divisi in due dal taglio di una linea interna.

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_n)} \right|_{\bar{\varphi}} = \sum \text{1PI con } n \text{ gambe esterne.} \quad (2.36)$$

Vedremo che questa caratteristica risulta cruciale nella costruzione di una teoria effettiva, infatti in questo caso vorremmo generare tutte le possibili interazioni locali.

Dimostriamo di seguito quanto appena affermato nel caso della funzione di Green a due punti.

$$G(x, y) \propto \left. \frac{\delta W}{\delta J(x) \delta J(y)} \right|_{J=0} = FT \left\{ \frac{i}{p^2 - m^2 + \Sigma(p) + i\epsilon} \right\} = \quad (2.37)$$

$$= \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \dots \quad ,$$

dove con il simbolo  $\bullet$  abbiamo indicato la *self energia*  $\Sigma(p)$  che rappresenta, in trasformata di Fourier, la parte 1PI della funzione a due punti.

Se invece calcoliamo la funzione a due punti usando l'azione effettiva, ricordando la (2.33), abbiamo

$$\tilde{G}(x, y) \propto \left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \right|_{\bar{\varphi}} = \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} (-J(x)) \quad . \quad (2.38)$$

È possibile dimostrare che si può effettuare un ulteriore passaggio<sup>1</sup> per cui,

$$\begin{aligned}\tilde{G}(x, y) &\propto \left. \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \right|_{\bar{\varphi}} = \frac{\delta}{\delta\varphi(y)}(-J(x)) \\ &= G^{-1}(x, y) = FT \{p^2 - m^2 + \Sigma(p)\}\end{aligned}\quad (2.42)$$

che è equivalente alla somma dei grafici 1PI.

L'argomento appena utilizzato può essere esteso, con evidenti complicazioni di calcolo al caso di funzioni di Green a più punti. Mostriamo in Fig. 2.6 la relazione tra i diagrammi generati dalla  $W[J]$  e dalla  $\Gamma(\varphi)$ , nel caso di funzioni di Green a tre e quattro punti per una generica teoria.

Vogliamo ora mostrare come, per una teoria libera, l'azione effettiva coincida con l'azione classica. Per semplicità prendiamo in considerazione un campo scalare reale, il cui propagatore indichiamo con il simbolo  $\Delta(x)$ . In questo caso la  $W[J]$  assume la semplice forma

$$W[J] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)\Delta(x-y)J(y) \quad , \quad (2.43)$$

---

<sup>1</sup>Nel caso di campo libero la validità della proprietà utilizzata si può verificare facilmente. Infatti scriviamo la seguente identità:

$$\begin{aligned}\delta^{(4)}(x-y) &= \frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = \int d^4z \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(z)} \frac{\delta\varphi(z)}{\delta J(y)} = \int d^4z \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(z)} \frac{\delta W}{\delta J(z)\delta J(y)} = \\ &= \int d^4z \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(z)} \Delta(z-y) \quad ;\end{aligned}\quad (2.39)$$

ed anche

$$\begin{aligned}\delta^{(4)}(x-y) &= (\square + m^2)_{x-y} \Delta(x-y) = \int d^4z \Delta^{-1}(x-z)\Delta(z-y) = \\ &= \int d^4z \delta(x-z) (\square + m^2)_{z-y} \Delta(z-y)\end{aligned}\quad (2.40)$$

Confrontando la (2.39) e la (2.40) si ha

$$\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(z)} = \Delta^{-1}(x-z) = \delta^{(4)}(x-z) (\square + m^2)_z \quad . \quad (2.41)$$

Nel caso interagente la (2.41) risulta ancora valida sostituendo  $\Delta(x-y) \rightarrow G(x, y)$ .

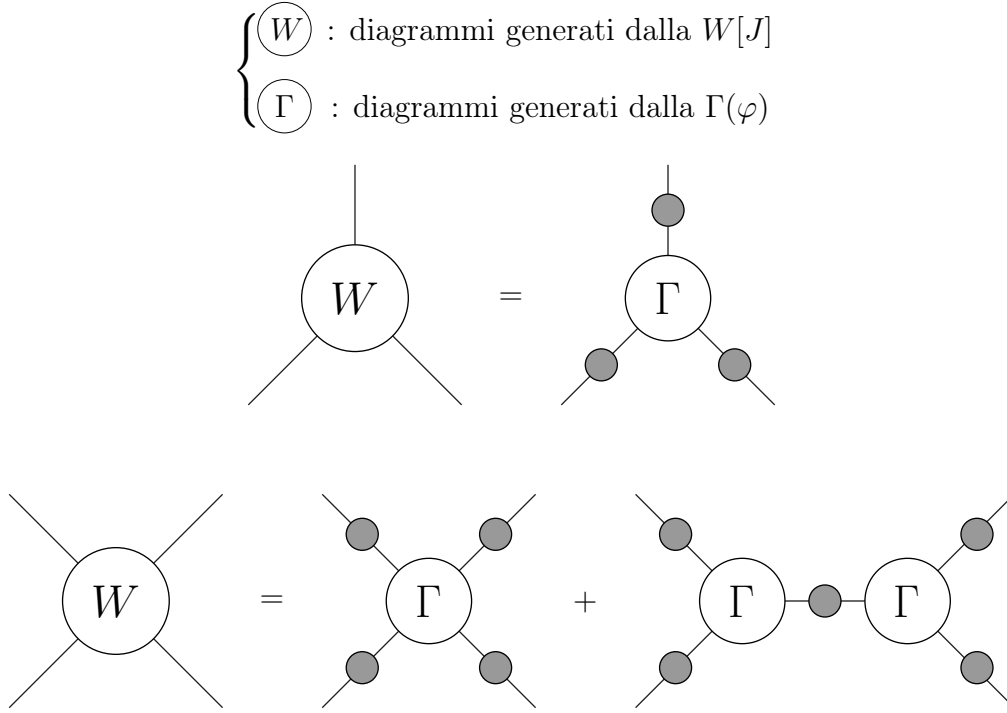


Figura 2.6: Confronto tra i diagrammi generati dalla  $W$  e Dalla  $\Gamma$  per le funzioni di Green a tre e quattro punti

che è una quantità non locale nella  $J$ , dato che, a causa della forma funzionale del propagatore, riceve contributo anche per  $x$  e  $y$  lontani a distanza di tipo tempo. Dalla (2.43) si ottiene la

$$\varphi(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = - \int d^4 y \Delta(x-y) J(y) \quad ; \quad (2.44)$$

che può essere facilmente invertita

$$\begin{aligned} J(x) &= - \int d^4 y \Delta^{-1}(x-y) \varphi(y) = \int d^4 y \delta^{(4)}(x-y) (\square + m^2)_y \varphi(y) \\ &= (\square + m^2)_x \varphi(x) \quad . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sostituendo la (2.44) nella definizione (2.32) possiamo scrivere l'azione effettiva nella forma,

$$\Gamma_0(\varphi) = + \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta(x-y) J(y) \quad , \quad (2.46)$$

che usando la (2.45) diventa

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0(\varphi) &= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y (\square + m^2)_x \varphi(x) \Delta(x-y) (\square + m^2)_y \varphi(y) = \\
 &\quad (\text{integrando due volte per parti}) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \varphi(x) \underbrace{[(\square + m^2)_x \Delta(x-y)]}_{-\delta^{(4)}(x-y)} (\square + m^2)_y \varphi(y) = \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^4y \varphi(y) (\square + m^2)_y \varphi(y) = S(\varphi) \quad , \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

Quindi, al contrario di  $W[J]$ ,  $\Gamma_0$  è una quantità locale.

Se consideriamo invece una teoria in interazione, esistono correzioni all'azione effettiva, ma in prima approssimazione questa può essere considerata coincidente con l'azione classica, infatti

$$\begin{aligned}
 e^{i\Gamma(\varphi)} &= e^{iW[J] - i \int d^4x J(x)\varphi(x)} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS(\phi) + i \int d^4x J(\phi-\varphi)} = \\
 &\quad (\text{operando un cambio di variabile d'integrazione funzionale}) \\
 &= \int \mathcal{D}\phi e^{iS(\varphi+\phi) + i \int d^4x J\phi} = \\
 &= e^{iS(\varphi)} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [S'(\phi(x)) + J(x)]\phi(x) + \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \phi(y) + \dots} \\
 &\quad (\text{usando la (2.33) all'ordine più basso}) \\
 &= e^{iS(\varphi)} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \phi(y) + \dots} \quad , \tag{2.48}
 \end{aligned}$$

quindi

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots \quad , \quad \text{con} \quad \Gamma_0(\varphi) = S(\varphi) \tag{2.49}$$

La prescrizione per il calcolo della prima correzione all'azione effettiva è quindi

$$\Gamma_1 = -i \log \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \phi(y) + \dots} \quad . \tag{2.50}$$

La sua esecuzione per teoria specifiche va oltre lo scopo di questa Tesi.

### 2.2.2 Costruzione di EFT tramite l'azione effettiva in presenza di gerarchia di massa

È di estremo interesse pratico il ruolo dell'azione effettiva per teorie in cui siano presenti gradi di libertà più leggeri di altri. Indichiamo per chiarezza con due simboli diversi le masse delle particelle leggere e pesanti:  $m \ll M$ . In questo caso infatti si può costruire una teoria di bassa energia in cui siano presenti esplicitamente solo i gradi di libertà leggeri e che descriva processi in cui questi ultimi interagiscono con energie sotto la soglia di produzione di particelle più pesanti presenti nella teoria fondamentale. In questo regime i gradi di libertà pesanti giocano comunque un ruolo in quanto mediano l'interazione tra particelle leggere. Una ragione ciò può essere individuata nel principio di indeterminazione secondo cui, la conservazione dell'energia può essere violata su scale di tempi dell'ordine  $\Delta t \lesssim 1/\Delta E \sim M$  durante cui una particella pesante virtuale può essere creata prima di annichilarsi. Per  $M \gg m$  l'interazione si può considerare locale nel tempo e per  $M \rightarrow \infty$  l'effetto delle particelle pesanti sulla dinamica dei gradi di libertà leggeri scompare.

Per chiarire le idee consideriamo il caso di una teoria con due gradi di libertà  $L$  e  $H$  le cui rispettive masse valgono  $m$  e  $M$ , con  $m \ll M$ . Il generatore dei diagrammi connessi è

$$W[j, J] = \int \mathcal{D}L \mathcal{D}H e^{iS(L,H) + i \int d^4x (jL + JH)} \quad (2.51)$$

Chiamando

$$\begin{aligned} l &\equiv \frac{\delta W}{\delta L} = \langle L \rangle_{j,J} \\ h &\equiv \frac{\delta W}{\delta H} = \langle H \rangle_{j,J} \quad , \end{aligned} \quad (2.52)$$

e seguendo la procedura indicata nella sezione precedente, possiamo costruire l'azione effettiva  $\Gamma(l, h)$  che genera tutti i diagrammi che siano 1PI sia rispetto a  $L$  che a  $H$ . Se siamo però interessati a processi in cui le particelle  $L$  interagiscono ad energie molto al di sotto della soglia di produzione di particelle pesanti  $H$ , ovvero con  $\sqrt{s} \ll M$  (dove



$s$  è la variabile di Mandelstam che indica il quadrato dell'energia nel centro di massa della collisione), possiamo mettere a zero le sorgenti esterne  $J$  dato che non dovremo mai differenziare il funzionale generatore rispetto a queste variabili. Inoltre poiché siamo interessati solo a energie limitate per i campi leggeri possiamo considerare nulle anche le componenti della trasformata di Fourier della  $j$  con quadrimpulso elevato, ovvero

$$\begin{aligned} J &= 0 \\ j(p) &= 0 \quad \forall p > \lambda \ll M \quad , \end{aligned} \tag{2.53}$$

dove  $\lambda$  è la scala scelta arbitrariamente per definire il regime di bassa energia. La (2.33) si riduce quindi a

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta h} = 0 \tag{2.54}$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta l} = 0 \quad \text{per la parte ad alta frequenza di } l \quad . \tag{2.55}$$

La (2.54) e la (2.55) definiscono una relazione

$$\bar{h} = \bar{h}(l_{l.f.}) \quad , \tag{2.56}$$

dove il suffisso *l.f.* si riferisce alla parte di bassa frequenza (*low frequency*) di  $l$ . Poiché, all'ordine più basso  $\Gamma_0(l, h) = S(l, h)$ , risolvere la (2.56) equivale a risolvere le equazioni del moto per  $h$  in funzione di  $l$ . Possiamo quindi definire

$$\gamma(l) = \Gamma(l, \bar{h}(l)) \quad . \tag{2.57}$$

La quantità  $\gamma(l)$  genera per differenziazione i diagrammi che sono 1PI solo rispetto a linee interne dei campi leggeri, come enfatizzato nella Fig. 2.7. A causa della condizione  $J = 0$  sono comunque presenti diagrammi con linee interne dei campi pesanti.

Tuttavia la soluzione dell'equazione  $\bar{h} = \bar{h}(l_{l.f.})$  si può trovare solo in maniera perturbativa e coinvolge quantità come la funzione a due punti  $G(x, y)_h = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - M^2} e^{-ip(x-y)}$ .

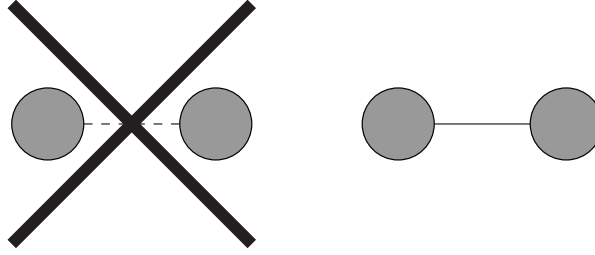


Figura 2.7: Tra i diagrammi generati dalla  $\gamma(l)$  vi sono quelli 1PR rispetto alla particella pesante ma non rispetto a quella leggera

Queste possono essere soggette ad un'espansione in serie di potenze di  $1/M$  così che la  $\gamma(l)$  risulta essere un polinomio in  $l$  e nelle sue derivate, quindi un suo funzionale locale. Sempre nell'approssimazione in cui l'azione effettiva e l'azione classica coincidono possiamo quindi trovare una lagrangiana locale per descrivere processi di bassa energia come

$$\gamma(l) = \int d^4x \mathcal{L}_{eff}(l) \quad . \quad (2.58)$$

In generale la lagrangiana effettiva conterrà gli infiniti termini consentiti dalla simmetria della teoria sottostante che possono essere catalogati in base all'ordine in  $1/M$ .

### 2.3 Teorie effettive per bosoni di Goldstone di simmetrie non Abeliane

Nella Sezione precedente abbiamo motivato la costruzione di lagrangiane locali per la descrizione di processi di bassa energia. Inoltre nella sezione 2.1 abbiamo visto come, considerando un semplice modello di rottura di simmetria, per costruire una teoria di bassa energia per i bosoni di Goldstone sia conveniente operare una riparametrizzazione dei campi, in modo da rendere espliciti i bosoni di Goldstone e la loro natura. Ciò si è rivelato abbastanza semplice nel caso in cui il gruppo di simmetria sia abeliano, dato che, in questo caso, è semplice trovare una parametrizzazione per cui le leggi di trasformazione per i bosoni di Goldstone si traducono banalmente nell'aggiunta di una

costante. Nel caso di simmetrie non abeliane questa operazione è molto più delicata, in quanto riparametrizzando i campi, in generale, le leggi di trasformazione per le nuove variabili non sono più lineari: si ha una *realizzazione non lineare* di una simmetria.

Cerchiamo comunque di seguire un procedimento analogo a quello seguito nel caso abeliano.

Scriviamo la forma più generale di un lagrangiana simmetrica sotto trasformazioni appartenenti ad un gruppo  $G$  non abeliano; indichiamo col simbolo  $\phi$  un vettore colonna di  $N$  campi scalari reali (a cui ci limitiamo per semplicità)  $\phi_i$ ,  $i = 1 \dots N$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^T \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad . \quad (2.59)$$

Il termine cinetico è manifestamente invariante per trasformazioni ortogonali appartenenti al gruppo  $O(N)$ . Per il potenziale richiediamo che sia invariante sotto un gruppo di trasformazioni  $G$  (non necessariamente coincidente con  $O(N)$ , ma eventualmente un suo sottogruppo) che rappresenta il gruppo di simmetria della teoria:  $V(g\phi) = V(\phi)$ ,  $\forall g \in G$ . La  $n$ -upla  $\phi$  trasforma linearmente sotto l'azione di un elemento di  $G$ .

Richiediamo inoltre che il potenziale  $V(\phi)$  acquisti il suo valore minimo per un valore del campo  $\langle \phi \rangle \equiv v \neq 0$ , ovvero che ci sia rottura spontanea di simmetria dal gruppo  $G$  al sottogruppo  $H \subset G$  che lascia invariato lo stato di vuoto:  $hv = v$ ,  $\forall h \in H$ .

Indichiamo con  $T_a$  i generatori del gruppo  $G$ , così che un generico elemento del gruppo possa scriversi come  $g = \exp[i\alpha^a T_a]$ . I  $T_a$  soddisfano l'algebra di Lie del gruppo, identificata dalle relazioni  $[T_a, T_b] = ic_{abd} T_d$ , dove le  $c_{abd}$  sono dette *costanti di struttura* del gruppo. I generatori possono essere divisi in generatori rotti e non rotti in base al dettaglio della rottura spontanea di simmetria:  $\{T_a\} = \{X_\alpha, t_i\}$ , dove i  $\{t_i\}$  sono i generatori del sottogruppo non rotto  $H$  e  $\{X_\alpha\}$  sono i generatori rotti<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Usiamo gli indici greci per identificare i generatori rotti e quelli latini per i generatori non rotti.

La proprietà di chiusura del sottogruppo  $H$  rispetto all'operazione di prodotto richiede che valga  $[t_i, t_j] = ic_{ijk}t_k$ . Questa condizione si può anche riscrivere come  $c_{ij\alpha} = 0$ ; quindi se usiamo l'antisimmetria delle costanti di struttura è evidente che  $[X_\alpha, t_j] = ic_{\alpha j\beta}X_\beta$ .

Al contrario non è garantita in generale nessuna forma particolare per il commutatore  $[X_\alpha, X_\beta]$  che può essere proporzionale sia a  $X_\gamma$  sia a  $t_i$ .

Una trasformazione infinitesima dello stato di vuoto nella direzione identificata da un generatore rotto  $X_\alpha$  dà  $\delta v = i\epsilon X_\alpha v$ . In analogia al caso  $U(1)$ , ci aspettiamo che i bosoni di Goldstone siano le proiezioni del campo in questa direzione, ovvero  $v^T X_\alpha \phi$ . Esiste quindi un bosone di Goldstone per ogni generatore rotto.

In analogia con quanto fatto nella Sezione 2.1 nel caso abeliano, per rendere espliciti i bosoni di Goldstone, scegliamo per i campi la parametrizzazione

$$\phi(x) = U(\theta(x)) \chi(x), \quad \text{con} \quad U(\theta(x)) = e^{i\theta^\alpha(x)X_\alpha} \quad (2.60)$$

e richiediamo che i campi  $\chi$  siano ortogonali ai bosoni di Goldstone<sup>3</sup>

$$\chi^T X_\alpha v = 0 \quad . \quad (2.61)$$

Le trasformazioni generate dalle  $X_\alpha$  non formano un gruppo. Se ne può comunque dare una classificazione in termini matematici. Infatti se scegliamo una trasformazione  $g = e^{i\omega^\alpha X_\alpha} \notin H$  allora la condizione (2.61) si riscrive come

$$\chi^T g v = \chi^T v \quad , \quad (2.62)$$

che è valida anche per ogni trasformazione  $g'$  legata a  $g$  dalla moltiplicazione da destra per un elemento di  $H$  ( $g' = gh$ ), dato che  $h$  lascia invariato lo stato di vuoto. Quindi le trasformazioni  $gH$  formano una classe di equivalenza che è chiamata *coset destro*. L'insieme di tutti i coset destri è indicato con il simbolo  $G/H$  ed è l'insieme delle trasformazioni generate dalle sole  $X_\alpha$ .

---

<sup>3</sup>La dimostrazione dell'esistenza di una tale parametrizzazione può essere trovata in [20].

La parametrizzazione (2.60) può alternativamente essere visualizzata nel modo seguente: operiamo una trasformazione sui campi in modo che risultino non nulle solo le componenti ortogonali ai bosoni di Goldstone  $U^{-1}(\theta)\phi = \chi$ ; perché questa condizione valga in ogni punto dello spazio tempo la trasformazione deve dipendere dal punto; sarà questa dipendenza a generare i bosoni di Goldstone nella lagrangiana riparametrizzata. Infatti, una volta operata la trasformazione,  $U(\theta)$  comparirà solo tramite il termine cinetico  $\partial_\mu\phi^T\partial^\mu\phi$  e lo farà solo per mezzo delle sue derivate, descrivendo quindi i bosoni di Goldstone.

Dobbiamo ora identificare come trasformano i campi riparametrizzati sotto il gruppo di simmetria  $G$ ; ovvero dobbiamo trovare la forma delle trasformazioni

$$\begin{cases} \theta & \rightarrow \tilde{\theta} \\ \chi & \rightarrow \tilde{\chi} \end{cases} \quad (2.63)$$

tali che

$$gU(\theta)\chi = U(\tilde{\theta})\tilde{\chi} \quad . \quad (2.64)$$

Notiamo subito che se definiamo

$$\gamma \equiv U(\tilde{\theta})^{-1}gU(\theta) \quad , \quad (2.65)$$

allora  $\gamma$  trasforma i campi  $\chi$ :

$$\gamma\chi = \tilde{\chi} \quad . \quad (2.66)$$

Cruciale è il fatto che  $\gamma$  appartenga al sottogruppo  $H^4$ , quindi può essere scritta come

$$\gamma = e^{iu^i t_i} \quad (2.67)$$

per qualche funzione  $u^i(\theta, g)$ . Quindi le trasformazioni sono del tipo

$$\begin{cases} \theta & \rightarrow \tilde{\theta}(\theta, g) \\ \chi & \rightarrow \tilde{\chi}(\theta, g, \chi) \end{cases} \quad (2.68)$$

---

<sup>4</sup>Ciò si dimostra richiedendo che valga la condizione di ortogonalità (2.61) anche dopo una generica trasformazione  $g \in G$  e usando le regole di commutazione per i generatori descritte sopra.

e sono identificate dalle relazioni

$$\begin{cases} g e^{i\theta^\alpha X_\alpha} &= e^{i\tilde{\theta}^\alpha X_\alpha} e^{iu^i t_i} \\ \tilde{\chi} &= e^{iu^i t_i} \chi \end{cases} \quad (2.69)$$

che devono essere lette come le definizioni delle funzioni non lineari  $\tilde{\theta}^\alpha(\theta, g)$  e  $u^i(\theta, g)$ .

Le leggi di trasformazione (2.69) assumono una forma semplice nel caso particolare in cui  $g = h \in H$ . In tal caso i campi trasformano linearmente secondo

$$\begin{aligned} \gamma &= h \\ \tilde{U} &= h U h^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (2.70)$$

Al contrario per una trasformazione  $g \in G/H$ , i campi trasformano in maniera non lineare e si può dimostrare [21] che al prim'ordine le leggi di trasformazione sono

$$\begin{cases} u_i &= -c_{i\alpha\beta} \omega^\alpha \theta^\beta + \mathcal{O}(\theta^2) \\ \delta\theta^\alpha &= \omega^\alpha - c_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \theta^\gamma + \mathcal{O}(\theta^2) \quad . \end{cases} \quad (2.71)$$

Notiamo subito che, essendo le trasformazioni per i campi  $\theta$  non omogenee, questi, perché la lagrangiana sia invariante, devono comparire tramite le loro derivate, confermando la loro natura di bosoni di Goldstone.

Inoltre è cruciale il fatto che queste trasformazioni siano non lineari; infatti per questo, anche se le simmetrie sotto cui è invariante la lagrangiana di partenza sono globali ( $\partial_\mu \omega = 0$ ), le leggi di trasformazione dei nuovi campi risultano essere dipendenti dal punto: ( $\partial_\mu \gamma \neq 0$ ). Per costruire lagrangiane invarianti con queste variabili dobbiamo quindi ricorrere al concetto di *derivata covariante*.

### Costruzione di lagrangiane invarianti

Il termine nella lagrangiana che trasforma in maniera interessante, sotto cambio di variabili, è quello cinetico,  $\partial_\mu \phi^T \partial^\mu \phi$ . Infatti

$$\partial_\mu \phi = U[\partial_\mu \chi + U^{-1} \partial_\mu U \chi] \equiv U \mathcal{D}_\mu \chi \quad , \quad (2.72)$$

dove abbiamo definito la derivata covariante  $\mathcal{D}_\mu\chi = \partial_\mu\chi + U^{-1}\partial_\mu U\chi$ .

Dopo il cambio di variabili, il campo  $\chi$ , a causa della realizzazione non lineare della simmetria, trasforma secondo trasformazioni *locali* del gruppo  $H$ , come illustrato nella seconda delle eq. (2.69). Il termine cinetico è manifestamente  $G$  invariante con la parametrizzazione dei campi  $\phi$ , quindi deve rimanere tale anche dopo il cambio di variabili. Ciò accade perché il termine  $U^{-1}\partial_\mu U$  trasforma, sotto il gruppo locale  $H$ , come la *connessione affine* di una teoria di gauge:

$$\begin{aligned} U^{-1}\partial_\mu U &\rightarrow \tilde{U}^{-1}\partial_\mu\tilde{U} = \\ &= \gamma(U^{-1}\partial_\mu U)\gamma^{-1} - (\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1} \quad , \end{aligned} \tag{2.73}$$

così che  $\mathcal{D}_\mu\chi \rightarrow \gamma\mathcal{D}_\mu\chi$ . In questo modo basta costruire una lagrangiana  $H$ -invariante per i campi  $\chi$  e sostituire  $\partial_\mu\chi \rightarrow \mathcal{D}_\mu\chi$  per avere una teoria  $G$ -invariante.

Dobbiamo ora scrivere l'equivalente della lagrangiana libera dei campi di gauge. Vediamo come si possono scrivere le connessioni in termini dei generatori. Notiamo prima di tutto che per la variazione di un elemento del gruppo si ha

$$\delta g \propto \epsilon_a T^a \quad , \tag{2.74}$$

dove  $\epsilon_a$  sono i parametri infinitesime della trasformazione. Quindi possiamo scrivere

$$U^{-1}\partial_\mu U = ie_\mu^a X_a - i\mathcal{A}_\mu^i t_i = ie_\mu - i\mathcal{A}_\mu \tag{2.75}$$

Notiamo da questa definizione che le  $e$  e le  $\mathcal{A}$  contengono linearmente le derivate dei campi  $\theta$ , che possiamo dunque rendere esplicite:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\mu^i(\theta) &= \mathcal{A}_\alpha^i(\theta) \partial_\mu\theta^\alpha \\ e_\mu^\alpha(\theta) &= e_\beta^\alpha(\theta) \partial_\mu\theta^\beta \end{cases} .$$

Dunque poiché, essendo  $\gamma \in H$  che è un gruppo, il termine  $\partial_\mu \gamma \gamma^{-1}$  è semplicemente proporzionale alle  $t_i$ , la (2.73) si riscrive come

$$\begin{cases} -i\mathcal{A}_\mu(\theta) & \rightarrow & i\mathcal{A}_\mu(\tilde{\theta}) = \gamma[-i\mathcal{A}_\mu(\theta)]\gamma^{-1} - (\partial_\mu \gamma)\gamma^{-1} \\ ie_\mu(\theta) & \rightarrow & ie_\mu(\tilde{\theta}) = \gamma[ie_\mu(\theta)]\gamma^{-1} \quad , \end{cases}$$

quindi sotto trasformazioni infinitesime  $g \simeq 1 + i\omega^\alpha X_\alpha$  e  $\gamma(g, \theta) \simeq 1 + iu^i(\theta, \omega)t_i$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\mu^i(\theta) & \rightarrow & \mathcal{A}_\mu^i(\tilde{\theta}) = \mathcal{A}_\mu^i(\theta) + \partial_\mu u^i(\theta, \omega) - \mathcal{A}_\mu^k(\theta)c_{jk}^i u^j(\theta, \omega) \\ e_\mu^\alpha(\theta) & \rightarrow & e_\mu^\alpha(\tilde{\theta}) = e_\mu^\alpha(\theta) - c_{i\beta}^\alpha u^i(\theta, \omega)e_\mu^\beta(\theta) \quad . \end{cases}$$

Vediamo che sotto il gruppo  $G$ , le  $\mathcal{A}_\mu^i$  trasformano come campi di gauge, mentre le  $e_\mu^\alpha$  trasformano in maniera covariante.

Per costruire funzioni di  $\mathcal{A}_\mu$  che siano invarianti è utile definire il *tensore di Yang e Mills*

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + -i [\mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_\mu] \quad (2.76)$$

che trasforma in maniera covariante:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \rightarrow \gamma \mathcal{G}_{\mu\nu} \gamma^{-1} \quad (2.77)$$

Notiamo che a differenza della *teoria di Yang e Mills* per le simmetrie di gauge, le connessioni in questo caso contengono i campi in maniera non lineare.

A questo punto per costruire una lagrangiana che sia  $G$  invariante basta saper costruire una  $H$  invariante con le quantità  $e_\mu, \mathcal{G}_{\mu\nu}$ , ovvero tale che

$$\mathcal{L}(he_\mu h^{-1}, h\mathcal{G}_{\mu\nu} h^{-1}, h\chi, h\partial_\mu e_\nu h^{-1}, h\partial_\mu \chi, \dots) \equiv \mathcal{L}(e_\mu, \mathcal{G}_{\mu\nu}, \chi, \partial_\mu e_\nu, \partial_\mu \chi, \dots) \quad , \quad (2.78)$$

dove i puntini indicano termini con un numero maggiore di derivate; la promozione alla  $G$ -invarianza si avrà automaticamente sostituendo alle derivate semplici le derivate covarianti con le connessioni  $\mathcal{A}_\mu$ :  $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i\mathcal{A}_\mu$ ,

$$\mathcal{L}(e_\mu, \mathcal{G}_{\mu\nu}, \chi, \partial_\mu e_\nu, \partial_\mu \chi, \dots) \rightarrow \mathcal{L}(e_\mu, \mathcal{G}_{\mu\nu}, \chi, \mathcal{D}_\mu e_\nu, \mathcal{D}_\mu \chi, \dots) \quad . \quad (2.79)$$



Ovviamente in questo modo si possono costruire infiniti termini via via più complicati da inserire nella lagrangiana. Questi però non hanno tutti lo stesso peso nell'ottica dell'espansione di bassa energia. Nel Capitolo 4 sarà illustrato come, attraverso argomenti di analisi dimensionale, sia possibile individuare un criterio, noto col nome di *power counting*, in base al quale selezionare i diagrammi e gli accoppiamenti che contribuiscono ad un fissato ordine nell'espansione di bassa energia.



# Capitolo 3

## La QCD e le sue simmetrie interne

### 3.1 La lagrangiana della QCD

La cromodinamica quantistica è la teoria di gauge che descrive la dinamica delle particelle dotate di carica di colore, responsabile delle interazioni forti. Il grado di libertà di colore è stato originariamente introdotto per spiegare l'apparente violazione del principio di Pauli nella  $\Delta^{++}$ , la cui funzione d'onda nel modello a quark è simmetrica nei gradi di libertà spaziali, di spin e di sapore. L'aggiunta di un numero quantico con tre valori possibili associato ai quark risolve questo problema, in quanto permette di costruire una funzione d'onda completamente antisimmetrica nel nuovo indice. L'ipotesi che il numero di colori  $N_c$  fosse uguale a tre è stata confermata sperimentalmente dalle misure del rate di decadimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  e, successivamente, del rapporto

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} . \quad (3.1)$$

Nella QCD i quark sono rappresentati dai campi fermionici  $q_c^i(x)$ , dove gli indici  $i$  e  $c$  corrispondono rispettivamente a sapore ( $i = u, d, s, c, b, t$ ) e colore ( $i = r$  (red),  $g$  (green),  $b$  (blue)), che trasformano secondo la rappresentazione fondamentale del gruppo  $SU(3)$

$$q_c^i(x) \longrightarrow (\exp -i\alpha_A(x)t^A)_{cc'} q_{c'}^i(x) . \quad (3.2)$$

Nell'equazione (3.2)  $A = 1, \dots, N_c^2 - 1 = 8$  è l'indice associato agli otto generatori di  $SU(3)$ ,  $t^A$ , mentre le  $\alpha^A$  sono otto funzioni della coordinata spazio-temporale. Nella rappresentazione fondamentale i generatori possono essere espressi in termini delle otto matrici hermitiane a traccia nulla di Gell-Mann

$$\begin{aligned} \lambda^1 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^7 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

secondo la

$$t^A = \frac{1}{2} \lambda^A, \quad (3.3)$$

da cui segue

$$\text{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}. \quad (3.4)$$

La costruzione di una lagrangiana invariante per trasformazioni locali dei campi dei quark (3.2) richiede l'introduzione di otto bosoni di gauge di massa nulla, chiamati gluoni. I campi gluonici  $G_A^\mu(x)$  trasformano secondo la rappresentazione aggiunta del gruppo  $SU(3)$ , i cui generatori sono proporzionali alle costanti di struttura del gruppo,  $f^{ABC}$ , definite dalle relazioni

$$[t_A, t_B] = i f^{ABC} t_C. \quad (3.5)$$

Dalla legge di trasformazione (consideriamo, senza perdita di generalità il caso di trasformazioni infinitesime)

$$G_A^\mu t^A \longrightarrow G_A^\mu t^A - \frac{1}{g_s} \partial^\mu \alpha_A t^A + G_A^\mu \alpha_B f^{ABC}. \quad (3.6)$$

segue che il campo risultante dalla applicazione della derivata covariante

$$D_{cc'}^\mu = \delta_{cc'} \partial^\mu - ig_s G_A^\mu(x) t_{cc'}^A \quad (3.7)$$

al campo  $q_c^i$  trasforma come il campo non derivato, cioè che

$$(D^\mu q^i)_c(x) \rightarrow (\exp -i\alpha_A(x)t^A)_{cc'} (D^\mu q^i)_{c'}(x) . \quad (3.8)$$

La lagrangiana della QCD contiene quindi un termine

$$\mathcal{L}_q = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{q}^i (\not{D} - m_0^i) q^i , \quad (3.9)$$

dove  $\not{D} = \gamma_\mu D^\mu$  e  $m_0^i$  è la massa del quark di sapore  $i$ . Alla (3.9), che include i contributi cinetici associati ai campi fermionici, i termini di massa corrispondenti e l'interazione tra quark e gluoni con costante di accoppiamento  $g_s$ , si deve aggiungere il termine che descrive i bosoni di gauge

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} \mathcal{G}_A^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}^A , \quad (3.10)$$

la cui invarianza è assicurata dal fatto che il tensore antisimmetrico

$$\mathcal{G}_A^{\mu\nu} = \partial^\mu G_A^\nu - \partial^\nu G_A^\mu + g_s f^{ABC} G_B^\mu G_C^\nu \quad (3.11)$$

trasforma ancora secondo la rappresentazione aggiunta

$$\mathcal{G}_A^{\mu\nu}(x) \rightarrow \mathcal{G}_A^{\mu\nu}(x) + f^{ABC} \alpha_B(x) \mathcal{G}_C^{\mu\nu}(x) . \quad (3.12)$$

La lagrangiana (3.10) contiene termini di interazione tra tre e quattro gluoni, con costante d'accoppiamento ancora uguale a  $g_s$ . La presenza di questi termini è dovuta al fatto che i gluoni, a differenza dei bosoni di gauge della QED, cioè i fotoni, non sono particelle neutre, ma posseggono una carica di colore. Questa proprietà è una conseguenza della natura non abeliana del gruppo  $SU(3)$ , espressa dalle relazioni (3.5).

La presenza delle costanti di struttura  $f^{ABC}$  nelle (3.11) è all'origine di due importanti proprietà che caratterizzano la QCD:

- (i) la costante di accoppiamento decresce al crescere del quadrato del quadrimpulso trasferito nell'interazione,  $Q^2$ . Questa proprietà, chiamata *libertà asintotica*, appare chiaramente dalla relazione, che si ottiene includendo termini a un loop,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g_s^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - 2N_f/3) \log(Q^2/\Lambda^2)}, \quad (3.13)$$

dove  $N_f$  è il numero di sapori attivi e  $\Lambda$  è il parametro di scala della teoria, che può essere estratto dal fit dei dati sperimentali a grande  $Q^2$ . Il valore risultante per  $N_f = 5$  è  $\Lambda \sim 200$  MeV [22]. La (3.13) permette di stabilire i limiti di validità della descrizione perturbativa della dinamica di quark e gluoni, cioè la regione cinematica in cui  $\alpha_s \ll 1$ . Per esempio, a  $Q^2 = M_Z^2$ , dove  $M_Z = 91$  GeV è la massa della  $Z_0$ , si trova  $\alpha_s \approx 0.12$ .

- (ii) dalla (3.13) segue anche che la costante di accoppiamento diventa grande per piccoli valori di  $Q^2$ . Questa proprietà è presumibilmente alla base del fenomeno chiamato *confinamento*, cioè il fatto, osservato empiricamente, che le particelle dotate di carica di colore, quark e gluoni, non sono osservabili individualmente, ma solo come aggregati la cui carica di colore totale è nulla: gli adroni.

Sommando le lagrangiane (3.9) e (3.10) otteniamo il risultato

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{q}_c^i (iD_{cc'} - m_0^i \delta_{cc'}) q_{c'}^i - \frac{1}{4} \mathcal{G}_A^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}^A. \quad (3.14)$$

La lagrangiana (3.14) descrive completamente la QCD a livello classico. La quantizzazione della teoria presenta però il problema, comune a ogni teoria di gauge, che i bosoni che mediano l'interazione hanno solo due gradi di libertà associati agli stati di polarizzazione. Per superare questa difficoltà è necessario aggiungere alla lagrangiana classica un termine che fissa la gauge ed introdurre dei campi scalari fittizi, chiamati *ghosts*, che soddisfano a regole di anticommutazione tipiche dei campi fermionici. Questi campi si

accoppiano direttamente solo ai campi gluonici e non corrispondono a particelle fisiche, ma generano contributi che cancellano quelli derivanti dalla presenza di stati di polarizzazione non fisici dei gluoni.

## 3.2 Simmetrie della QCD

Lo studio delle simmetrie della lagrangiana riveste una fondamentale importanza, in quanto permette di identificare le grandezze conservate in un sistema fisico. Come abbiamo visto, la QCD è invariante per trasformazioni locali appartenenti al gruppo  $SU(3)$  di colore. Nel caso particolare di quark a massa nulla, la simmetria è però molto più estesa. Considerando  $N_f$  sapori, la lagrangiana in questo limite risulta invariante sotto l'intero gruppo di trasformazioni globali chirali

$$U(N_f)_R \otimes U(N_f)_L = SU(N_f)_R \otimes SU(N_f)_L \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A . \quad (3.15)$$

Per questo motivo ci si riferisce spesso al limite  $m_0^i \rightarrow 0$  con il nome di limite chirale.

Il gruppo di sapore chirale  $SU(N_f)_R \otimes SU(N_f)_L$  trasforma separatamente i campi associati a quark destrorsi e sinistrorsi (per semplificare la notazione omettiamo gli indici di colore)

$$q_L^i = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) q^i \quad , \quad q_R^i = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) q^i \quad (3.16)$$

secondo le

$$q_L^i \rightarrow (\exp i\alpha_L^I t^I)_{ij} q_L^j \quad , \quad q_R^i \rightarrow (\exp i\alpha_R^I t^I)_{ij} q_R^j \quad (3.17)$$

dove  $t^I$  ( $I = 1, 2, \dots, N_f^2 - 1$ ) sono le rappresentazioni fondamentali dei generatori del gruppo  $SU(N_f)$  di sapore (ad esempio  $\sigma^I/2$ , le matrici di Pauli divise per due, nel caso di due sapori, o  $\lambda^I/2$ , le matrici di Gell-Mann divise per due, nel caso di tre sapori), e le costanti  $\alpha_{L,R}^I$  sono fasi arbitrarie.

L'operatore  $U(1)_V$  genera la semplice trasformazione di fase

$$q^i \rightarrow (\exp i\alpha_V) q^i \quad (3.18)$$

con  $\alpha_V$  arbitrario, mentre la simmetria sotto il gruppo abeliano assiale  $U(1)_A$  si traduce nell'invarianza della lagrangiana per trasformazioni del tipo

$$q^i \rightarrow (\exp i\gamma_5\alpha_A) q^i . \quad (3.19)$$

La simmetria  $U(1)_A$  però, pur essendo una simmetria della lagrangiana a livello classico, non è una vera simmetria della QCD, in quanto la quadridivergenza della corrente di Nöther corrispondente riceve contributi non nulli dalle correzioni quantistiche. La rottura della simmetria  $U(1)_A$  è confermata sperimentalmente dal fatto che la massa del mesone  $\eta'$ ,  $m_{\eta'} = 958$  MeV, è molto maggiore delle masse degli altri otto mesoni pseudoscalari.

Considereremo perciò come simmetria della QCD nel limite chirale il gruppo  $SU(N_f)_R \otimes SU(N_f)_L \otimes U(1)_V$ . Le  $2N_f^2 - 1$  correnti conservate che si ottengono dall'applicazione del teorema di Nöther sono

$$V_\mu^I = \bar{q}^i \gamma_\mu t_{ij}^I q^j \quad , \quad I = 0, 1, \dots, N_f^2 - 1 \quad (3.20)$$

$$A_\mu^I = \bar{q}^i \gamma_\mu \gamma_5 t_{ij}^I q^j \quad , \quad I = 1, \dots, N_f^2 - 1 \quad (3.21)$$

con  $t^0 = \sqrt{2/N_f} \mathbb{1}$ , dove  $\mathbb{1}$  è la matrice unità  $N_f \times N_f$ . Le cariche conservate corrispondenti alle correnti (3.20) e (3.21) sono

$$Q_V^I = \int d^3x V_0^I(x) \quad , \quad Q_A^I = \int d^3x A_0^I(x) . \quad (3.22)$$

L'introduzione delle masse, attraverso la matrice di massa non nulla nello spazio dei sapori  $m_0 = \text{diag}(m_1^0, m_2^0, \dots, m_{N_f}^0)$ , induce una rottura di simmetria, che si manifesta nel fatto che la quadridivergenza delle correnti di Nöther diventa

$$\partial^\mu V_\mu^I = i\bar{q}^i [m_0, t^I]_{ij} q^j \quad (3.23)$$

$$\partial^\mu A_\mu^I = \bar{q}^i \gamma_5 \{m_0, t^I\}_{ij} q^j . \quad (3.24)$$

Dalle (3.23) e (3.24) segue che per ogni matrice di massa diversa da zero le cariche assiali non sono conservate, ma se la matrice di massa è proporzionale all'unità, cioè se



le differenze tra le masse possono essere trascurate, le cariche vettoriali corrispondenti ad  $I \neq 0$  sono ancora conservate. La quadridivergenza della corrente  $V_\mu^0$ , associata alla trasformazione di fase  $U(1)_V$ , risulta nulla in ogni caso, e la carica ad essa associata è il numero barionico.

Sapore	Massa [MeV]	Sapore	Massa [GeV]
$u$	$1.5 \div 3$	$c$	$1.25 \pm 0.09$
$d$	$3 \div 7$	$b$	$4.2 \pm 0.07$
$s$	$95 \pm 25$	$t$	$174.2 \pm 3.3$

Tabella 3.1: Masse dei quark [23].

Anche se in realtà tutti i quark hanno massa diversa da zero, i valori raccolti nella Tabella 3.1 suggeriscono che la simmetria chirale possa avere un ruolo importante nel settore  $N_f = 2$ , in cui sono presenti solo i quark leggeri  $u$  e  $d$ . Lo spettro adronico osservato sperimentalmente non ha però la struttura che ci si aspetterebbe sulla base di questa ipotesi, secondo la quale ad ogni adrone dovrebbe essere associato un partner di massa uguale e parità opposta. La simmetria  $SU(2)_R \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_V$  è infatti rotta spontaneamente, e sopravvive solo l'invarianza sotto le trasformazioni associate al gruppo  $SU(2)_V \otimes U(1)_V$ .

Una simmetria si dice rotta spontaneamente quando lo stato di vuoto non è invariante sotto l'intero gruppo di trasformazioni di simmetria delle teorie. Nella QCD, il valore di aspettazione dell'operatore  $\bar{q}q$ , nel caso di sapori leggeri, è diverso da zero e pari a [24]

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle \approx -(250 \text{ MeV})^3 . \quad (3.25)$$

Questo valore di aspettazione, al quale ci si riferisce spesso col nome di condensato, si può riscrivere nella forma

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L | 0 \rangle , \quad (3.26)$$

che mostra chiaramente come la (3.25) implichi la rottura spontanea della simmetria chirale.

Gli argomenti esposti per il caso di due sapori leggeri possono ancora essere utilizzati nel settore  $N_f = 3$ , anche se gli effetti dovuti alla massa del quark  $s$  sono rilevanti. Il settore in cui sono attivi i quark  $c$ ,  $b$  e  $t$  non è ovviamente descrivibile usando argomenti basati sulla simmetria chirale.

# Capitolo 4

## Teoria perturbativa chirale

Possiamo finalmente applicare i metodi generali discussi nel Capitolo 2 allo scopo di costruire una teoria effettiva per il regime di bassa energia nel contesto delle interazioni forti. Anche se in questo regime non siamo in grado di eseguire calcoli nella teoria fondamentale, la QCD, saremo comunque in grado di effettuare predizioni in funzioni di costanti fenomenologiche da determinare sperimentalmente.

Ci limiteremo a considerare il settore dei quark *up* e *down*.

Il primo passo sarà quello di costruire una teoria effettiva per i pioni come bosoni di Goldstone della rottura di simmetria chirale delle interazioni forti. Mostriamo poi come correggere la teoria per tener conto della non esattezza di tale simmetria. Questa correzione porterà in prima approssimazione all'assegnazione di una massa finita ai pioni. In seguito includeremo nel modello i Nucleoni come gradi di libertà pesanti accoppiati ai pioni.

### 4.1 Costruzione della lagrangiana di bassa energia per le interazioni forti

Bisogna, come prima cosa, specificare la realizzazione non lineare della simmetria per il contesto specifico di rottura di simmetria  $G = SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow H = SU(2)_I$ , dove

la simmetria rotta è quella assiale. Rispetto alla notazione usata nel Capitolo 2, in base alla discussione delle simmetrie della QCD (Sezione 3.2), identifichiamo

$$\begin{cases} \mathbf{t} & \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{X} & \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\gamma_5 \end{cases} . \quad (4.1)$$

Se esprimiamo i campi tramite un vettore colonna che ha come componenti le componenti *left* e *right* dei campi,

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} , \quad (4.2)$$

un generico elemento del gruppo si scrive come

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\omega_L \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}_i}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_R \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}_i}{2}} \end{pmatrix} \in G = SU(2)_L \times SU(2)_R . \quad (4.3)$$

Nello spazio del *flavour*, sotto rotazioni vettoriali i campi left e right trasformano nello stesso modo, mentre sotto trasformazioni assiali trasformano con parametri opposti.

Quindi, definendo  $\omega_I \equiv \frac{1}{2}(\omega_L + \omega_R)$  e  $\omega_A \equiv \frac{1}{2}(\omega_L - \omega_R)$ ,

$$h = \begin{pmatrix} e^{i\omega_I \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_I \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} \end{pmatrix} \in H = SU(2)_I . \quad (4.4)$$

In questa rappresentazioni i campi dei bosoni di Goldstone compaiono tramite

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} U_L(\boldsymbol{\theta}) & 0 \\ 0 & U_R(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}} \end{pmatrix} \in G/H = SU(2)_A . \quad (4.5)$$

Possiamo ora scrivere la realizzazione non lineare della simmetria in termini dei campi  $\theta$ . Per far ciò riscriviamo la condizione  $gU(\theta) = U(\tilde{\theta})\gamma$ , usando le definizioni (4.3), (4.4) e (4.5). All'ordine più basso si ha

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\theta} \equiv \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}_I + \mathcal{O}(\theta^2) \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\omega}_I + \boldsymbol{\theta} \times \frac{\boldsymbol{\omega}_A}{2} + \mathcal{O}(\theta^2) , \end{aligned} \quad (4.6)$$

da cui possiamo notare che i campi  $\theta$  trasformano tramite leggi di trasformazione non omogenee come stiamo richiedendo per una parametrizzazione che renda esplicita la natura dei bosoni di Goldstone.

### 4.1.1 Lagrangiane pioniche

Per costruire lagrangiane invarianti per i campi  $\theta$  potremmo procedere secondo la procedura descritta nella Sezione 2.3 identificando le quantità  $e_\mu$  secondo la (2.75). Tuttavia nel contesto della simmetria chirale è possibile definire una funzione dei campi più comoda al fine di definire gli invarianti. Ricordando la (2.64), infatti, a quantità

$$V(\boldsymbol{\theta}) \equiv U_L(\boldsymbol{\theta})U_R^\dagger(\boldsymbol{\theta}) = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau}} \quad , \quad (4.7)$$

trasforma secondo la relazione

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow V(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= U_L(\tilde{\boldsymbol{\theta}})U_R^\dagger(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = g_L U_L(\boldsymbol{\theta})\gamma^\dagger \gamma U_R^\dagger(\boldsymbol{\theta})g_R^\dagger = g_L U_L(\boldsymbol{\theta})U_R^\dagger(\boldsymbol{\theta})g_R^\dagger \\ &= g_L V(\boldsymbol{\theta})g_R^\dagger \quad , \end{aligned} \quad (4.8)$$

cioè solo tramite matrici costanti.

Osservando la (4.8), notiamo che, come deve, sotto trasformazioni  $h \in H \equiv I(g_L = g_R = h)$  di isospin puro,  $V$ , così come il suo esponente  $\theta_i \tau_i$ , trasforma come una matrice del gruppo  $H$ , mentre (consideriamo una trasformazione infinitesima  $h \simeq 1 + i\omega_i \tau_i$ )

$$\theta_i \rightarrow \theta_i + \epsilon_{ijk} \theta_j \omega_k \quad (4.9)$$

trasforma come un vettore euclideo sotto rotazioni, ovvero tramite la rappresentazione aggiunta del gruppo  $SU(2)_I$ .

Sotto trasformazioni assiali  $g \in G/H$  ( $g_L = g$ ,  $g_R = g^\dagger$ ) i campi  $\theta$  trasformano invece in modo complicato secondo una *realizzazione non lineare* della simmetria.

### Lagrangiane pioniche chirali all'ordine $\mathcal{O}(p^2)$

A questo punto, dato che  $V$  trasforma tramite matrici costanti, è semplice costruire degli invarianti che costituiranno i termini di una lagrangiana descrivente i soli bosoni di Goldstone. Questi termini si possono classificare a seconda del numero  $n$  di derivate che in essi compaiono ( $\mathcal{O}(p^n)$ ), sempre nell'ottica di un'espansione di bassa energia in  $(p/\Lambda_\chi)$ .

L'invarianza di Lorentz e l'antisimmetria sotto trasformazioni di parità ( $\theta(\mathbf{x}, t) \rightarrow -\theta(-\mathbf{x}, t)$ ) che riflette l'antisimmetria delle cariche che generano le trasformazioni assiali fanno sì che si possano costruire lagrangiane invarianti solo con ordine pari:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \mathcal{L}^{(6)} + \dots \quad (4.10)$$

Il termine più semplice costruito con  $V$ , contenente il più basso numero di derivate ( $\mathcal{O}(p^2)$ ) e consistente con l'invarianza sotto  $G$  e sotto trasformazioni di Lorentz è

$$\mathcal{L}_0^{(2)} = \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu V \partial^\mu V^\dagger) \quad , \quad (4.11)$$

dove  $F$  è per ora semplicemente una costante dalla dimensioni di un'energia il cui valore è da ricavare dalla fenomenologia dei pioni <sup>1</sup>. Nel simbolo della lagrangiana, l'apice (2) indica il numero di derivate (o l'ordine dell'espansione in momenti) e il pedice 0 indica le potenze della matrice di massa.

Sviluppando la (4.11) e usando le proprietà delle matrici di Pauli, otteniamo la

$$\mathcal{L}_0^{(2)} = \frac{F^2}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\theta} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\theta} + \mathcal{L}_{0,\pi\pi}^{(2)} \quad . \quad (4.13)$$

che mostra come, affinché il termine cinetico sia scritto con la normalizzazione canonica, deve essere

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \frac{\boldsymbol{\pi}}{F} \quad . \quad (4.14)$$

Espandendo il termine di interazione troviamo finalmente

$$\mathcal{L}_{0,\pi\pi}^{(2)} = \frac{1}{2F^2} (\boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) + \mathcal{O}(\pi^6, F^{-4}) \quad (4.15)$$

---

<sup>1</sup>Si potrebbe pensare che un altro termine invariante  $\mathcal{O}(p^2)$  sia  $\text{Tr}[(\partial_\mu \partial^\mu U) U^\dagger]$ . Tuttavia

$$\text{Tr}[(\partial_\mu \partial^\mu U) U^\dagger] = \partial_\mu [\text{Tr}(\partial^\mu U U^\dagger)] - \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \quad , \quad (4.12)$$

quindi, a parte una derivata totale che non ha significato dinamico, questo termine è equivalente a quello con cui è costruita la lagrangiana (4.11).

**Correnti di Nöther**

Un'utile conferma della validità del modello viene dal calcolo delle correnti di Nöther associate alla lagrangiana effettiva (4.11)

$$J_{\mu}^{(L/R),k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^{\mu} V} \delta^{(L/R),k} V + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^{\mu} V^{\dagger}} \delta^{(L/R),k} V^{\dagger} \quad . \quad (4.16)$$

Per cui

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\mu}^{(L)} &= i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\boldsymbol{\tau} \partial_{\mu} V^{\dagger} V) \\ \mathbf{J}_{\mu}^{(R)} &= -i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\boldsymbol{\tau} V \partial_{\mu} V^{\dagger}) \end{cases} \quad . \quad (4.17)$$

Dalle correnti (4.17) possiamo costruire le combinazioni

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\mu}^{(V)} &= \mathbf{J}_{\mu}^{(R)} + \mathbf{J}_{\mu}^{(L)} = -i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\boldsymbol{\tau} [V, \partial_{\mu} V^{\dagger}]) \\ \mathbf{J}_{\mu}^{(A)} &= \mathbf{J}_{\mu}^{(R)} - \mathbf{J}_{\mu}^{(L)} = -i \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\boldsymbol{\tau} \{V, \partial_{\mu} V^{\dagger}\}) \end{cases} \quad . \quad (4.18)$$

Espandendo le (4.18), troviamo

$$\mathbf{J}_{\mu}^{(V)} = -(\boldsymbol{\pi} \times \partial_{\mu} \boldsymbol{\pi}) + \dots \quad , \quad (4.19)$$

$$\mathbf{J}_{\mu}^{(A)} = -F \partial_{\mu} \boldsymbol{\pi} + \dots \quad , \quad (4.20)$$

da cui ritroviamo

$$\langle 0 | J_{\mu}^{a,(V)} | \pi^b(p) \rangle = 0 \quad , \quad (4.21)$$

come deve essere per rispettare l'invarianza sotto parità delle interazioni forti, e

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_{\mu}^{a,(A)} | \pi^b(p) \rangle &= \langle 0 | -F \partial_{\mu} \pi^a | \pi^b(p) \rangle = \\ &= -F \partial_{\mu} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{\omega_p}} \delta^{ab} = ip_{\mu} F \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{\omega_p}} \delta^{ab} \quad . \end{aligned} \quad (4.22)$$

L'elemento di matrice (4.22) è proprio quello che entra in gioco nel decadimento  $\beta$  del pione e che viene di solito parametrizzato esattamente come nella (4.22). Possiamo quindi identificare

$$F \equiv F_{\pi} = 93 \text{ MeV} \quad , \quad (4.23)$$

che è la costante di decadimento del pione [25].

Nel limite chirale sia la corrente assiale sia quelle vettoriale sono conservate. Vedremo tra poco che l'introduzione nella lagrangiana di un termine proporzionale alla massa dei quark, che rompe esplicitamente la simmetria chirale, genera la massa dei pioni,  $m_\pi$ . Per cui, prendendo la quadridivergenza della (4.22) nel caso  $m_\pi \neq 0$ , si ha

$$\langle 0 | \partial^\mu J_\mu^{a,(A)} | \pi^b(p) \rangle = m_\pi^2 F_\pi \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\omega_p}} \delta^{ab} \quad , \quad (4.24)$$

da cui

$$\partial^\mu \mathbf{J}_\mu^{(A)} = F_\pi m_\pi^2 \boldsymbol{\pi} \quad . \quad (4.25)$$

Questo risultato riproduce la famosa ipotesi della *conservazione parziale della corrente assiale* (PCAC) [26].

### Un esempio di parametrizzazione alternativa

La lagrangiana (4.11) risulta valida anche se si usano parametrizzazioni alternative a quella dell'eq (4.7). Per esempio possiamo sfruttare la relazione

$$\exp \{ i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau} \} = \cos(\alpha) + i \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\tau} \sin(\alpha) \quad , \quad (4.26)$$

dove  $\alpha \equiv \sqrt{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \equiv \boldsymbol{\alpha}/\alpha$ , per scrivere

$$V = \cos(\theta) + i \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\tau} \sin(\theta) \equiv \frac{1}{F} (\sigma + i \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad , \quad (4.27)$$

con

$$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = F_\pi^2 \quad , \quad (4.28)$$

per cui solo i campi  $\boldsymbol{\pi}$  sono indipendenti.

Usando la (4.27) e la (4.28) possiamo riscrivere la lagrangiana (4.11) come

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\pi^{(\sigma\text{-model})} &= \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi}] = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \frac{(\boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi})}{F_\pi^2 - \boldsymbol{\pi}^2} \quad . \end{aligned} \quad (4.29)$$



Questa parametrizzazione, equivalente a quella usata in questa Tesi, è quella usata nei fondamentali lavori di Weinberg [27], [28], [5], [29] sulla base del  $\sigma$ -model di Gell-Mann e Lévy [26]. Espandendo il denominatore della (4.29) ritroviamo giustamente l'accoppiamento (4.15).

**Rottura esplicita della simmetria**

Fin qui abbiamo lavorato riproducendo le simmetrie della QCD nel limite chirale. Dobbiamo ora considerare il fatto che queste simmetrie sono esplicitamente rotte dal termine di massa nella lagrangiana:

$$\mathcal{L}_M^{(QCD)} = -\bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M^\dagger q_R \quad , \quad (4.30)$$

dove

$$M = M^\dagger = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \quad . \quad (4.31)$$

Nella teoria effettiva che stiamo costruendo, vogliamo quindi inserire dei termini di massa che rompono la simmetria e trattare la lagrangiana perturbativamente in funzione di questi termini. Ovvero vogliamo scrivere:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots \quad (4.32)$$

questo sviluppo perturbativo in termini di elementi che rompono la simmetria esplicitamente è noto col nome di *Chiral Perturbation Theory* ( $\chi$ PT).

Per inserire un termine di massa nelle Lagrangiane effettive si usa il seguente argomento: benché  $M$  sia in realtà una matrice costante e non trasformi con i campi dei quark,  $\mathcal{L}_M^{(QCD)}$  sarebbe invariante se  $M$  trasformasse secondo la regola

$$M \rightarrow g_R M g_L^\dagger \quad . \quad (4.33)$$

Allora, anche nel contesto della teoria di bassa energia, inseriamo un termine che sarebbe invariante se valesse l'eq.(4.33). Un tale termine, che sia anche consistente anche con la

simmetria sotto parità ( $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t) \rightarrow -\boldsymbol{\theta}(-\mathbf{x}, t)$ ) e che non contenga derivate dei campi è

$$\mathcal{L}_{s.b.} = \mathcal{L}_1^{(2)} = \frac{F_\pi^2 B}{2} \text{Tr}(VM + M^\dagger V^\dagger) \quad , \quad (4.34)$$

dove il pedice *s.b.* si riferisce alla rottura di simmetria (*symmetry breaking*) e  $B$  è una nuova costante di bassa energia.

Sviluppando la (4.34) nella rappresentazione esponenziale (4.7), si ha<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(2)} &= F_\pi^2 B(m_u + m_d) - \frac{1}{4} B(m_u + m_d) (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}) + \\ &\quad + \frac{B}{2} (m_u + m_d) \frac{1}{4! F_\pi^2} (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \mathcal{O}(\pi^6, \frac{B}{F_\pi^4}) = \\ &= 2F_\pi^2 m_\pi^2 - \frac{1}{2} m_\pi^2 (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}) + \frac{m_\pi^2}{4! F_\pi^2} (\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \mathcal{O}(\pi^6, \frac{B}{F_\pi^4}) \quad , \end{aligned} \quad (4.35)$$

avendo identificato nell'ultimo passaggio

$$m_\pi^2 = \frac{B}{2} (m_u + m_d) \quad . \quad (4.36)$$

Ciò implica che i pioni siano, in questo modello, degeneri in massa<sup>3</sup> e lo splitting di massa non dipende dalla differenza tra  $m_u$  e  $m_d$ .

Usando la (4.36) possiamo ricavare sperimentalmente il valore di  $B$  da misure della massa del pione e dalle stime disponibili delle masse dei quark [23].

L'introduzione di un termine di rottura esplicita della simmetria fa sì che non ci sia più degenerazione esatta tra gli stati di vuoto. Il termine di massa agisce quindi come un *driving term* che seleziona il vero ed unico stato di vuoto come quello che minimizza il valore dell'energia, ovvero per cui

$$\langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle = H_{min} = -F_\pi^2 m_\pi^2 = -F_\pi^2 B(m_u + m_d) \quad . \quad (4.37)$$

<sup>2</sup>Notare che, poiché  $M$  è diagonale non compaiono nell'espansione termini dispari in  $\theta$ .

<sup>3</sup>Nello stesso modo, nel caso in cui si estenda la simmetria di sapore a  $SU(3)$ , includendo il *quark strange*, si otterrebbe la relazione di Gell Mann - Okubo:  $4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2$

## 4.1 Costruzione della lagrangiana di bassa energia per le interazioni forti 63

Possiamo quindi dare senso fisico alla costante  $B$  in termini della teoria fondamentale delle interazioni forti, la QCD, notando che

$$\left. \frac{\partial \langle 0 | \mathcal{H}_{QCD} | 0 \rangle}{\partial m_q} \right|_{m_u=m_d=0} = \frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle \quad , \quad (4.38)$$

per cui

$$3F_\pi^2 B = - \langle \bar{q}q \rangle \quad . \quad (4.39)$$

Notiamo che l'introduzione nella lagrangiana di un termine con una potenza della matrice di massa ha generato nella lagrangiana pionica termini proporzionali a  $m_\pi^2$ , quindi, ricordando la relazione di dispersione, in termini dell'espansione di bassa energia, una potenza della matrice di massa dei quark contribuisce ad  $\mathcal{O}(p^2)$ . E' così giustificato l'apice (2) nella lagrangiana espressa in (4.34) e (4.35)

Inoltre, come era da aspettarsi, dato che dopo la rottura esplicita della simmetria i pioni non sono più da considerarsi bosoni di Goldstone esatti, l'introduzione del termine  $\mathcal{L}_{s.b.}$  nella lagrangiana genera accoppiamenti dei pioni che non coinvolgono le derivate dei campi (come per esempio il terzo termine della (4.35)).

La stessa espressione per la (4.35), si può ottenere partendo da parametrizzazioni alternative come quella espressa nell'equazione (4.27).

### Lagrangiane chirali ad ordini successivi

Mostriamo qui che è possibile costruire Lagrangiane chirali pioniche ad ordini successivi nell'espansione di bassa energia. Come esempio consideriamo l'ordine  $\mathcal{O}(p^4)$ . Costruendo i possibili invarianti a indipendenti a quest'ordine si ha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(4)} = & L_1 [\text{Tr}(\partial_\mu V \partial^\mu V^\dagger)]^2 + L_2 \text{Tr} [\partial_\mu V \partial_\nu V^\dagger] \text{Tr} [\partial^\mu V \partial^\nu V^\dagger] + \\
& + L_3 \text{Tr} [(\partial_\mu V \partial^\mu V^\dagger)(\partial_\nu V \partial^\nu V^\dagger)] + L_4 \text{Tr}(\partial_\mu V \partial^\mu V^\dagger) \text{Tr}(VM + M^\dagger V^\dagger) + \\
& + L_5 \text{Tr} [\partial_\mu V \partial^\mu V^\dagger)(VM + M^\dagger V^\dagger)] + L_6 [\text{Tr}(VM + M^\dagger V^\dagger)]^2 + \\
& + L_8 \text{Tr}(VMVM + M^\dagger V^\dagger M^\dagger V^\dagger) \quad .
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Anche qui, se vogliamo estendere il modello ed includere le interazioni elettrodeboli bisogna sostituire nella (4.40) alla derivata ordinaria la derivata covariante del Modello Standard e aggiungere termini invarianti contenenti i tensori di Yang & Mills, considerando che questi, per come sono costruiti, sono termini di ordine  $\mathcal{O}(p^2)$ .

Se volessimo estendere il modello per comprendere le interazioni elettrodeboli, bisognerebbe includere delle opportune sorgenti esterne [30].

### Power counting per pioni

I singoli termini delle teorie effettive di bassa energia sono in generale non rinormalizzabili, il che risulta evidente valutando le dimensioni delle costanti di accoppiamento. Tuttavia ciò non risulta essere un problema in quanto la lagrangiana, nel suo complesso, contiene un numero infinito di termini. Tra questi si possono selezionare opportuni controtermini con cui eliminare le divergenze che si presentano nei calcoli effettuati ad un fissato ordine.

Una volta fissato il livello di precisione desiderato bisogna individuare un criterio che permetta di selezionare i termini della lagrangiana ed i diagrammi di Feynmann da includere nel calcolo. Questo criterio, identificato per la prima volta da Weinberg [28] va sotto il nome di *power counting*.

In generale una lagrangiana effettiva assume la forma

$$\mathcal{L}^{eff} = f^4 \sum_n \frac{c_n}{M^{d_n}} \mathcal{O}_n(\phi/v) \quad , \tag{4.41}$$

dove  $\phi$  denota un generico campo bosonico,  $c_n$  sono un set di costanti adimensionali di  $\mathcal{O}(1)$  e  $f$ ,  $M$  e  $v$  sono costanti dalle dimensioni di un'energia determinate dalla teoria soggiacente. Il fattore  $d_n$  indica il numero di derivate (impulsi) presenti nell'operatore  $\mathcal{O}_n$ .

Nel caso specifico della  $\chi$ PT, possiamo identificare le costanti di scala nel modo seguente:  $f \equiv \sqrt{F_\pi \Lambda_\chi}$ ,  $M \equiv \Lambda_\chi$  e  $v \equiv F_\pi$ .

Nell'ottica delle teorie di bassa energia, ci poniamo l'obbiettivo di determinare l'ordine in  $Q/M$  (dove  $Q$  identifica il quadrimpulso delle particelle presenti negli stati asintotici di un certo processo) di un particolare grafico di Feynman calcolato con alcuni degli infiniti vertici presenti nella lagrangiana effettiva.

Consideriamo allora un grafico caratterizzato da

$$\begin{cases} E & : \text{ numero di gambe esterne} \\ I & : \text{ numero di linee interne} \\ L & : \text{ numero di integrali di loop} \\ V_{ik} & : \text{ numero di vertici con } i \text{ campi (derivati e non) e } k \text{ derivate} \end{cases} \quad (4.42)$$

Queste quantità non sono indipendenti, perché legate fra loro dalle regole per costruire i grafici di Feynman. Infatti, poiché ad ogni vertice è associata una  $\delta^{(4)}(p_{out} - p_{in})$  e ogni grafico porta a fattore una  $\delta^{(4)}(p_f - p_i)$  abbiamo l'identità

$$L = I - \left( \sum_{ik} V_{ik} - 1 \right) \quad (4.43)$$

Inoltre, poiché ogni linea interna si congiunge con due vertici e ogni gamba esterna ad uno, si ha

$$E + 2I = \sum_{ik} i V_{ik} \quad (4.44)$$

Consideriamo inizialmente solo lagrangiane chirali, senza termini di rottura di simmetria.

Lavoriamo in regolarizzazione dimensionale, in modo che il risultato di ogni integrale sia influenzato dalla procedura di regolarizzazione solo tramite un fattore adimensionale  $F(Q/\mu)$ , dove  $\mu$  è la scala arbitraria usata per rinormalizzare le costanti di accoppiamento.

Dato che in una teoria di bassa energia si considerano stati iniziali con un quadrimpulso  $Q$  limitato, questa sarà la scala che governa le integrazioni dovute alla presenza dei loop, e in generale quella dell'ampiezza di un determinato processo. Ricordiamo inoltre che la ogni vertice porta una costante di accoppiamento con dimensioni dettate dalla lagrangiana (4.41), ogni campo è accompagnato da una costante  $1/v$  e ogni linea interna rappresenta il T-prodotto di due campi. Allora la forma di una generica ampiezza sarà del tipo

$$\mathcal{A} \sim \frac{f^{4\sum_{ik} V_{ik}}}{M^{\sum_{ik} kV_{ik}}} \left(\frac{1}{v}\right)^{E+2I} Q^\nu F(Q/\mu) \quad (4.45)$$

L'ampiezza  $\mathcal{A}$  deve avere le dimensioni di  $\mathcal{E}^{4-N_E}$ <sup>4</sup>; l'ordine di un grafico è quindi

$$\nu = 4 - E + \sum_{ik} (k + i - 4)V_{ik} = \quad (4.46)$$

$$= 2 + 2L + \sum_{ik} (k - 2)V_{ik} \quad , \quad (4.47)$$

che è il famoso risultato ottenuto da Weinberg.

Guardando la (4.47), siamo rassicurati dal fatto che, poiché per ragioni di simmetria  $k = 2, 4, \dots$ , l'ordine  $\nu$  è sempre positivo. Altro motivo di rassicurazione è il fatto che, essendo nella (4.47)  $\nu \propto L$ , diagrammi sempre più complicati in termini di numero di *loop* contribuiscano ad ordine superiore nell'espansione di bassa energia.

Se ora prendiamo in considerazione la presenza di termini che rompono la simmetria chirale, dobbiamo semplicemente aggiungere la massa  $m_\pi$  nel propagatore del pione e considerare che, per la relazione di dispersione, termini proporzionali a  $m_\pi^2$  sono  $\mathcal{O}(p^2)$ , quindi (dato che  $m_\pi^2 \propto m_q$ ) l'indice  $k$  nelle eq. (4.47) e (4.46) conta il numero di derivate e di potenze di  $\sqrt{m_q}$  caratteristiche di un vertice.

---

<sup>4</sup>Questo perché  $S_{f-i} = \langle f | S | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \frac{1}{\sqrt{\prod_i 2\omega_i}} \mathcal{A}$ ; l'operatore  $S$  è adimensionale per costruzione, e gli stati  $|p_1 \dots p_N\rangle$  hanno dimensione di una  $\mathcal{E}^{-\frac{3}{2}E}$  (perché la quantità  $\int d^3p |p\rangle\langle p|$  sia adimensionale).

La logica con cui usare le regole del *power counting* è quella, una volta scelto l'ordine dell'espansione di bassa energia  $\bar{\nu}$  a cui fare un calcolo, di considerare tutti i diagrammi con  $\nu \leq \bar{\nu}$ . Chiariamo con un paio di esempi l'uso che si fa della formula (4.47):

- Contributi a  $\mathcal{O}(Q^2)$ : sono quei grafici al *tree level* ( $L = 0$ ) e vertici con due derivate o un termine di massa ( $k = 2$ ) ovvero la lagrangiana  $\mathcal{O}(p^2)$ .
- Contributi a  $\mathcal{O}(Q^4)$ : dobbiamo considerare grafici ad un loop con la lagrangiana  $\mathcal{O}(p^2)$ ; oppure grafici al tree level con esattamente un vertice con  $k = 4$  e un numero qualunque di vertici con  $k = 2$ .

**Esempio all'ordine più basso: scattering pione-pione**

Il calcolo più semplice che possiamo portare come esempio dell'utilizzo delle lagrangiane pioniche e delle regole di power counting è quello relativo all'ampiezza del processo di scattering

$$\pi_a + \pi_b \rightarrow \pi_c + \pi_d \quad , \tag{4.48}$$

che può, in linea di principio, essere confrontata con i risultati di esperimenti in cui sia importante il contributo del processo di scattering di pioni, sapendo che i campi utilizzati sono riferiti ai campi che operano sugli stati fisici dei pioni secondo

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \pi^3 \quad , \\ \pi^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \mp i\pi_2) \quad . \end{aligned} \tag{4.49}$$

Considerando l'ordine più basso nell'espansione di bassa energia, la regola del power counting (4.47) indica di calcolare i grafici al *tree level* con vertici in cui compaiono due derivate o nessuna derivata e un termine di massa ( $k = 2$ ), ovvero quelli indicati in figura 4.1.

Un semplice calcolo con l'uso delle regole di Feynman dà come risultato

$$\mathcal{A}_{ab,cd} = \frac{1}{F_\pi^2} [\delta_{ab}\delta_{cd}(s - m_\pi^2) + \delta_{ac}\delta_{bd}(t - m_\pi^2) + \delta_{ad}\delta_{bc}(u - m_\pi^2)] \quad , \tag{4.50}$$

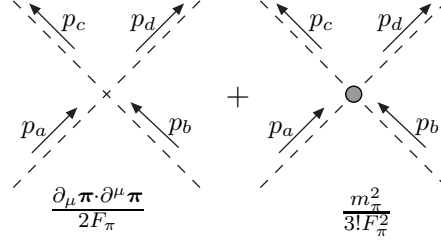


Figura 4.1: Diagrammi di Feynman *ad albero* per lo scattering  $\pi - \pi$

dove abbiamo usato le consuete definizioni delle *variabili di Mandelstan*:

$$\begin{aligned}
 s &= (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 = 2m_\pi^2 + 2p_a p_b = 2m_\pi^2 + 2p_c p_d \quad , \\
 t &= (p_a - p_c)^2 = (p_d - p_b)^2 = 2m_\pi^2 - 2p_a p_c = 2m_\pi^2 - 2p_d p_b \quad , \\
 u &= (p_a - p_d)^2 = (p_c - p_b)^2 = 2m_\pi^2 - 2p_a p_d = 2m_\pi^2 - 2p_c p_b \quad . \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Possiamo notare che, come ci aspettavamo, la teoria di bassa energia per i bosoni di Goldstone genera ampiezze polinomiali nei momenti esterni. Inoltre se consideriamo nulli i termini di massa, per cui i pioni possono essere considerati come veri bosoni di Goldstone, l'ampiezza si annulla con i momenti delle particelle coinvolte nel processo di diffusione.

Le previsioni sui valori dello scattering pione-pione ottenuti con la  $\chi$ PPT sono in buon accordo con le osservazioni sperimentali. Ad esempio per la lunghezza di scattering per il canale isoscalare in onda S,  $a_0^0$ , venne stimata nell'ambito di questo modello da Weinberg all'ordine piú basso con  $0.16 m_\pi^{-1}$ . [31]. In seguito calcoli piú raffinati all'ordine successivo vennero eseguiti da Gosser e Leutwyler [32] con la previsione del valore di  $0.20 m_\pi^{-1}$ . Un ulteriore miglioria della previsione venne in seguito effettuata con il calcolo a due *loop* da Colangelo, Gosser e Leutwyler [33] arrivando alla stima di  $0.220 m_\pi^{-1}$ . Sperimentalmente il valore ottenuto è di  $0.217 \pm 0.008 m_\pi^{-1}$  ottenuto in [34] analizzando i dati degli esperimenti E865 a Brookhaven [35] e NA4812 al CERN [36].



### 4.1.2 Interazione pione-nucleone

Vogliamo ora estendere il modello all'interazione pione - nucleone. I nucleoni a questo livello sono considerati un doppietto di isospin definito dall'equazione del moto libera

$$(i\cancel{\partial} - m_N)N = 0 \quad , \quad (4.52)$$

dove  $m_N$  è una matrice proporzionale all'unità nello spazio dell'isospin.

I campi dei nucleoni possono essere inseriti nel modello di bassa energia seguendo le prescrizioni della Sezione (2.3) per i campi non di Goldstone  $\chi$ . Questi campi, a causa della realizzazione non lineare della simmetria, trasformano in maniera locale sotto azione del gruppo  $G \equiv SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ :

$$N \rightarrow \gamma(\theta(x), g) N = \begin{pmatrix} e^{i\mathbf{u}(\theta, \mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{\tau}/2} & 0 \\ 0 & e^{i\mathbf{u}(\theta, \mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{\tau}/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_L \\ N_R \end{pmatrix} , \text{ con } \gamma \in H \equiv SU(2)_I . \quad (4.53)$$

L'accoppiamento deve quindi essere costruito tramite la derivata covariante e con le  $\mathbf{e}_\mu$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N\pi} &= \bar{N}(i\cancel{\partial} - i\cancel{\mathcal{A}} - m_N)N + ig_A \bar{N} \gamma^\mu \gamma_5 \mathbf{e}_\mu N = \\ &= \bar{N}(i\cancel{\partial} - i\cancel{\mathcal{A}} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} - m_N)N + ig_A (\bar{N} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}) N \cdot \mathbf{e}_\mu \quad , \end{aligned} \quad (4.54)$$

dove abbiamo avuto bisogno di inserire una nuova costante fenomenologica,  $g_A$ , che caratterizza la parte dell'interazione  $\pi N$  in cui entra la corrente assiale nucleonica e che è da determinarsi sperimentalmente. Per ottenere la forma esplicita bisogna scrivere la formula (2.75) nel caso della simmetria chirale:

$$U^{-1} \partial_\mu U = \frac{i}{2} \mathbf{e}_\mu \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \mathcal{A}_\mu \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} . \quad (4.55)$$

Allora, se ci fermiamo al primo ordine nell'espansione in derivate,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N\pi} &= \bar{N}(i\cancel{\partial} - m_N)N + i \frac{g_A}{2F_\pi} (\bar{N} \gamma^\mu \gamma_5 \boldsymbol{\tau} N) \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi} + \\ &+ \frac{i}{2F_\pi^2} (\bar{N} \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} N) \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\pi}) + \dots \quad , \end{aligned} \quad (4.56)$$

dove i puntini indicano termini con potenze più elevate delle derivate e dei campi.

### Relazione di Goldberger-Treiman

Il primo modello di interazioni nucleari tramite lo scambio di un pione si deve a Yukawa [1] il quale, come discusso nel Capitolo 1, formulò la lagrangiana fenomenologica per il vertice  $\pi - N - N$ , che nella notazione che stiamo usando si scrive

$$\mathcal{L}_Y = ig_0(\bar{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}N) \cdot \boldsymbol{\pi} \quad , \quad (4.57)$$

dove la costante  $g_0$  venne stimata sperimentalmente con il valore di  $g_0^2/4\pi \simeq 14$ .

Possiamo notare che questo accoppiamento è già presente nel nostro modello di lagrangiana chirale: infatti, nel secondo termine della (4.56) che descrive lo stesso vertice, possiamo effettuare una integrazione per parti per spostare la derivata di fronte al campo nucleonico e usare l'equazione del moto libera per  $N$  (4.52). Abbiamo quindi

$$g_0 = \frac{g_A m_N}{F_\pi} \approx 10 g_A \quad . \quad (4.58)$$

Nella (4.58) riconosciamo la celebre relazione di Goldberger e Treiman [37], verificata sperimentalmente, in cui  $g_A = 1.26$  è il fattore che moltiplica la corrente assiale nucleonica delle interazioni deboli. Ciò ci permette di identificare la costante  $g_A$  nella (4.56) in termini fenomenologici.

### Influenza della rottura esplicita della simmetria sui nucleoni

Consideriamo ora l'effetto della rottura esplicita di simmetria nel settore nucleonico della lagrangiana. Al prim'ordine un termine del genere contiene due potenze dei campi nucleonici, una della matrice di massa e nessuna derivata.

Anche qui seguiamo il ragionamento della Sezione 4.1.1, per cui inseriamo un termine che sarebbe invariante se la matrice di massa trasformasse secondo la (4.33). Tale termine all'ordine desiderato è della forma

$$\mathcal{L}_{1,N\pi} = -\lambda\bar{N}f(\boldsymbol{\theta}, M)N \quad (4.59)$$

e, notando che sotto  $G$  i campi nucleonici trasformano come  $N \rightarrow \gamma(\theta, g)N$  la condizione dettata dalla simmetria è

$$f(\boldsymbol{\theta}, M) \rightarrow f(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, g_R M g_L^\dagger) = \gamma f(\boldsymbol{\theta}, M) \gamma^\dagger \quad . \quad (4.60)$$

Una funzione che soddisfa la (4.60) è:

$$f(\boldsymbol{\theta}, M) = U_R^\dagger M U_L \quad , \quad (4.61)$$

con  $U_L(\boldsymbol{\theta}) = U_R^\dagger(\boldsymbol{\theta}) = \exp \{ (i/2) \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau} \}$ . Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,N\pi} &= -\lambda \bar{N} [e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau}} M e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau}}] N \\ &= -\lambda \bar{N} M N - \frac{i\lambda}{2F_\pi} \bar{N} \{ \boldsymbol{\tau}, M \} N \cdot \boldsymbol{\pi} + \\ &\quad + \frac{\lambda}{4F_\pi^2} \bar{N} [ \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} M \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} M ] N + \dots \quad , \end{aligned} \quad (4.62)$$

dove  $\lambda$  è, come al solito una costante fenomenologica di bassa energia.

La (4.62), rompendo esplicitamente la simmetria che generava i pioni come bosoni di Goldstone, fornisce accoppiamenti  $\pi - N$  in cui il campo pionico compare senza derivate. Inoltre il primo termine genera una rottura della simmetria di isospin dei nucleoni che non sono più degeneri in massa secondo

$$\delta m_N \equiv m_n - m_p = \lambda (m_d - m_u) \quad . \quad (4.63)$$

La (4.63) consente, in linea di principio, di determinare sperimentalmente la costante  $\lambda$  a partire dalla differenza di massa tra protone e neutrone, una volta presi in considerazione anche i contributi elettromagnetici che sono in questo caso non trascurabili.

### **Power counting per interazioni $\pi n$**

Possiamo facilmente generalizzare i ragionamenti fatti per derivare le regole del *power counting* nel caso bosonico al caso in cui siano presenti fermioni.

Aggiorniamo le definizioni (4.42) con le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{f/b} : \text{numero di gambe esterne ferminoniche/bosoniche} \\ I_{f/b} : \text{numero di linee interne ferminoniche/bosoniche} \\ L : \text{numero di integrali di loop} \\ V_{ikn} : \text{numero di vertici con } i \text{ campi bosonici (derivati e non),} \\ \quad n \text{ campi fermionici e } k \text{ derivate} \end{array} \right. \quad (4.64)$$

In termini di analisi dimensionale, la differenza tra bosoni e fermioni risiede nel fatto che i campi bosonici hanno dimensioni di una  $\mathcal{E}$ , mentre i campi fermionici hanno dimensione  $\mathcal{E}^{3/2}$ <sup>5</sup>. Per cui

$$\mathcal{A} \sim \frac{f^4 \sum_{ikn} V_{ikn}}{M \sum_{ikn} k V_{ikn}} \left( \frac{1}{\nu} \right)^{(E_b + 2I_b) + \frac{3}{2}(E_f + 2I_f)} q^\nu F(Q/\mu) \quad (4.65)$$

Usando poi la generalizzazione della (4.43) e della (4.44):

$$L = I - \left( \sum_{ikn} V_{ikn} - 1 \right) \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} E_b + 2I_b &= \sum_{ik} i V_{ikn} \\ E_f + 2I_f &= \sum_{ik} n V_{ikn} \end{aligned} \quad (4.67)$$

e ricordando che l'ampiezza, nel caso in cui siano presenti fermioni deve avere le dimensioni di una  $\mathcal{E}^{4 - E_b - \frac{3}{2}E_f}$ , otteniamo la seguente espressione per l'ordine in  $Q$  di un generico grafico con bosoni (pioni) e fermioni (nucleoni):

$$\nu = 4 - E_b - \frac{3}{2}E_f + \sum_{ikn} (k + i + \frac{3}{2}n - 4) V_{ikn} = \quad (4.68)$$

$$= 2 + 2L - \frac{1}{2}E_f + \sum_{ikn} \underbrace{(k + \frac{1}{2}n - 2)}_{\Delta} V_{ikn} \quad (4.69)$$

D'ora in avanti quindi classificheremo i vari termini della lagrangiana di pioni e nucleoni in base al valore di  $\Delta$ ,  $\mathcal{L}^{(\Delta)}$ .

<sup>5</sup>perciò il propagatore bosonico è  $\propto 1/p^2$ , mentre quello ferminonico è  $\propto 1/p$

### 4.1.3 Interazione nucleone-nucleone

Vogliamo ora, con gli elementi che abbiamo descritto fino a questo punto, costruire una lagrangiana per l'interazione nucleone-nucleone all'ordine più basso nell'espansione di bassa energia. Guardando la (4.69) a  $E_f$  fissato e  $n \geq 2$  (dato che vogliamo dei vertici capaci di distruggere e creare un nucleone), notiamo che i vertici dominanti sono quelli in  $\Delta = 0$ : ovvero quelli con  $k = 1$  e  $n = 2$  e quelli con  $k = 0$  e  $n = 4$ . La prima condizione è rispettata sia dal termine proporzionale a  $g_A$  che da quello proporzionale a  $F_\pi^{-2}$  nella (4.56); il secondo tuttavia contribuisce allo scattering  $NN$  solo attraverso almeno un *loop* di pioni. Possiamo inoltre introdurre [5] dei termini di contatto con quattro campi nucleonici, che soddisfano la seconda condizione, del tipo:

$$(\bar{N}\Gamma_\alpha N)(\bar{N}\Gamma^\alpha N) \quad , \quad (4.70)$$

dove le  $\Gamma_\alpha$  devono essere tali da garantire l'invarianza di Lorentz e quella sotto parità.

La lagrangiana minimale che vogliamo utilizzare per descrivere le interazioni nucleari è quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NN\pi}^{(0)} = & \bar{N}(i\not{\partial} - m_N)N + \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\pi}\partial^\mu\boldsymbol{\pi} - \frac{1}{2}m_\pi^2\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} + \\ & + \frac{i}{2F_\pi^2}(\bar{N}\boldsymbol{\gamma}^\mu\boldsymbol{\tau}N)\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\partial_\mu\boldsymbol{\pi}) + i\frac{g_A}{2F_\pi}(\bar{N}\boldsymbol{\gamma}^\mu\boldsymbol{\gamma}_5\boldsymbol{\tau}N)\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\pi} + \\ & + (\bar{N}\Gamma_\alpha N)(\bar{N}\Gamma^\alpha N) \quad . \end{aligned} \quad (4.71)$$

Nell'appendice A viene mostrato come, facendo il limite non relativistico dell'ampiezza del processo di scattering di due nucleoni all'ordine più basso tramite l'accoppiamento della (4.71), si possa ricavare il potenziale di interazione tra due nucleoni considerati puntiformi:

$$V_{NN}^{(0)}(\mathbf{r}) = (C_S + C_T\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi}\frac{g_A^2}{F_\pi^2}(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\nabla)(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\nabla)y_\pi(r) \quad , \quad (4.72)$$

dove abbiamo introdotto la *funzione di Yukawa*:

$$y_\pi(r) = \frac{e^{-m_\pi r}}{r} = 4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(|\mathbf{k}|^2 + m_\pi^2)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad . \quad (4.73)$$

Le costanti  $C_S$  e  $C_T$  sono da determinarsi sperimentalmente e, a questo livello, contengono tutta l'informazione sulla dinamica di alta energia (scambio di mesoni più pesanti ecc.) Sfruttando la relazione di Goldberger e Treimann (4.58) si può trovare lo stesso risultato della (4.72), a meno della parte di contatto, utilizzando la lagrangiana di Yukawa (1.9).

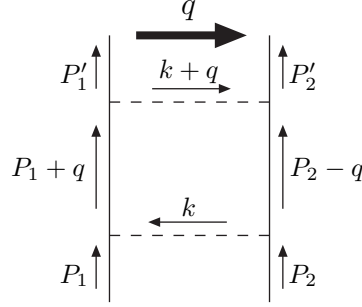
### Il problema degli stati legati nucleonici

Le regole del *power counting* espresse nella (4.69) sono da considerarsi un buono strumento per la determinazione dell'ordine nell'espansione di bassa energia di un determinato diagramma di Feynmann fintanto che non siano presenti due o più nucleoni negli stati intermedi di un processo. Infatti l'evidente esistenza nel mondo fisico di stati (debolmente) legati di nucleoni, unita al fatto che nel limite chirale consideriamo processi in cui siano coinvolte particelle con energie fino a  $\sim 100 : 200 \text{ MeV} \sim m_\pi$ , fa fallire in questo caso le regole del *power counting* così come descritte dalla (4.69). Cerchiamo nel seguito di chiarire questo punto e di dare delle indicazioni su come costruire una strategia per ovviare al problema.

In generale, in teoria dei campi, la teoria delle perturbazioni per la matrice  $S$  fallisce in prossimità del punto dello spazio delle fasi in cui  $E_{c.m.} \simeq E_{stato\ legato}$ . Infatti in questa regione cinematica i costituenti dello stato legato vengono creati quasi in quiete e i contributi di interazione tra questi diventano importanti a qualunque ordine facendo divergere la matrice  $S$  e rendendo inattuabile l'espansione nel numero di loop. Nel caso dello stato legato di nucleoni la regione cinematica critica è proprio quella di bassa energia in cui vogliamo applicare la teoria.

Per rendersi conto dell'insorgere della problematica appena citata, seguendo Weinberg [29], consideriamo il diagramma di Feynmann in Fig. 4.2.

Nel limite in cui i due nucleoni interagenti sono fermi ( $P_1 = P_2 = P = (m_N, \mathbf{0})$ ), per


 Figura 4.2: Diagrammi di Feynman ad un *loop* per lo scattering  $NN$  a  $\mathcal{O}(p^2)$ 

$k \simeq 0$  i propagatori nucleonici possono essere soggetti all'approssimazione secondo cui nel denominatore risultano non trascurabili solo i termini proporzionali a  $m_N \sim 1$  GeV, per cui:

$$iS_F(P+k) = \frac{i(\not{P} + \not{k} + m_N)}{(P+k)^2 - m_N^2 + i\epsilon} \simeq \frac{i(P+m_N)}{2m_N k^0 + i\epsilon} = \frac{i\Lambda_+}{k^0 + i\epsilon} \quad , \quad (4.74)$$

dove  $\Lambda_+$  è il proiettore sugli stati di particella dell'equazione di Dirac. L'integrale di loop relativo al diagramma in figura (BOH) nella zona di  $q \rightarrow 0$  è proporzionale a

$$\int d^3k \int dk^0 P(q) \frac{i\Lambda_+}{q^0 + i\epsilon} \frac{(-i)\Lambda_+}{q^0 - i\epsilon} \quad . \quad (4.75)$$

$P(k)$  è un polinomio che deriva dalle derivate dei campi pionici presenti nella lagrangiana d'interazione e non si annulla per  $k^0 = 0$  quindi l'integrale nella variabile  $k^0$  ha una divergenza infrarossa dovuta al fatto che questa singolarità, chiamata da Weinberg in [29] *pinch singularity*, non è eliminabile modificando con continuità il cammino di integrazione, come evidenziato dalla Fig. 4.3. Se invece consideriamo la situazione meno drastica e di maggiore interesse in cui i due nucleoni siano non relativistici ma in moto con un impulso relativo  $2P \sim m_\pi$ , nel centro di massa  $P_1 = (m_N + \mathbf{P}^2/2m_N, \mathbf{P})$  e  $P_2 = (m_N + \mathbf{P}^2/2m_N, -\mathbf{P})$ . In questa situazione il cammino di integrazione incontra due poli semplici poli in  $k^0 = \pm(\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}/m_N - i\epsilon)$ , come rappresentato in Fig. 4.4. L'integrale nella variabile  $k^0$  non è quindi più singolare, ma risulta comunque più grande di un fattore  $m_N/P$  rispetto al caso in cui nello stato intermedio si propagano pioni. Infatti, mentre

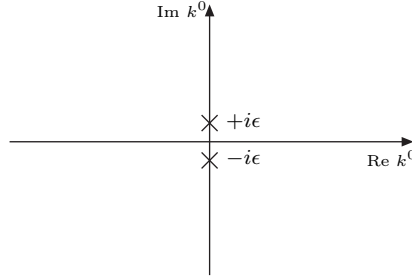
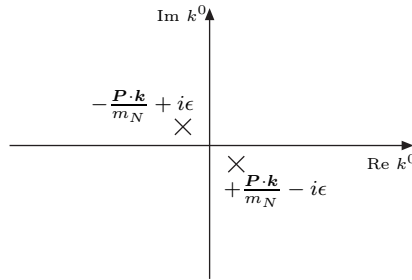
Figura 4.3: *Pinch singularity*

Figura 4.4: Singolarità eliminabili

per i propagatori pionici gli integrali sono del tipo  $\sim \int d^4k \frac{1}{k^2 - m_\pi^2} = \int d^3k \frac{1}{2\omega_k}$  (con  $\omega_q = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2}$ ) e danno contributi  $\mathcal{O}(1/P)$ , abbiamo appena visto che i propagatori nucleonici nei diagrammi come quello in Fig. 4.2 valgono  $\sim \int d^3q (\mathbf{P} \cdot \mathbf{q}/m_N)^{-1}$  che danno contributi  $\mathcal{O}(1/P)(m_N/P)$ . Inserendo i valori numerici  $m_N \sim \Lambda_\chi \sim 1\text{GeV}$  e  $m_\pi \sim 100$  MeV, notiamo che  $m_N/P \sim \Lambda_\chi$ ; quindi il doppio propagatore nucleonico nello stato intermedio del diagramma in Fig. 4.2 modifica il contributo del diagramma di due ulteriori fattori  $1/P$  rispetto all'ordine identificato dalle regole del *power counting* (4.69). Ci troviamo quindi di fronte ad una situazione in cui un diagramma più complicato, in termini di numero di *loop*, ha un contributo maggiore di uno più semplice, rendendo inapplicabile il *power counting*, la cui applicazione si basa proprio sul fatto che diagrammi più complicati contribuiscono ad ordine superiore. Esiste comunque un modo per continuare ad usare la teoria chirale per studiare le interazioni nucleari. Infatti l'apparente fallimento del *power counting* si presenta quando si considerano diagrammi in cui nello stato intermedio



sono presenti solo i due nucleoni e nessun pione. La teoria delle perturbazioni covariante tratta in maniera sintetica i vari stati intermedi di un processo corrispondenti a diversi ordinamenti temporali riassunti nel  $T$ -prodotto delle lagrangiane di interazione. È conveniente quindi passare alla *old-fashion perturbation theory* (OFPT) dove si considerano esplicitamente i vari termini generati dal  $T$ -prodotto (Appendice B). In questo contesto gli integrali sugli stati intermedi sono solo sui tri-impulsi e i propagatori sono sostituiti da denominatori con differenze di energia tra lo stato iniziale e lo stato intermedio. Nella OFPT il diagramma in Fig. 4.2 si scrive come la somma dei diagrammi in figura 4.5 che contribuiscono all'ampiezza tramite

$$\sum_{a,b/\beta,c} \frac{\langle f | H_{\pi NN} | a \rangle i \langle a | H_{\pi NN} | b/\beta \rangle i \langle b/\beta | H_{\pi NN} | c \rangle i \langle c | H_{\pi NN} | i \rangle}{(E_i - E_a + i\epsilon)(E_i - E_{b/\beta} + i\epsilon)(E_i - E_c + i\epsilon)}, \quad (4.76)$$

dove abbiamo indicato con gli indici latini gli stati intermedi con pioni e nucleoni e con gli indici greci quelli con soli nucleoni.

In questo contesto è semplice individuare a quali termini è da imputare il fallimento del *power counting*. Infatti i diagrammi *I* e *II* in Fig. 4.5 in cui compaiono pioni e nucleoni nello stato intermedio sono detti *irriducibili*<sup>6</sup>. Per questi i denominatori sono del tipo  $E_i - E_b \sim P^2/2m_N + m_\pi$  quindi i propagatori nei loop contribuiscono ad ordine  $1/P$  consistentemente con le regole di *power counting*.

Nei diagrammi *III*, *IV*, *V* e *VI*, che si dicono riducibili, in cui lo stato intermedio è composto dalle stesse particelle degli stati iniziali e finali, ovvero solo da nucleoni, i denominatori  $E_i - E_\beta \sim P^2/2m_N$  sono più piccoli di un fattore  $P/m_N$ . Questi contributi sono quindi dominanti rispetto all'ordine identificato dal *power counting*.

La strategia da usare è quindi quella di passare alla OFPT, per cui si possono usare le le stesse regole del *power counting* (4.69), come mostrato in [29], e di eliminare tutti i

---

<sup>6</sup>Si dicono *riducibili* quei diagrammi nella OFPT in cui i costituenti di uno stato intermedio sono gli stessi dello stato iniziale o finale. Altrimenti un diagramma viene detto *irriducibile*.

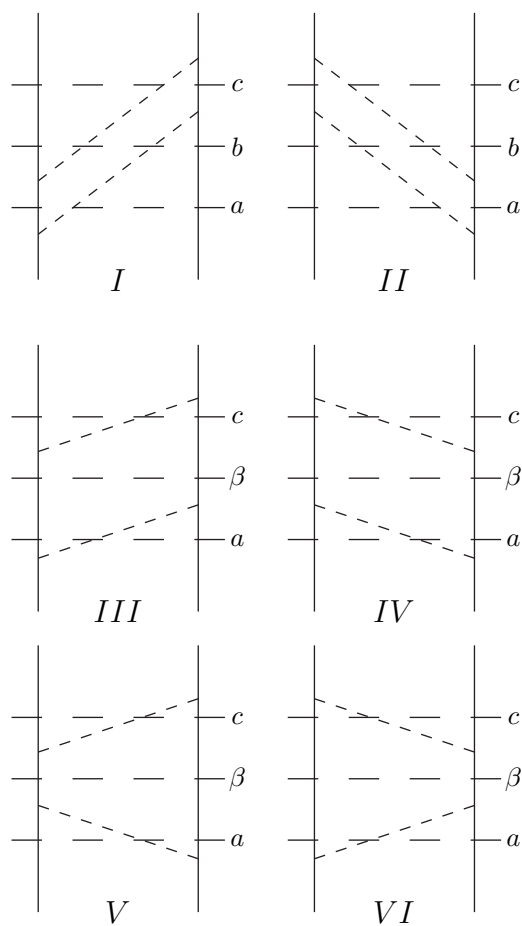


Figura 4.5: Diagrammi della *vecchia* teoria delle perturbazioni corrispondenti al diagramma in Fig. 4.2 della formulazione covariante. I *tagli* tratteggiati individuano gli stati intermedi. Questi sono indicati con una lettera latina se contengono pioni e nucleoni e con una greca se contengono solo nucleoni.

diagrammi riducibili. Dalle ampiezze ottenute col contributo dei soli diagrammi irriducibili si calcola quindi il potenziale non relativistico, come mostrato nel caso più semplice in Appendice A. Questo può quindi essere usato per risolvere l'equazione di Lippman-Schwinger per la matrice  $T$ . I termini dello sviluppo perturbativo di questa soluzione, come mostrato in Fig. 4.6, riproducono i processi descritti dai diagrammi riducibili che erano stati eliminati. Il problema dei diagrammi patologici viene così aggirato.

$$\langle \mathbf{k} | T | \mathbf{k}' \rangle = \left| \begin{array}{c} \mathbf{k}' \\ \dots \\ \mathbf{k} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \mathbf{k}' \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{k} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \mathbf{k}' \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{k} \end{array} \right| + \dots$$

Figura 4.6: Rappresentazione grafica della soluzione perturbativa dell'equazione di Lippmann-Schwinger per l'elemento di matrice  $T$  tra uno stato iniziale con momento relativo  $\mathbf{k}$  e uno finale con momento relativo  $\mathbf{k}'$ . Ciò si ottiene iterando l'interazione effettiva non relativistica,  $V$ , precedentemente ottenuta dall'ampiezza calcolata in OFPT e qui rappresentata con una linea puntinata. Le linee continue invece indicano propagatori non relativistici  $\frac{i}{E-H_0+i\epsilon}$ .

**Contributi di ordine superiore all'interazione nucleone - nucleone**

La lagrangiana (4.71) descrive la dinamica del sistema di pioni e nucleoni all'ordine  $\Delta = 0$  che denominiamo *leading order* (LO). Vogliamo ora discutere le modifiche al potenziale  $NN$  introdotte ad ordini superiori che indichiamo con la terminologia *next-to-leading order* (NLO), *next-to-next-to leading order* (N<sup>2</sup>LO), ecc. Le lagrangiane di ordini superiori includono ulteriori termini di contatto con strutture operatoriali sempre più complicate che parametrizzano i contributi a corto raggio dell'interazione  $NN$ . L'invarianza sotto trasformazione di parità richiede che i termini di contengano un numero pari di derivate.

La strategia per descrivere l'interazione  $NN$  ad ordini superiori rimane quella di considerare il processo di scattering di nucleoni escludendo i diagrammi riducibili nella OFPT, fare il limite non relativistico dell'ampiezza, da questa ricavare il potenziale efficace con cui risolvere l'equazione di Lipmann-Schwinger. In Fig. 4.7 vengono rappresentati schematicamente i vari contributi all'interazione attraverso i diagrammi di Feynmann.

L'espressione esplicita del potenziale all'ordine  $Q^0$ , riportata nella (4.72), contiene due parametri liberi (oltre a  $F_\pi$  e  $g_A$  che sono determinati dalla fenomenologia delle interazioni deboli). Al NLO, ovvero ad ordine  $Q^2$  si ottiene [38], dai diagrammi mostrati in Fig. 4.7 un potenziale della forma

$$V^{(2)} = C_1 \mathbf{q}^2 + C_2 \mathbf{k}^2 + (C_3 \mathbf{q}^2 + C_4 \mathbf{k}^2) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + C_5 (-i \mathbf{S} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{k})) + \\ + C_6 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}) + C_7 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \quad , \quad (4.77)$$

con

$$\mathbf{q} \equiv (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1) = (\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) : \text{impulso trasferito} \\ \mathbf{k} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2) : \text{impulso totale medio} \\ \mathbf{S} \equiv (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) : \text{spin totale} \quad . \quad (4.78)$$

L'equazione (4.77) mostra come, passando dall'ordine  $Q^0$  all'ordine  $Q^2$ , si introducano sette nuovi parametri che derivano dal nuovo vertice di contatto. Infatti si nota che, come si vede dalla Fig. 4.7, i termini non di contatto di ordine  $Q^2$  non contengono nuovi vertici e quindi nuovi parametri.

Per ottenere una descrizione ragionevolmente accurata degli sfasamenti misurati negli esperimenti di diffusione  $NN$  per energie fino alla soglia di produzione dei pioni è necessario includere termini di ordine  $Q^4$ , arrivando così ad un potenziale con un totale di 24 parametri liberi. I potenziali chirali ottenuti a quest'ordine riproducono i circa 2400 dati sperimentali disponibili nel canale  $np$  con  $\chi^2/\text{dato} \simeq 1.2$  [39]. Questo valore si deve con-

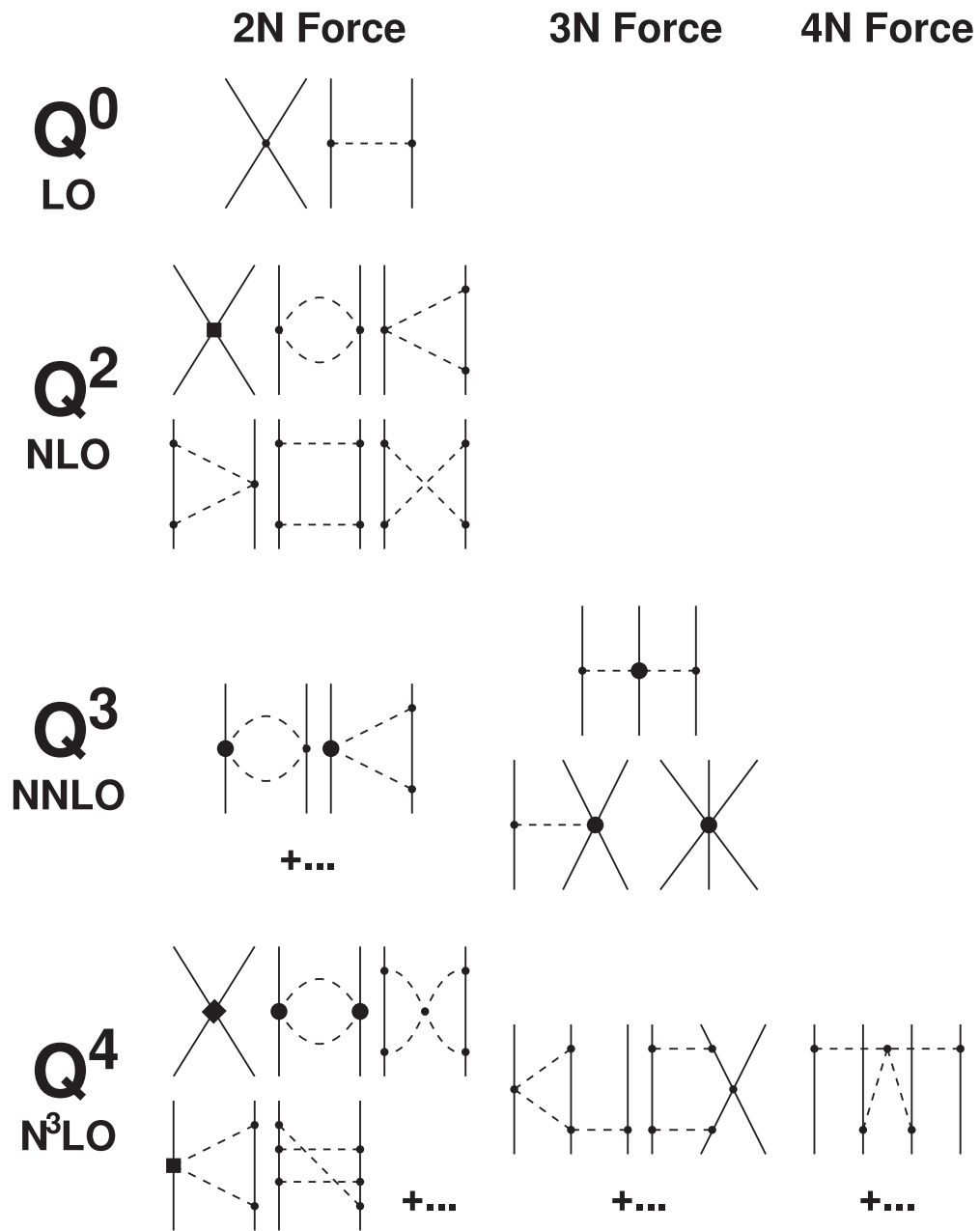


Figura 4.7: Contributi all'interazione NN ai primi ordini dell'espansione chirale

frontare con il  $\chi^2$  dato  $\simeq 1.04$  [40] che si ottiene utilizzando un potenziale fenomenologico (Argonne  $V_{18}$ ) del tipo descritto nel Capitolo 1.

### Interazioni a più di due nucleoni

Come abbiamo anticipato nell'introduzione, i risultati dei calcoli teorici mostrano che le interazioni a tre nucleoni forniscono un contributo all'energia che cresce rapidamente con la densità del sistema in esame. Questo contributo, che ammonta a qualche percento dell'energia totale nel caso dei nuclei leggeri, diviene dominante nella materia nucleare nella regione di densità molto maggiori della densità di equilibrio, la cui descrizione è rilevante nel contesto astrofisico.

La maggior parte dei risultati disponibili sono stati ottenuti con interazioni a tre nucleoni puramente fenomenologiche, consistenti di un contributo attrattivo ed uno repulsivo a raggio più corto. Questi modelli contengono due parametri, i cui valori vengono determinati con un fit delle energie di legame dei nuclei  ${}^3\text{H}$  e  ${}^3\text{He}$  [41]. Il problema principale di questo tipo di approccio è la mancanza di uno schema unitario, all'interno del quale sia possibile derivare l'iterazione a due e tre nucleoni in modo consistente.

Nella teoria delle perturbazioni chirale questa difficoltà viene superata, in quanto le interazioni che coinvolgono più di due nucleoni emergono in modo del tutto naturale dal formalismo al crescere dell'indice  $\Delta$ , come schematicamente illustrato nella Fig. 4.7.

Il primo contributo all'interazione a tre nucleoni si presenta all'ordine NNLO e consiste di tre diagrammi, rappresentati nella Fig. 4.8, corrispondenti allo scambio di uno e due pioni e a un termine di contatto.

Il termine del potenziale associato allo scambio di due pioni raffigurato nel diagramma 1, nello spazio di Fourier ha la forma [42]

$$V_{2\text{PE}}^{3\text{NF}} = \left( \frac{g_A}{2f_\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq k} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{q}_i)(\boldsymbol{\sigma}_j \cdot \mathbf{q}_j)}{(q_i^2 + m_\pi^2)(q_j^2 + m_\pi^2)} F_{ijk}^{\alpha\beta} \tau_i^\alpha \tau_j^\beta, \quad (4.79)$$

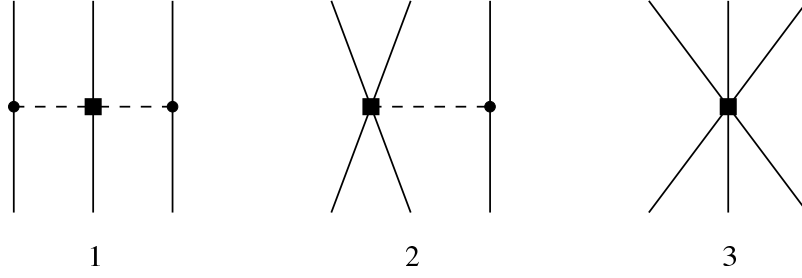


Figura 4.8: Contributi alla forza a tre nucleini all'ordine NNLO

con  $\mathbf{q}_i \equiv \mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i$ , dove  $\mathbf{p}_i$  and  $\mathbf{p}'_i$  sono gli impulsi, rispettivamente, iniziale e finale dell' $i$ -esimo nucleone, e

$$F_{ijk}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} \left[ -\frac{4c_1 m_\pi^2}{f_\pi^2} + \frac{2c_3}{f_\pi^2} \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \right] + \frac{c_4}{f_\pi^2} \sum_\gamma \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \tau_k^\gamma \boldsymbol{\sigma}_k \cdot [\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j]. \quad (4.80)$$

Il vertice  $\pi\pi NN$  con due derivate, che compare al centro, è lo stesso che interviene nell'interazione NN allo stesso ordine (NNLO). Quindi questo contributo alla forza a tre corpi non comporta l'introduzione di nuovi parametri.

Il termine corrispondente allo scambio di un pione raffigurato nel diagramma 2 ha la forma

$$V_{1PE}^{3NF} = D \frac{g_A}{8f_\pi^2} \sum_{i \neq j \neq k} \frac{\boldsymbol{\sigma}_j \cdot \mathbf{q}_j}{q_j^2 + m_\pi^2} (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j) (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{q}_j), \quad (4.81)$$

mentre per quello di contatto si trova

$$V_{ct}^{3NF} = E \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \boldsymbol{\tau}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_k. \quad (4.82)$$

I termini (4.81) e (4.82) contengono due nuovi vertici che non appaiono nell'interazione a due nucleoni, cioè il vertice  $\pi NNNN$  nel diagramma 2 e il vertice a sei nucleoni nel diagramma 3 della Fig. 4.8. Come nel caso delle interazioni a tre corpi puramente fenomenologiche, i due parametri  $D$  ed  $E$  associati ai nuovi vertici vengono determinati riproducendo i valori sperimentali delle energie di legame di  ${}^3\text{H}$  e  ${}^3\text{He}$ .





# Conclusioni

In questa Tesi abbiamo discusso la formulazione della teoria effettiva chirale e la sua applicazione al problema della determinazione delle interazioni tra nucleoni. L'approccio che abbiamo analizzato permette di derivare le forze nucleari in modo sistematico, e di metterle in relazione, attraverso le sue simmetrie, con la teoria fondamentale delle interazioni forti. I vantaggi sono notevoli rispetto alle teorie pionieristiche delle forze nucleari [1] basate sullo scambio di mesoni e caratterizzate dalla non perturbatività e da una forte connotazione fenomenologica.

La descrizione teorica delle forze agenti tra i nucleoni è necessaria per il calcolo delle proprietà dei nuclei atomici e dalla materia nucleare ad alta densità, che si ritiene sia presente nel nocciolo delle stelle di compatte, di massa paragonabile alla massa solare e raggio dell'ordine di 10 Km.

L'elemento su cui si fonda la teoria effettiva chirale, formulata originariamente da Weinberg, è la naturale separazione delle scale di energia dovuta alla rottura spontanea della simmetria chirale della QCD. Utilizzando questo schema si possono trattare in modo sistematico le interazioni adroniche nel regime di bassa energia, nel quale i gradi di libertà effettivi sono pioni e nucleoni. L'applicazione nel settore pionico è basata sulla natura stessa dei pioni, che possono essere identificati con i bosoni di Goldstone associati alla rottura spontanea di simmetria. Da ciò segue infatti che a bassa energie le interazioni tra pioni diventano deboli, e quindi trattabili perturbativamente.

L'uso dell'approccio proposto da Weinberg per la descrizione delle forze agenti tra

due nucleoni implica maggiori difficoltà, dovute al fatto che il loro andamento a medio e corto raggio non può essere descritto in termini di scambio di pioni. Inoltre, le interazioni nucleone-nucleone danno luogo a stati legati, non trattabili perturbativamente.

Questi due problemi vengono superati introducendo interazioni di contatto tra i nucleoni e risolvendo un'equazione di Lippmann-Schwinger per sommare i contributi riducibili associati allo scambio di pioni a tutti gli ordini della teoria della perturbazioni. Il risultato è una serie perturbativa i cui termini possono essere ancora ordinati secondo le potenze dell'impulso tipico ( $Q$ ) associate alle linee esterne dei corrispondenti diagrammi di Feynman.

I potenziali nucleone-nucleone derivati nell'ambito dell'approccio chirale all'ordine  $N^3\text{LO}$  ( $Q^4$ ) forniscono una descrizione delle proprietà del sistema di due nucleoni, sia nello stato legato che negli stati di scattering, paragonabile a quella ottenibile dai potenziali fenomenologici più realistici.

L'aspetto più promettente del formalismo che abbiamo discusso è però la sua capacità di generare in modo completamente consistente, insieme al potenziale nucleone-nucleone, interazioni che coinvolgono tre o più nucleoni, che si ritiene diano un contributo dominante all'energia della materia nucleare a densità maggiori della densità di equilibrio dei nuclei atomici.

Lo sviluppo futuro del lavoro di Tesi consisterà nell'utilizzazione delle interazioni a molti nucleoni ottenute dalla teoria effettiva chirale per costruire una interazione effettiva nucleone-nucleone dipendente dalla densità, secondo l'idea proposta originariamente da Lagaris e Pandharipandhe [43].

Il primo contributo risultante da questo approccio, lineare nella densità, si ottiene considerando clusters di tre nucleoni interagenti tramite la forza a tre corpi e integrando sulle coordinate di uno dei tre. Il termine generico, di ordine  $\rho^n$ , richiede il calcolo dell'energia di  $n + 2$  nucleoni interagenti tramite una forza a  $n + 2$  corpi. I risultati di

---

Lagaris e Pandharipande suggeriscono che l'espansione in potenze della densità converge rapidamente. In pratica nella regione rilevante per la descrizione delle stelle di neutroni ci si aspetta che sia sufficiente includere il contributo di forze a tre e quattro corpi. Calcoli esplorativi del termine lineare nella densità sono stati effettuati utilizzando modelli fenomenologici di forze a tre corpi [44], [45]. L'estensione al caso delle interazioni derivate dall'approccio chirale non sembra presentare particolare difficoltà.

Inoltre in questo lavoro si è presentata una introduzione alle teorie di campo effettive il cui campo di possibile applicazione si estende in vari ambiti della fisica, dalla teoria dello stato solido, alla gravità, alle estensioni del Modello Standard.



# Appendice A

## Derivazione dell'OPEP dalla Lagrangiana chirale all'ordine più basso

In questa appendice facciamo vedere come, nel limite non relativistico, partendo dalla lagrangiana pseudo-chirale (4.71) per l'accoppiamento tra nucleoni, si possa ricavare, come dal modello di Yukawa, il *One Pion Exchange Potential* (OPEP), che notoriamente descrive bene la fenomenologia nelle interazione nucleari a lungo raggio (onde parziali di scattering con  $L > boh?$  ). Inoltre, però, a differenza del modello di Yukawa, otteniamo, allo stesso ordine in teoria delle perturbazioni, dei termini di contatto che si candidano a rendere conto, in maniera effettiva, della fenomenologia a corto raggio.

Riscriviamo per chiarezza la Lagrangiana (4.71)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NN\pi} = & \bar{N}(i\cancel{\partial} - m_N)N + \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\pi}\partial^\mu\boldsymbol{\pi} - \frac{1}{2}m_\pi^2\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} + \\ & + i\frac{g_A}{2F}(\bar{N}\boldsymbol{\gamma}^\mu\boldsymbol{\gamma}_5\boldsymbol{\tau}N)\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\pi} + (\bar{N}\Gamma_\alpha N)(\bar{N}\Gamma^\alpha N) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Indicando con  $\eta$  gli isospinori dei due nucleoni, al *tree level*, l'elemento di matrice S per lo scattering di due nucleoni è dato dai seguenti diagrammi di Feynmann (ref figura????) e vale

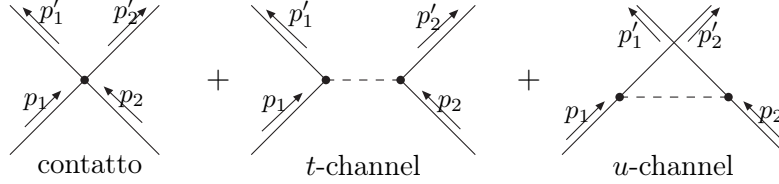


Figura A.1: Diagrammi di Feynman *ad albero* per lo scattering *Nucleone – Nucleone*

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle p'_1 p'_2 | \left( \frac{i^2}{2} \int d^4x d^4y T \left\{ \mathcal{L}_I^{(-1)}(x) \mathcal{L}_I^{(-1)}(y) \right\} + \int d^4x \mathcal{L}_{contatto}(x) \right) | p_1 p_2 \rangle = \\
&= -(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \left\{ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{fattore combinatorio } 4} \frac{1}{2} \left( \frac{g_A}{2F_\pi} \right)^2 \frac{m_N^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_{1'} E_{2'}}} \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left( \eta_{1'}^\dagger \tau_i \eta_1 (\bar{u}_{1'} i \gamma_5 \gamma^\mu u_1) [F.T. (T \{ \partial_\mu \pi_i \partial_\nu \pi_j \})] (\bar{u}_{2'} i \gamma_5 \gamma^\nu u_2) \eta_{2'}^\dagger \tau_j \eta_2 + \right. \\
&\quad \left. \left. - \eta_{2'}^\dagger \tau_i \eta_1 (\bar{u}_{2'} i \gamma_5 \gamma^\mu u_1) [F.T. (T \{ \partial_\mu \pi_i \partial_\nu \pi_j \})] (\bar{u}_{1'} i \gamma_5 \gamma^\nu u_2) \eta_{1'}^\dagger \tau_j \eta_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{fattore combinatorio } 4} (\bar{u}_{1'} \Gamma_\alpha u_1) (\bar{u}_{2'} \Gamma^\alpha u_2) \right\} \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Facciamo ora, in due passaggi, l'approssimazione non relativistica: consideriamo quindi nulle le componenti piccole degli spinori di Dirac; in quest'approssimazione le matrici di Dirac antidiagonali non danno contributo (quindi  $\Gamma^\alpha = C_S \mathbf{1}$ ,  $C_T \gamma^i \gamma_5$ , dove  $C_S$  e  $C_T$  sono due coefficienti da determinare sperimentalmente o dalla teoria sottostante e in cui consideriamo assorbiti i coefficienti combinatori).

$$\begin{aligned}
S_{fi} = & -(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) F_\pi^{-2} g_A^2 \frac{m_N^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_{1'} E_{2'}}} \cdot \\
& \left[ \cdot \eta_{1'}^\dagger \tau_i \eta_1 (\bar{u}_1 i \gamma^0 \gamma_5 \gamma^m u_1) \frac{i k_m k_n}{k^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \delta_{ij} (\bar{u}_2 i \gamma^0 \gamma_5 \gamma^n u_2) \eta_{2'}^\dagger \tau_j \eta_2 + \right. \\
& \left. - \eta_{2'}^\dagger \tau_i \eta_1 (\bar{u}_2 i \gamma^0 \gamma_5 \gamma^m u_1) \frac{i k_m k_n}{k^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \delta_{ij} (\bar{u}_1 i \gamma^0 \gamma_5 \gamma^n u_2) \eta_{1'}^\dagger \tau_j \eta_2 + \right] \\
& + C_S (\bar{u}_1 u^1) (\bar{u}_2 u^2) + C_T (\bar{u}_1 \gamma^i \gamma_5 u_1) (\bar{u}_2 \gamma^i \gamma_5 u_2) \quad . \quad (A.3)
\end{aligned}$$

Notiamo ora che  $\gamma^0 \gamma_5 \gamma^n = -\Sigma^n$ , la matrice di spin nello spazio di Dirac. Inoltre inseriamo l'espressione esplicita per gli spinori di Dirac non relativistici e del limite non relativistico del propagatore pionico ( $k^0 = 0$ )

$$\begin{aligned}
= & i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \\
& \left\{ F_\pi^{-2} g_A^2 \frac{m_N^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_{1'} E_{2'}}} \frac{\sqrt{E_{2'} + m_N} \sqrt{E_2 + m_N} \sqrt{E_{1'} + m_N} \sqrt{E_1 + m_N}}{4m_N^2} \cdot \right. \\
& \cdot \left[ \frac{(\eta_{1'}^\dagger \boldsymbol{\tau} \eta_1) \cdot (\eta_{2'}^\dagger \boldsymbol{\tau} \eta_2) (\chi_{1'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_1 \cdot \mathbf{k}) (\chi_{2'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_2 \cdot -\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2 + m_\pi^2} + \right. \\
& \left. - \frac{(\eta_{2'}^\dagger \boldsymbol{\tau} \eta_1) \cdot (\eta_{1'}^\dagger \boldsymbol{\tau} \eta_2) (\chi_{2'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_1 \cdot \mathbf{k}) (\chi_{1'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_2 \cdot -\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2 + m_\pi^2} \right] + \\
& \left. + C_S (\chi_{1'}^\dagger \chi_1) (\chi_{2'}^\dagger \chi_2) + C_T (\chi_{1'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_1) \cdot (\chi_{2'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_2) \right\} \quad . \quad (A.4)
\end{aligned}$$

Sempre in approssimazione non relativistica possiamo porre  $E = m_N$ , quindi

$$\begin{aligned}
= & -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \frac{g_A^2}{F_\pi^2} \langle \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \rangle \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{(\eta_{1'}^\dagger \boldsymbol{\tau} \eta_1) \cdot (\eta_{2'}^\dagger \boldsymbol{\tau} \eta_2) (\chi_{1'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_1 \cdot \mathbf{k}) (\chi_{2'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_2 \cdot \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2 + m_\pi^2} + \right. \\
& \left. - \frac{(\eta_{2'}^\dagger \boldsymbol{\tau} \eta_1) \cdot (\eta_{1'}^\dagger \boldsymbol{\tau} \eta_2) (\chi_{2'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_1 \cdot \mathbf{k}) (\chi_{1'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_2 \cdot \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2 + m_\pi^2} \right] + \\
& + C_S (\chi_{1'}^\dagger \chi_1) (\chi_{2'}^\dagger \chi_2) + C_T (\chi_{1'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_1) \cdot (\chi_{2'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_2) \quad . \quad (A.5)
\end{aligned}$$

Vogliamo ora passare alla teoria quantistica non relativistica. Mentre in teoria dei campi sono gli operatori, che tramite le regole di commutazione/anticommutazione a cui soddisfano tengono conto delle proprietà di simmetria sotto scambio di particelle (ovvero del principio di Pauli), nel contesto non relativistico sono gli stati a dover essere opportunamente simmetrizzati/antisimmetrizzati. Il secondo termine nell'ampiezza, relativo al canale  $u$ , è responsabile della cancellazione di contributi in cui lo stato iniziale o quello finale sono simmetrici sotto lo scambio di particelle ( $1 \leftrightarrow 2$  o  $1' \leftrightarrow 2'$ ). Nello scrivere quindi il potenziale d'interazione non relativistico possiamo concentrarci sul termine relativo al canale  $t$  e tenere presente che gli stati non relativistici devono essere opportunamente antisimmetrizzati.

Per derivare il potenziale di interazione, che ha senso solo in regime non relativistico, dobbiamo confrontare la teoria delle perturbazioni relativistica con quella non relativistica. Mentre nel primo contesto definiamo:

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi} \quad , \quad (\text{A.6})$$

nel secondo (in approssimazione di Born), l'*ampiezza di scattering*, è legata alla trasformata di Fourier del potenziale di interazione come [25]

$$S_{fi} = -iV(\mathbf{q})(2\pi)\delta(E_f - E_i) \quad . \quad (\text{A.7})$$

Eliminando il fattore  $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$  nell'integrazione sull'impulso di una delle due particelle nello stato finale, possiamo quindi identificare

$$V(\mathbf{q}) = i \lim_{\text{non rel.}} \mathcal{M}_{fi} \quad . \quad (\text{A.8})$$

Separando allora

$$V_{NN}(\mathbf{k}) = V_{OPEP}(\mathbf{k}) + V_{contatto}(\mathbf{k}) \quad , \quad (\text{A.9})$$



abbiamo

$$V_{OPEP}(\mathbf{k}) = \frac{g_A^2}{F_\pi^2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2 + m_\pi^2} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \quad (\text{A.10})$$

e

$$V_{contatto}(\mathbf{k}) = C_S + C_T \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \quad . \quad (\text{A.11})$$

Nello spazio delle coordinate

$$\begin{aligned} V_{OPEP}(\mathbf{r}) &= \frac{g_A^2}{F_\pi^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \frac{1}{(|\mathbf{k}|^2 + m_\pi^2)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= -\frac{g_A^2}{F_\pi^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(|\mathbf{k}|^2 + m_\pi^2)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{g_A^2}{F_\pi^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla)(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla) y_\pi(r) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e

$$V_{contatto}(\mathbf{r}) = (C_S + C_T \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad , \quad (\text{A.13})$$

avendo introdotto la funzione di Yukawa definita da

$$y_\pi(r) = \frac{e^{-m_\pi r}}{r} = 4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(|\mathbf{k}|^2 + m_\pi^2)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad . \quad (\text{A.14})$$

Il laplaciano della funzione di Yukawa può essere calcolato sfruttando la relazione

$$(-\nabla^2 + m_\pi^2) y_\pi(r) = 4\pi \delta(\mathbf{r}) \quad , \quad (\text{A.15})$$

dunque esso comporta l'introduzione di una singolarità nell'origine tramite la  $\delta$  di Dirac. I gradienti dell'Eq. (A.12) devono dunque essere calcolati tenendo conto di questa singolarità, pertanto riscriviamo l'espressione nella forma

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla y_\pi(r) = \left( \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla - \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \nabla^2 \right) y_\pi(r) + \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \nabla^2 y_\pi(r) \quad , \quad (\text{A.16})$$

nel primo addendo del termine a destra la singolarità è stata ora rimossa. Sapendo che

$$\partial^2 x \left( \frac{e^{-\alpha x}}{x} \right) = \alpha^2 \frac{e^{-\alpha x}}{x} + \frac{3\alpha}{x} \frac{e^{-\alpha x}}{x} + \frac{3}{x^2} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \quad , \quad (\text{A.17})$$

il primo addendo dell'Eq.ne (A.16) diventa

$$\left( \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla - \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \nabla^2 \right) y_\pi(r) = \underbrace{\left( \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right)}_{S_{12}} \left( m_\pi^2 + \frac{3m_\pi}{r} + \frac{3}{r^2} \right) y_\pi(r), \quad (\text{A.18})$$

dove  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ . Il secondo addendo dell'Eq.ne (A.16), sfruttando la (A.15), può essere riscritto come

$$\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \nabla^2 y_\pi(r) = \frac{1}{3} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) (m_\pi^2 y_\pi(r) - 4\pi \delta(\mathbf{r})) . \quad (\text{A.19})$$

Inserendo tutti i termini il potenziale risulta infine

$$V^\pi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3} \frac{1}{4\pi} \frac{g_A^2}{F_\pi^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \left[ S_{12} m_\pi^2 \left( 1 + \frac{1}{r m_\pi} + \frac{3}{r^2 m_\pi^2} \right) y_\pi(r) + (m_\pi^2 y_\pi(r) - 4\pi \delta(\mathbf{r})) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right] . \quad (\text{A.20})$$

# Appendice B

## *Old-fashion perturbation theory*

In questa Appendice vogliamo mostrare attraverso quali prescrizioni sia possibile passare dalla teoria delle perturbazioni covariante per la matrice  $S$  a quella che viene definita *old-fashion perturbation theory* (OFPT). Il primo approccio, facendo uso dei diagrammi di Feynmann, tratta in maniera sintetica i vari contributi che sono da attribuire ai diversi ordinamenti temporali nel T-prodotto delle lagrangiane di interazione mentre nel secondo questi contributi sono considerati esplicitamente e ad ognuno di questi è associato un diagramma.

Determiniamo la relazione tra i due formalismi prendendo il contributo al second'ordine dell'espansione perturbativa della matrice  $S$ . La dimostrazione si estende facilmente per analogia agli ordini superiori. Per semplicità ci limitiamo inoltre al caso di un campo bosonico in interazione  $\lambda\phi^4$ . Consideriamo quindi

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f | S | i \rangle = \int d^4x \int d^4y \langle f | T \{ \mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y) \} | i \rangle = \\ &= \int d^4x \int d^4y \langle f | T \{ \mathcal{H}_I(x) \mathcal{H}_I(y) \} | i \rangle = \\ &= \int d^4x \int d^4y [\Theta(x^0 - y^0) \langle f | \mathcal{H}_I(x) \mathcal{H}_I(y) | i \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle f | \mathcal{H}_I(y) \mathcal{H}_I(x) | i \rangle] = \\ &= \sum_n \int d^4x \int d^4y [\Theta(x^0 - y^0) \langle f | \mathcal{H}_I(x) | n \rangle \langle n | \mathcal{H}_I(y) | i \rangle + \\ &\quad + \Theta(y^0 - x^0) \langle f | \mathcal{H}_I(y) | n \rangle \langle n | \mathcal{H}_I(x) | i \rangle] \quad , \end{aligned} \tag{B.1}$$

avendo ricordato che la parte di interazione della lagrangiana e della hamiltoniana differiscono solo per il segno. Prendiamo in considerazione solo il termine proporzionale a  $\Theta(x^0 - y^0)$ , dato che nel caso semplice del campo scalare reale l'altro termine dà contributo identico. Separiamo l'integrale spaziale da quello temporale, per cui, tenendo conto dell'effetto della funzione  $\Theta$ , si ha

$$S_{fi} = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \int_{-\infty}^{+\infty} d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \int_{-\infty}^{x^0} dy^0 e^{i(E_f - E_n)x^0} e^{i(E_n - E_i)y^0} e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_n) \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{y}} \cdot \mathcal{M}_{fn}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) \mathcal{M}_{ni}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) \quad , \quad (\text{B.2})$$

dove il simbolo  $\mathcal{M}$  si riferisce all'elemento di matrice definito nella (A.6). Per eseguire l'integrale nella variabile  $y^0$  abbiamo bisogno di aggiungere una parte immaginaria infinitesima all'energia per assicurare la convergenza:  $E_n - E_i \longrightarrow E_n - E_i - i\epsilon$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \int_{-\infty}^{+\infty} d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \int_{-\infty}^{x^0} dy^0 \frac{i \mathcal{M}_{fn} \mathcal{M}_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon} \\ &\quad \cdot e^{i(E_f - E_n)x^0} e^{i(E_n - E_i)y^0} e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_n) \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{y}} = \\ &= \sum_n \mathcal{M}_{fn} \frac{i}{E_i - E_n + i\epsilon} \mathcal{M}_{ni} \cdot \\ &\quad \cdot (2\pi) \delta(E_f - E_i) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_n) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_i) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Le funzioni  $\delta$  indicano che nello stato intermedio si deve conservare l'impulso ma *non* l'energia. Agli stati intermedi è associato il propagatore non relativistico  $\frac{i}{E_i - E_n + i\epsilon}$ .

L'esempio citato si riferisce al caso semplice del campo scalare in autointerazione. Per teorie più complesse i vari termini corrispondenti ai diversi ordinamenti temporali danno contributi diversi e devono essere calcolati esplicitamente uno alla volta. Ci'ò è evidente nella trattazione dell'interazione  $NN$  mediata da pioni descritta nella Sezione 4.1.3. La formula si generalizza in maniera ovvia a contributi di ordine superiore e teorie arbitrarie.

# Bibliografia

- [1] Yukawa, H. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, **17**: 48, (1935).
- [2] Wiringa, R. B., V. G. J. Stoks e R. Schiavilla. *Phys. Rev. C*, **51**: 38, (1995).
- [3] Pieper, Steven C. e R.B. Wiringa. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **51**: 53, (2001).
- [4] Akmal, A., V.R. Pandharipande e D.G. Ravenhall. *Phys. Rev. C*, **58**: 1804, (1998).
- [5] Weinberg, S. *Phys. Lett. B*, **251,2**: 288, (1990).
- [6] Heisenberg, W. *Zeit. Phys.*, **77**: 1, (1932).
- [7] Bethe, H. A. *Scientific American*, **189**: 58, (1953).
- [8] Hatsuda, T.: *arXiv:0909.5637*.
- [9] Kelly, J. J. *Phys.Rev. C*, **66**: 065203, (2002).
- [10] Bjorken, J.D. e S.D. Drel: *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, (1964).
- [11] Stoks, V. G. J., R. A. M. Klomp, M. C. M. Rentmeester e J. J. de Swart. *Phys. Rev. C*, **48**: 792, (1993).
- [12] Fermi, E. *Nuovo Cimento*, **11**: 1, (1934).
- [13] Glashaw, S. L. *Nucl. Phys.*, **19**: 1264, (1967).

- 
- [14] Weinberg, S. *Phys. Rev.*, **19**: 1264, (1967).
- [15] Salam, A.: *Elementary Particle Physics*. edizione N. Svartholm (Almqvist e Woksells, Stoccolma), (1968).
- [16] Goldstone, J., A. Salam e S. Weinberg. *Phys. Rev.*, **127**: 965, (1962).
- [17] Haag, R. *Phys. Rev.*, **112**: 669, (1958).
- [18] Lehmann, H., K. Symanzik e W. Zimmermann. *Nuovo Cimento*, **1**: 205, (1955).
- [19] Jona Lasinio, G. *Nuovo Cimento*, **34**: 1790, (1964).
- [20] Weinberg, S.: *The Quantum Theory of Fields, vol II*. Cambridge University Press, Cambridge, (1996).
- [21] Burgess, C. P. *Phys. Rept.*, **330**: 193, (2000).
- [22] Ellis, R. K., W. J. Stirling e B.R. Webber: *QCD and collider physics*. Cambridge University Press, Cambridge, (1996).
- [23] Yao, W. M. et al.: *Particle Data Group*. *J. Phys. G*, **33**: 1, (2006).
- [24] Ioffe, B. L. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **56**: 232, (2006).
- [25] Peskin, M. E. e D. V. Schröder: *An introduction to quantum field theory*. Westview Press, Boulder, (1995).
- [26] Gell-Mann, M. e M. Lévy. *Nuovo Cimento*, **16**: 705, (1960).
- [27] Weinberg, S. *Phys. Rev. Lett.*, **18**: 188, (1967).
- [28] Weinberg, S. *Nuclear Phys. B*, **363**: 3, (1991).
- [29] Weinberg, S. *Nuclear Phys. B*, **363**: 3, (1991).

- [30] Donoghue, J. F., E. Golowich e B. Holstein: *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology.
- [31] Weinberg, S. *Phys. Rev. Lett.*, **17**: 616, (1966).
- [32] Gosser, J. e H. Leutwyler. *Ann. Phys.*, **158**: 142, (1984).
- [33] Colangelo, G., J. Gosser e H. Leutwyler. *Phys. Lett. B*, **488**: 261, (2000).
- [34] Colangelo, G., J. Gasser e A. Rusetsky. *Eur. Phys. J.*, **C59**: 777, (2009).
- [35] Pislak, S. et al. *Phys. Rev.*, **D67**: 072004, hep-ex/0301040, (2003).
- [36] Batley, J. R.: *NA48/2*. *Eur. Phys. J.*, **C54**: 411, (2008).
- [37] Golberger, M. L. e S. B. Treiman. *Phys. Rev.*, **109**: 193, (1958).
- [38] Machleidt, R.: *Ciclo di lezioni presentate al DAE-BRNS Workshop on Physics and Astrophysics of Hadrons and Hadronic Matter, Visva Bharati University, Santiniketan, West Bengal, India, novembre 2006 arXiv:0704.0807v1 [nucl-th]*. (2007).
- [39] Entem, D. R. e ar. Machleidt. *J. Phys. G: Nucl. Phys.*, **31**: S1235, (2005).
- [40] Wiringa, R. B. et al. *Phys. Rev. C*, **51**: 38, (1995).
- [41] Pudliner, B. S., V. R. Pandharipande, J. Carlson e R.B. Wiringa. *Phys. Rev. Lett.*, **74**: 4396, (1995).
- [42] Van Kolk, U. *Phys. Rev. C*, **49**: 2932, (1994).
- [43] Lagaris, I. e V. R. Pandharipandhe. *Nucl. Phys. A*, **359**: 349, (1981).
- [44] Lovato, A.: *Relazione a Compstar 2010*. Ganil, Febbraio 2010.

[45] Lovato, A., O. Benhar e S. Fantoni: *articolo in corso di stesura*.