



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

## Impatto delle sezioni d'urto nucleari sulla determinazione del mescolamento di neutrini sterili

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Candidato

Valerio Belocchi  
Matricola 1679985

Relatore

Prof. Omar Benhar Noccioli

Anno Accademico 2019/2020

---

**Impatto delle sezioni d'urto nucleari sulla determinazione del mescolamento di neutrini sterili**

Tesi di Laurea Magistrale. Sapienza – Università di Roma

© 2020 Valerio Belocchi. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X e la classe Saphthesis.

Email dell'autore: [belocchi.1679985@studenti.uniroma1.it](mailto:belocchi.1679985@studenti.uniroma1.it)

## Sommario

Le ricerche sperimentali sulle oscillazioni dei neutrini misurano il numero di eventi, definito in termini del flusso di neutrini o antineutrini incidenti, della probabilità di oscillazione e della sezione d'urto, che descrive l'interazione tra il fascio di particelle incidenti e i nuclei atomici da cui sono composti i rivelatori. La creazione di modelli dell'interazione neutrino-nucleo validi nell'intervallo di energie rilevante per gli esperimenti con acceleratori -dalle centinaia di MeV fino a qualche GeV- coinvolge numerosi argomenti concettuali e computazionali. Le approssimazioni che inevitabilmente si adottano nel calcolo teorico sono una delle cause principali delle grandi incertezze sistematiche nella determinazione dei parametri di oscillazione. Questa Tesi si propone di analizzare l'impatto delle incertezze associate alla sezione d'urto nucleare nel canale Quasi Elastico a Corrente Carica (CCQE) sul possibile segnale del mescolamento con neutrini sterili. Nello specifico sono confrontati i risultati ottenuti adottando un modello nucleare più complesso che descrive molte proprietà dei nuclei, basato sul modello a strati e con l'inclusione di fenomeni di correlazione dinamica tra nucleoni, e l'eccessivamente semplificatorio modello del Fermi gas, ancora largamente utilizzato nei generatori di eventi Monte Carlo. Lo studio è effettuato con la configurazione dell'esperimento MINER $\nu$ A, da cui sono presi il flusso di particelle incidenti e il carbonio come nucleo bersaglio.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Teoria Elettrodebole</b>	<b>5</b>
1.1 Una teoria che viola la parità . . . . .	5
1.1.1 Simmetria $SU(2)_L$ . . . . .	6
1.1.2 Simmetria $U(1)_Y$ . . . . .	8
1.1.3 Simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ locale . . . . .	9
1.2 La Lagrangiana della teoria elettrodebole . . . . .	11
1.2.1 Lagrangiane libere dei bosoni $W, W^\dagger$ e $Z$ . . . . .	13
1.2.2 Il meccanismo di Higgs . . . . .	14
1.2.3 Accoppiamenti di Yukawa per i leptoni . . . . .	17
<b>2 Neutrini</b>	<b>19</b>
2.1 Equazione di Weyl . . . . .	20
2.1.1 Covarianza di Weyl . . . . .	20
2.1.2 Soluzioni dell'equazione di Weyl . . . . .	22
2.1.3 Quantità conservate . . . . .	25
2.1.4 Spin ed elicità . . . . .	26
2.2 Neutrini di Dirac . . . . .	27
2.2.1 Soluzioni a elicità definita . . . . .	28
2.3 Neutrini di Majorana . . . . .	29
2.3.1 Soluzioni di Majorana . . . . .	30
2.3.2 Soluzioni a elicità definita . . . . .	31
2.4 Massa ai neutrini . . . . .	33
2.4.1 Massa di Dirac . . . . .	33
2.4.2 Massa di Majorana . . . . .	34
2.4.3 Il meccanismo <i>see-saw</i> . . . . .	35
<b>3 Oscillazione dei neutrini</b>	<b>37</b>
3.1 Matrici unitarie di mescolamento . . . . .	38
3.1.1 Mescolamento a due sapori . . . . .	39
3.1.2 Mescolamento a tre sapori . . . . .	40
3.1.3 Masse dei neutrini . . . . .	41
3.2 Misurazione delle oscillazioni . . . . .	43

<b>4</b>	<b>Neutrino sterile</b>	<b>45</b>
4.1	Evidenze di neutrino sterile . . . . .	45
4.2	Fenomenologia . . . . .	51
4.2.1	Perché <i>sterile</i> ? . . . . .	51
4.2.2	Mescolamento con il neutrino sterile . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Correnti Adroniche</b>	<b>57</b>
5.1	Regimi di interazione . . . . .	57
5.1.1	Diffusione anelastica . . . . .	57
5.1.2	Diffusione elastica . . . . .	58
5.2	Processi di diffusione quasi-elastica con corrente adronica . . . . .	59
5.2.1	Scattering elettromagnetico . . . . .	59
5.2.2	Scattering elettrodebole . . . . .	60
5.2.3	Parametrizzazione dei fattori di forma . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Diffusione <math>\nu_l - n</math> con Corrente Carica Quasi Elastica (CCQE)</b>	<b>65</b>
6.1	Ampiezza di Feynman . . . . .	66
6.1.1	Tensore leptónico . . . . .	66
6.1.2	Tensore adronico . . . . .	67
6.1.3	Calcolo di $L^{\mu\nu}W_{\mu\nu}$ . . . . .	68
6.2	Sezione d'urto . . . . .	69
6.2.1	Scattering con antineutrini incidenti . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Modelli Nucleari</b>	<b>73</b>
7.1	Forze Nucleari . . . . .	73
7.2	Modelli empirici . . . . .	78
7.2.1	Il modello a goccia di liquido . . . . .	78
7.3	Modelli a particelle indipendenti . . . . .	80
7.3.1	Gas di Fermi . . . . .	80
7.3.2	Il modello a strati . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Diffusione di neutrini su un nucleo</b>	<b>85</b>
8.1	Approssimazione Impulsiva . . . . .	86
8.2	Funzione spettrale nucleare . . . . .	90
8.2.1	Gas di Fermi (RFGM) . . . . .	90
8.2.2	Modello a Strati con Correlazione Dinamica (SFM) . . . . .	90
8.2.3	Pauli Blocking . . . . .	92
8.2.4	Interazioni nello Stato Finale . . . . .	93
<b>9</b>	<b>Dipendenza dai modelli nucleari nella ricerca dei neutrini sterili</b>	<b>95</b>
9.1	Procedimento . . . . .	96
9.1.1	Sezione d'urto in $Q^2$ . . . . .	96
9.1.2	Sezione d'urto . . . . .	100
9.2	Integrazione sul flusso di particelle incidenti . . . . .	101
9.2.1	Oscillazioni del flusso . . . . .	105
9.2.2	Simulazione delle oscillazioni . . . . .	106
	<b>Conclusioni</b>	<b>109</b>

<b>A</b>	<b>Meccanismo di Higgs per una teoria di gauge U(1)</b>	<b>111</b>
A.1	Gauge unitaria . . . . .	112
<b>B</b>	<b>Matrice di massa di Majorana</b>	<b>115</b>
B.1	Meccanismo dell'altalena . . . . .	116
<b>C</b>	<b>Tensore Adronico</b>	<b>117</b>
C.1	Parte vettoriale . . . . .	117
C.2	Parte assiale . . . . .	120
C.3	Parte vettoriale-assiale . . . . .	121
C.4	Definizione dei fattori $W_i$ . . . . .	122
<b>D</b>	<b>Figure d'oscillazione</b>	<b>123</b>





# Introduzione

I neutrini sono particelle elementari estremamente importanti per il complesso sistema teorico della comunità scientifica che tenta di descrivere l'universo. Infatti sono implicati in moltissimi ambiti, sia nello studio di proprietà globali, come l'asimmetria tra materia e antimateria, e nella ricerca di candidati per la materia oscura, sia nell'analisi delle proprietà dei nuclei e del decadimento  $\beta$  su scale microscopiche, ma con effetti macroscopici, osservati e studiati per esempio nelle stelle. I neutrini rappresentano le particelle più sfuggenti finora osservate, con una massa estremamente ridotta, inferiore all'elettronVolt, e con una scarsa capacità di interazione con la materia.

I neutrini appaiono nel mondo della fisica moderna nel 1930, da un'idea di W. Pauli per spiegare lo spettro continuo dell'elettrone nel decadimento  $\beta$  dei nuclei. Egli però lo battezzò come neutrone, in virtù della carica elettrica che avrebbe dovuto avere. Lo stesso nome fu però adottato per la particella ben più massiva, ma sempre neutra, scoperta nel febbraio del 1932 da J. Chadwick. La denominazione di "neutrino" ha invece origine da un diminutivo scherzoso di neutrone da parte di E. Amaldi, nata in una conversazione con il collega e amico E. Fermi. La questione onomastica fu definitivamente risolta da quest'ultimo in una conferenza del luglio 1932, nella quale egli espone una teoria efficace per spiegare con i neutrini i decadimenti radioattivi: è il primo passo per la formulazione della teoria dell'interazione debole.

L'elusività della nuova particella introdotta poneva però notevoli difficoltà alla sua rivelazione, tali che lo stesso Pauli quando propose la sua esistenza aveva forti dubbi sulla possibilità della sua osservazione: dobbiamo aspettare il 1956, quando C. Cowan e F. Reines confermarono l'esistenza dell'antineutrino utilizzando un reattore nucleare come sorgente e con un grande rivelatore posizionato sotto terra, per schermare i neutrini di fondo. In seguito vi furono numerose scoperte che ampliarono lo scenario delle particelle conosciute, le quali trovarono il loro posto in quella che è la teoria attualmente più accreditata, il Modello Standard della fisica delle particelle elementari. Esso descrive le interazioni forti, trattate nell'ambito della cromodinamica quantistica, QCD, quelle elettromagnetiche dell'elettrodinamica quantistica, QED, e le interazioni deboli. Le ultime novità apportate al modello furono l'unificazione della teoria elettrodebole, spiegata come teoria di gauge da S. Weinberg e A. Salam con l'annessione del meccanismo di R. Brout, F. Englert e P. Higgs, confermato dall'osservazione del bosone detto di Higgs annunciata nel luglio 2012.

Nell'ambito della fisica dei neutrini il panorama è divenuto più complesso. Infatti furono osservati neutrini di tipologie distinte, dette *sapori*: nel 1962 L.M. Lederman, M. Schwartz e J. Steinberg mostrarono che i neutrini elettronici e muonici

erano particelle distinte, e a questi si aggiunse il neutrino tauonico osservato nel 2000 nell'esperimento *Direct Observation of the NU Tau*, DONUT, previsto dopo la scoperta del 1975 del leptone più pesante conosciuto, il tau, ad opera di M.L. Perl. Inoltre fu scoperto il fenomeno delle oscillazioni, e più in generale del mescolamento fra i sapori, già teorizzato da B. Pontecorvo: nel 1957 suggerisce una possibile oscillazione neutrino-antineutrino, in analogia con quanto proposto nel 1956 da M. Gell-Mann, uno dei principali fondatori della QCD, e A. Pais per la transizione, poi effettivamente osservata,  $K^0 - \bar{K}^0$ , ipotesi accantonata in seguito alla scoperta della violazione della parità nelle interazioni deboli; nel 1967 invece, a seguito della scoperta del secondo neutrino, propone la possibilità di oscillazioni  $\nu_e - \nu_\mu$ . La teoria delle oscillazioni di sapore raggiunge la sua attuale configurazione con la matrice di mescolamento tra autostati massivi e di sapore a tre particelle, valida per i leptoni come per i quark, costruita dai fisici Z. Maki, M. Nakagawa e S. Sakata nel 1962. Ad oggi la ricerca scientifica è indirizzata a investigare sulla natura dei neutrini, intesi come fermioni di Dirac o di Majorana, sulla possibile esistenza di altre tipologie di neutrini non osservate, dette *sterili* perché non interagenti con la materia se non tramite la gravità, e sul possibile mescolamento di queste con i neutrini attivi. Un altro aspetto interessante è la problematica riguardante la massa di queste particelle: il fenomeno delle oscillazioni implica che abbiano masse, tra l'altro diverse, ma non si sa la ragione della piccolezza di esse.

Lo studio delle proprietà dei neutrini avviene principalmente tramite l'interazione con i nuclei, anche se vi sono diverse difficoltà nella descrizione di questi processi. Infatti è estremamente complicato produrre flussi di neutrini incidenti monoenergetici, ottenibili da processi di cattura elettronica nei nuclei, ma a energie molto basse, o dal decadimento di kaoni in quiete, ma al contrario se ne ha spesso una scarsa conoscenza, non essendo possibile osservare direttamente i neutrini: il flusso rappresenta la fonte di errore più importante in questa tipologia di esperimenti. Perciò la quantificazione dell'energia della particella incidente risulta possibile solo con la ricostruzione accurata del vertice di interazione debole e delle particelle prodotte. In quest'ottica è favorito lo studio di processi a corrente carica piuttosto che neutra, in quanto è più semplice l'analisi dei leptoni carichi dello stato finale. In più la bassissima sezione d'urto, sull'ordine dei  $10^{-38}$  cm<sup>2</sup>, complica e peggiora l'analisi statistica dei risultati, oltre a rendere necessario l'utilizzo di rivelatori di notevoli dimensioni e l'impiego di nuclei pesanti come bersagli. E per concludere, i nuclei rappresentano sistemi fisici molto complessi, poiché sono stati legati di più particelle non elementari, i protoni e i neutroni, che interagiscono forte ma a energie per le quali non è possibile lo sviluppo perturbativo della QCD. Pertanto è necessario adottare modelli efficaci che riproducano le proprietà nucleari e che forniscano gli strumenti necessari per descrivere con precisione adeguata i processi di interazione con i neutrini. Seguendo questa direzione si sono svolti numerosi esperimenti che sondassero i nuclei tramite diffusione elettronica e che hanno portato preziose informazioni, ma l'interazione debole è più complessa di quella elettromagnetica, e rimangono molte le incertezze a riguardo.

Questa trattazione entra nel vivo della questione, prendendo in esame due modelli nucleari, il Fermi gas e un modello basato sulla teoria a molti corpi, adottando l'ipotesi semplificatoria di interazione della particella incidente con il singolo nucleone,

detta *approssimazione impulsiva*. Lo scopo è quello di mostrare gli effetti dell'utilizzo di uno o dell'altro modello nella ricerca dei neutrini sterili e nella determinazione delle loro proprietà.

Le tematiche affrontate per arrivare ad una maggiore comprensione dell'argomento sono diverse. Nei primi capitoli si descrive brevemente la teoria elettrodebole come teoria di gauge, con accenni al meccanismo di Higgs, e si analizza il neutrino come fermione trattandolo sia come particella di Dirac che di Majorana, con particolare attenzione al problema della massa. Seguono un approfondimento sul tema delle oscillazioni di sapore, e una panoramica sulle informazioni che si hanno sul neutrino sterile ad oggi, dalle evidenze sperimentali che suggeriscono la sua esistenza ai metodi con cui si può rilevare.

Nella seconda parte invece si approfondisce la questione posta dai nuclei: sono studiati il formalismo con il quale si descrivono le correnti di adroni e le tipologie di processi cui vanno incontro, con particolare attenzione alla diffusione di neutrini sui nucleoni. Successivamente si prosegue con l'analisi dei nuclei, passando in rassegna alcuni dei modelli più noti utilizzati per descriverli, e valutando come si modificano i processi di interazione che coinvolgono i nucleoni all'interno di un nucleo.

Nell'ultimo capitolo si arriva finalmente al confronto tra due modelli nucleari nella loro capacità di spiegare alcuni dati sperimentali. Per fare ciò si è presa in esame l'interazione con corrente carica di neutrini e antineutrini con nuclei di carbonio, mediata sul flusso utilizzato dall'esperimento MINER $\nu$ A, valutando la distribuzione in  $Q^2$  e la sezione d'urto totale nel canale quasi elastico del processo. L'analisi è portata avanti anche introducendo le modifiche del flusso per le transizioni dei neutrini in stati sterili, che possono influenzare l'osservabile considerata.



# Capitolo 1

## Teoria Elettrodebole

Dalla scoperta e dallo studio dei decadimenti  $\beta$  si è individuato un tipo di interazione diversa da quella elettromagnetica e da quella forte, l'interazione debole. Fermi la strutturò come una nuova teoria di interazione puntuale tra correnti, ma risultò non rinormalizzabile, caratteristica che dopo i successi della QED sembra essere imprescindibile. In seguito venne modificata la teoria dell'interazione debole, con la teoria di Glashow [?], nella quale comparivano i bosoni massivi mediatori  $W^\pm$ ,  $Z$ , ma ancora non rinormalizzabile per via delle masse delle particelle. Infine si è arrivati alla teoria attuale [?, ?], presente nel modello standard come teoria dell'unificazione elettrodebole: una teoria di gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  che include il meccanismo di Higgs per tener conto delle masse delle particelle e salvare la simmetria di gauge. Illustriamo brevemente la teoria elettrodebole come teoria di gauge.

### 1.1 Una teoria che viola la parità

Per cominciare consideriamo solo i fermioni coinvolti nelle interazioni deboli: *leptoni* e *neutrini*. Questi compaiono in tre *sapori* diversi: *elettronico*, *muonico* e *tauonico*. Tali particelle le consideriamo inizialmente prive di massa e, in quanto fermioni, utilizziamo il formalismo di Dirac per descriverle. La Lagrangiana libera e senza termini massivi risulta pertanto:

$$\mathcal{L}_0(x) = i \sum_l \left[ \bar{\psi}_l(x) \not{\partial} \psi_l(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}(x) \not{\partial} \psi_{\nu_l}(x) \right] \quad (1.1)$$

L'indice  $l$  della sommatoria corre sulle famiglie leptoniche  $e$ ,  $\nu$ ,  $\tau$ .

Dai dati sperimentali si osserva che solo i campi a chiralità negativa, detti sinistrorsi, sono coinvolti nell'interazione: il famoso esperimento di Madame Wu [?] decretò la possibile violazione della parità in natura, prima di allora mai riscontrata, che in seguito divenne caratteristica peculiare dell'interazione debole. Per questo è conveniente separare le componenti levogire dalle destrogire<sup>1</sup>, tramite i proiettori

<sup>1</sup>Qui sorgono problemi di denominazione. I termini "levogiro", "destrogiro", "sinistrorso" e "destrorso" si utilizzano sia per la chiralità, sia per l'elicità. Queste due quantità sono differenti, e coincidono solo nel caso di massa nulla. L'effetto più eclatante di questa differenza è il decadimento del pione carico, mesone scalare, nella coppia muone-neutrino, che sarebbe proibita in virtù della violazione della parità dell'interazione in antagonismo alla conservazione del momento angolare totale.

chirali.

$$\begin{aligned}\psi_L &= P_L \psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi & \psi^R &= P_R \psi = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \\ \bar{\psi}_L &= \psi^\dagger \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\gamma^0 = \bar{\psi} P_R & \bar{\psi}^R &= \psi^\dagger \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\gamma^0 = \bar{\psi} P_L\end{aligned}\quad (1.2)$$

Gli operatori  $P_L$  e  $P_R$  sono proiettori in quanto rispettano le proprietà

- $P_L + P_R = 1$
- $P_L P_R = P_R P_L = 0$
- $P_{L\setminus R} P_{L\setminus R} = P_{L\setminus R}$

Introduciamo il formalismo isospinoriale debole per le componenti levogire, quelle coinvolte dall'interazione debole. Si definisce quindi la combinazione di campi sinistrorsi leptonici e dei neutrini:

$$\Psi_l^L(x) := \begin{pmatrix} \psi_l^L \\ \psi_{\nu_l}^L \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

La Lagrangiana si può dunque scrivere in termini dei campi chirali utilizzando gli isospinori appena definiti.

$$\mathcal{L}_0(x) = i \sum_l \left[ \bar{\Psi}_l^L(x) \not{\partial} \Psi_l^L(x) + \bar{\psi}_l^R(x) \not{\partial} \psi_l^R(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}^R(x) \not{\partial} \psi_{\nu_l}^R(x) \right] \quad (1.4)$$

### 1.1.1 Simmetria $SU(2)_L$

A questo punto si può osservare che il termine  $\bar{\Psi}_l^L(x) \not{\partial} \Psi_l^L(x)$  ammette una trasformazione bidimensionale unitaria che lo lascia invariato, e che rappresenta quindi una simmetria di  $\mathcal{L}_0$ .

$$U(\alpha) = e^{i \frac{\alpha_j \sigma_j}{2}} \quad (1.5)$$

Le  $\sigma_j$  sono le matrici  $2 \times 2$  di Pauli, che seguono l'algebra di Lie. Infatti vale  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$ . Dunque queste matrici costituiscono dei generatori non commutativi di un gruppo non abeliano di simmetria, il gruppo  $SU(2)$ .

La simmetria appena introdotta riguarda solo le componenti sinistrorse dei campi. Assumiamo quindi che tutti i campi destrorsi siano scalari rispetto alla trasformazione (1.5), ovvero:

$$\begin{aligned}\Psi^L &\rightarrow e^{i \frac{\alpha_j \sigma_j}{2}} \Psi^L \\ \psi^R &\rightarrow \psi^R\end{aligned}\quad (1.6)$$

Vediamo infine che la presenza di termini massivi comporta un mescolamento tra le componenti levogire e destrogire, e dunque alla comparsa di termini non invarianti per la trasformazione (1.5) appena introdotta. Infatti, utilizzando le (1.2) e le proprietà dei proiettori chirali:

$$m^2 \bar{\psi} \psi = m^2 (\bar{\psi}^L + \bar{\psi}^R)(\psi^L + \psi^R) = m^2 \underbrace{(\bar{\psi}^L \psi^R + \bar{\psi}^R \psi^L)}_{\text{termini misti}} \quad (1.7)$$

Ecco perché si è inizialmente assunto che tutte le particelle hanno massa nulla.

### Correnti conservate

Tornando alla Lagrangiana introdotta in (1.4), dato che è invariante per la simmetria  $SU(2)_L$ , si hanno delle correnti conservate come conseguenza del teorema di Nöther per le simmetrie continue. Indichiamo con l'apice ' le quantità trasformate secondo (1.5), e dunque:

$$\mathcal{L}'(\psi', \bar{\psi}') = \mathcal{L}'(\psi, \bar{\psi}) = \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) \quad (1.8)$$

da cui

$$\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = 0 \quad (1.9)$$

Consideriamo ora i campi  $\psi'$  con la trasformazione (1.5) infinitesima, assumendo  $\alpha_i$  piccola, e valutiamo la variazione dei campi al primo ordine in  $\alpha$ .

$$\delta\psi_L := \psi'_L - \psi_L = i\alpha_j \sigma_j \psi_L$$

La variazione al primo ordine della Lagrangiana rispetto ai campi per la trasformazione infinitesima è quindi

$$\sum_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_l^L} \delta \Psi_l^L + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_l^L} \delta \bar{\Psi}_l^L + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_l^L)} \delta (\partial_\mu \Psi_l^L) = 0 \quad (1.10)$$

dove si sono omessi gli indici delle componenti degli isospinori. Infatti la derivazione di  $\mathcal{L}$  per gli isospinori e la successiva moltiplicazione per le loro variazioni è eseguita componente per componente.

L'operazione di derivata  $\partial_\mu$  agisce nello spazio delle coordinate, mentre la variazione  $\delta$  opera sulla forma dei campi, e quindi vale  $\delta(\partial_\mu \Psi^L) = \partial_\mu(\delta \Psi^L)$ . Inoltre utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^L)} \right)$ , si ottiene il differenziale totale

$$\sum_l \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_l^L)} \delta \Psi_l^L \right) = 0 \quad (1.11)$$

da cui discendono le quadricorrenti conservate

$$J_i^\mu(x) = \sum_l \frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L(x) \gamma^\mu \sigma_i \Psi_l^L(x) \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.12)$$

dette *correnti di isospin debole*.

Combinando le correnti tra loro si ottengono quantità conservate relative ai singoli spinori leptonici e dei neutrini. Definiamo quindi

$$\sigma_\pm := \frac{\sigma_1 \pm i\sigma_2}{2} \quad \rightarrow \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

e le correnti associate<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &:= J_1^\mu(x) - iJ_2^\mu(x) = \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}(x) \\ J^{\mu\dagger}(x) &:= J_1^\mu(x) + iJ_2^\mu(x) = \bar{\psi}_{\nu_l}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l(x) \end{aligned} \quad (1.14)$$

<sup>2</sup>Nelle correnti con gli spinori levogiri compare solo un proiettore chirale. Infatti si ha  $P_R \gamma^\mu P_L = \gamma^\mu P_L^2 = \gamma^\mu P_L$ .

dette *correnti deboli cariche*, in quanto la presenza degli spinori associati comporta il fatto che queste correnti siano cariche elettricamente. Invece  $J_3^\mu$ , in termini degli spinori di Dirac, è

$$J_3^\mu(x) = \frac{1}{2} \left[ \bar{\psi}_{\nu_l}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l}(x) - \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l(x) \right] \quad (1.15)$$

che rappresenta la *corrente debole neutra*: i termini leptonici compaiono come parte levogira della corrente di Dirac  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ , che non porta carica elettrica.

La presenza della corrente di Dirac, seppure soltanto nella sua parte levogira, è sintomo della connessione che vi è tra l'interazione debole e l'interazione puramente elettromagnetica, che congiunte danno vita all'interazione elettrodebole.

### Isospin debole

Alle correnti deboli è associata una quantità vettoriale conservata, l'*isospin debole*:

$$I_i^W = \int J_i^0(x) d\mathbf{x} = \sum_l \frac{1}{2} \int (\Psi_l^L)^\dagger(x) \sigma_i \Psi_l^L(x) d\mathbf{x} \quad (1.16)$$

L'apice W sta per "weak", per differenziare l'isospin debole da quello delle interazioni forti.

L'isospin segue la stessa algebra dello spin. Per la quantizzazione è quindi conveniente scegliere come valori di riferimento  $I^W$  e la sua componente lungo l'asse  $z$ ,  $I_3^W$ . Così è possibile associare alle particelle fisiche valori definiti di questa quantità, riportati nella tabella 1.1.

#### 1.1.2 Simmetria $U(1)_Y$

La Lagrangiana descritta in (1.4) ha anche un'altra simmetria, poiché è invariante per trasformazioni di fase dei campi. In realtà ci sono diverse trasformazioni di fase possibili che corrispondono alla conservazione di più numeri quantici: il numero leptonic e la carica elettrica. In particolare però ci soffermiamo su un'altra grandezza conservata che unisce la componente  $z$  dell'isospin con la carica elettrica. Questa è detta *iper carica debole*  $Y^W$ , ed è associata alla corrente di iper carica

$$J_Y^\mu(x) = -\bar{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l - J_3^\mu \quad (1.17)$$

da cui appunto

$$Y^W = \int J_Y^0(x) d\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad Y^W = Q/e - I_3^W \quad (1.18)$$

dove  $Q := -e \int \bar{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l d\mathbf{x}$  è la carica elettrica associata ai leptoni.

Da questa definizione è possibile calcolare l'iper carica debole associata alle particelle, ricordando che tutti i leptoni hanno carica elettrica  $-e$  mentre i neutrini sono neutri. I valori sono riportati nella tabella 1.1.

La scelta dell'iper carica debole  $Y^W$  è dettata dal fatto che i generatori di  $U(1)_Y$  commutano con quelli di  $SU(2)_L$ : in questo modo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  è un gruppo di simmetria. Nella Lagrangiana questo significa che anche gli isospinori  $\Psi$  sono invarianti sotto trasformazioni del gruppo  $U(1)_Y$ .



Particelle	$I^W$	$I_3^W$	$Y^W$
$e_L, \mu_L, \tau_L$	1/2	-1/2	-1/2
$e_R, \mu_R, \tau_R$	0	0	-1
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	1/2	1/2	-1/2
$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$	0	0	0

Tabella 1.1. Isospin e ipercarica debole delle particelle

### 1.1.3 Simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ locale

Prendendo a modello la QED, teoria con simmetria di gauge per  $U(1)$ , vogliamo forzare le simmetrie appena descritte ad essere locali. Questo significa imporre che le trasformazioni che lasciano invariata la Lagrangiana elettrodebole dipendano dalla variabile spaziotempo. In tal modo però la Lagrangiana non risulta più invariante: abbiamo infatti posto una condizione che richiede ulteriori gradi di libertà per la teoria. Il problema si risolve introducendo nuove particelle che corrispondono ai gradi di libertà aggiunti. Queste sono i bosoni di gauge, particelle mediatrici dell'interazione, la cui presenza è necessaria per rispettare il principio secondo il quale non è possibile avere interazioni a distanza senza un mediatore. Vediamo il procedimento nello specifico per estendere le due simmetrie della Lagrangiana elettrodebole. Adotteremo il sistema più semplice delle *sostituzioni minimali*. In generale si può fare anche in altri modi aggiungendo termini più complicati, ma questo comporta problemi di rinormalizzabilità della teoria [?].

#### $SU(2)_L$ locale

Introduciamo la trasformazione dei campi partendo da (1.5):

$$U[w(x)] = e^{\frac{i}{2}g\omega_j(x)\sigma_j} \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.19)$$

con  $g$  costante reale,  $\omega_j$  funzioni reali differenziabili.

Sotto questa trasformazione la Lagrangiana non è più invariante. Infatti l'operatore  $\not{\partial}$  ora agisce in maniera non banale sulle funzioni  $\omega_j(x)$ , generando un termine aggiuntivo. Considerando trasformazioni infinitesime per  $w$  sufficientemente piccolo, esplicitiamo la Lagrangiana trasformata:

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2}g \sum_l \bar{\Psi}_l^L(x) \sigma_l \not{\partial} \omega_l(x) \Psi_l^L(x) \quad (1.20)$$

Per riottenere l'invarianza si introduce la derivata covariante  $D^\mu$  con tre campi di gauge reali  $W_i^\mu(x)$ :

$$D^\mu := \partial^\mu + \frac{i}{2}g\sigma_j W_j^\mu(x) \quad (1.21)$$

I campi appena introdotti devono essere invarianti per la trasformazione di gauge con  $\omega$  piccolo associata alla trasformazione dei campi (1.19), per deve valere

$$W_i^{\mu'}(x) = W_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g\epsilon_{ijk}\omega_j(x)W_k^\mu(x) \quad (1.22)$$

per assicurare l'invarianza della Lagrangiana. Vediamolo nel dettaglio.

Definiamo per comodità le matrici  $W^\mu := \sigma_i W_i^\mu$ ,  $\omega := \sigma_i \omega_i$ , espresse in componenti nella base di Pauli per le matrici  $2 \times 2$ .

Per ottenere l'invarianza di  $\mathcal{L}_0$  sotto (1.19) si deve avere che il termine  $D^\mu \Psi$  trasformi come  $\Psi$ , ovvero

$$\left(D^\mu \Psi\right)' = \left(1 + \frac{i}{2} g \omega\right) D^\mu \Psi \quad (1.23)$$

Sia  $W'^\mu(x) = W^\mu(x) + \delta W^\mu(x)$  l'espressione generale per la (1.22) in forma matriciale. Ora eseguiamo la trasformazione (1.19) su  $\Psi$  e la trasformazione di gauge appena definita al termine  $D^\mu \Psi$ , e la imponiamo essere uguale alla (1.23).

$$\begin{aligned} \left(\partial^\mu + \frac{i}{2} g W^\mu(x) + \frac{i}{2} g \delta W^\mu(x)\right) \left(1 + \frac{i}{2} g \omega(x)\right) \Psi(x) \\ = \left(1 + \frac{i}{2} g \omega(x)\right) \left(\partial^\mu + \frac{i}{2} g W^\mu(x)\right) \Psi(x) \end{aligned} \quad (1.24)$$

L'equazione ha per soluzione, a meno di termini di  $O(w^2)$

$$\delta W^\mu(x) = -\partial^\mu \omega(x) + \frac{i}{2} g [\omega, W^\mu] \quad (1.25)$$

dove  $[\omega, W^\mu] = 2i\epsilon_{ijk}\omega_j(x)W_k^\mu(x)$  per l'algebra delle matrici di Pauli. La trasformazione di gauge per i campi  $W_i^\mu$  risulta dunque essere quella scritta in (1.22).

### U(1)<sub>Y</sub> locale

Generalizziamo la simmetria globale U(1)<sub>Y</sub> di  $\mathcal{L}_0$  associata alla conservazione dell'iper-ricarica debole a una simmetria locale. Si considera quindi la trasformazione di fase dei campi e si introduce una dipendenza dalla variabile spaziotemporale.

$$U[f(x)] = e^{ig'Yf(x)} \quad (1.26)$$

con  $g'$  costante reale e  $f(x)$  funzione reale differenziabile.

La Lagrangiana non risulta più invariante per (1.26) a causa dell'azione non più banale dell'operatore  $\not{\partial}$  sulla funzione  $f(x)$ , che genera un termine aggiuntivo:

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0 + g' \sum_l \bar{\Psi}_l^L(x) Y \not{\partial} f(x) \Psi_l^L(x) \quad (1.27)$$

Per ripristinare l'invarianza si introduce la derivata covariante

$$D^\mu := \partial^\mu + ig'YB^\mu(x)$$

dove  $B^\mu(x)$  è un nuovo campo di gauge, e si impone che il termine  $D^\mu \psi$  trasformi come  $\psi$ . È necessario notare che l'operatore  $Y$  assume valori diversi a seconda del campo di Dirac su cui agisce. La derivata covariante è quindi diversa a seconda dello spinore su cui opera. Riottenere l'invarianza della Lagrangiana è possibile solo

richiedendo che il campo  $B$  subisca una trasformazione di gauge simultanea come  $B^{\mu'}(x) = B^{\mu}(x) + \delta B^{\mu}(x)$  che dipenda anch'essa da  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} (D^{\mu}\psi)' &= (\partial^{\mu} + ig'YB^{\mu} + ig'Y\delta B^{\mu})(1 + ig'Yf)\psi \\ &= (1 + ig'Yf)(\partial^{\mu} + ig'YB^{\mu})\psi \end{aligned} \quad (1.28)$$

La soluzione di questa equazione caratterizza la trasformazione di gauge subita da  $B^{\mu}$ .

$$B^{\mu'}(x) = B^{\mu}(x) + \partial^{\mu}f(x) \quad (1.29)$$

## 1.2 La Lagrangiana della teoria elettrodebole

Consideriamo ora una teoria dove vi sia simultaneamente l'invarianza per trasformazioni locali di  $SU(2)_L$  e  $U(1)_Y$ . Ciò è possibile se assumiamo che i campi  $W_i^{\mu}$  siano invarianti per trasformazioni di gauge  $U(1)_Y$ , e il campo  $B^{\mu}$  sia invariante per trasformazioni di gauge  $SU(2)_L$ . Così si è ottenuta una Lagrangiana con simmetria  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  di gauge. Questa è notevolmente diversa da quella iniziale (1.4): ha quattro gradi di libertà in più, che corrispondono a nuovi bosoni di gauge che si accoppiano con i fermioni della teoria. Possiamo quindi distinguere una Lagrangiana libera  $\mathcal{L}_0$  per i fermioni e una di interazione  $\mathcal{L}_1$  con i bosoni.

$$\mathcal{L} = i \sum_l \left[ \bar{\Psi}_l^L(x) \not{D} \Psi_l^L(x) + \bar{\psi}_l^R(x) \not{D} \psi_l^R(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}^R(x) \not{D} \psi_{\nu_l}^R(x) \right] \quad (1.30)$$

dove la derivata covariante vale

$$\begin{aligned} D^{\mu} \Psi_l^L(x) &= \left[ \partial^{\mu} + \frac{i}{2} g \sigma_j W_j^{\mu}(x) + ig'YB(x) \right] \Psi_l^L(x) \\ D^{\mu} \psi_l^R(x) &= \left[ \partial^{\mu} + ig'YB(x) \right] \psi_l^R(x) \\ D^{\mu} \psi_{\nu_l}^R(x) &= \partial^{\mu} \psi_{\nu_l}^R(x) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Esplicitando questa si ottiene la Lagrangiana iniziale  $\mathcal{L}_l$  con in più le interazioni tra bosoni di gauge e leptoni.

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) - \underbrace{g J_i^{\mu}(x) W_{i\mu}(x) + g' J_Y^{\mu}(x) B_{\mu}(x)}_{\mathcal{L}_1(x)} \quad (1.32)$$

Riscriviamo  $\mathcal{L}_1$  in termini delle correnti leptoniche, così da facilitare l'interpretazione delle interazioni. Ricordando la (1.14), si definisce

$$W^{\mu} := \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^{\mu} - iW_2^{\mu}) \quad W^{\mu\dagger} := \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^{\mu} + iW_2^{\mu}) \quad (1.33)$$

così vale

$$\sum_{i=1}^2 J_i^{\mu} W_{i\mu} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger} W_{\mu} + J^{\mu} W_{\mu}^{\dagger}) \quad (1.34)$$

Per il termine con la corrente di ipercarica è necessario fare un ragionamento più articolato. Infatti abbiamo visto in precedenza come la corrente neutra  $J_3^\mu$  definita in (1.15) includa anche la corrente di Dirac, e come la simmetria  $U(1)_Y$  della Lagrangiana per l'iperparica debole si sostituisca a quella per la carica elettromagnetica. In qualche modo però le regole della QED, come la conservazione della carica elettrica e l'invarianza di gauge per i fotoni devono emergere anche dalla teoria fin qui costruita, proprio perché anch'essa coinvolge i fermioni di Dirac carichi elettricamente della QED. Pertanto scriviamo i due bosoni  $W_3^\mu, B^\mu$  accoppiati con la corrente neutra come combinazioni lineari di altri due campi hermitiani:

$$\begin{aligned} W_3^\mu(x) &= \cos \theta_W Z^\mu(x) + \sin \theta_W A^\mu(x) \\ B^\mu(x) &= -\sin \theta_W Z^\mu(x) + \cos \theta_W A^\mu(x) \end{aligned} \quad (1.35)$$

In questo modo i termini di interazione per la corrente neutra risultano

$$\begin{aligned} -g J_3^\mu W_{3\mu} - g' J_Y^\mu B_\mu &= -g' J_D^\mu (-\sin \theta_W Z^\mu + \cos \theta_W A^\mu) \\ &\quad - J_3^\mu \left[ g(\cos \theta_W Z^\mu + \sin \theta_W A^\mu) - g'(-\sin \theta_W Z^\mu + \cos \theta_W A^\mu) \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

dove  $J_D^\mu$  è la corrente leptonica di Dirac.

Richiedendo che  $A^\mu$  sia il campo elettromagnetico e che nell'interazione con i leptoni carichi si riproponga l'accoppiamento elettromagnetico tra corrente e  $A^\mu$  del tipo  $\sim e J^\mu A_\mu$ , imponiamo:

$$\begin{cases} -g' \cos \theta_W = -e \\ g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W = 0 \leftarrow \text{non c'è accoppiamento tra } A_\mu J_3^\mu \end{cases} \quad (1.37)$$

e quindi si ha

$$g' = g \tan \theta_W \quad (1.38)$$

La Lagrangiana di interazione risulta:

$$\mathcal{L}_I = \underbrace{-e J_D^\mu A_\mu}_{\text{corrente EM}} - \underbrace{\frac{g}{2\sqrt{2}} [J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger]}_{\text{corrente debole carica}} - \underbrace{\frac{g}{\cos \theta_W} [J_3^\mu - \sin^2 \theta_W J_D^\mu] Z_\mu}_{\text{corrente debole neutra}} \quad (1.39)$$

Per comodità si definisce anche  $g_W := \frac{g}{2\sqrt{2}}$ . Inoltre dalle osservazioni sperimentali è noto il valore di  $\sin^2 \theta_W = 0.23122 \pm 0.00015$ . Riassumendo quindi si ha che:

- $J^{\mu\dagger}$  e  $J^\mu$  sono correnti cariche elettricamente, accoppiate ai bosoni carichi  $W_\mu$  e  $W_\mu^\dagger$ .
- $J_3^\mu - \sin^2 \theta_W J_D^\mu$  è la corrente neutra elettricamente, accoppiata al bosone neutro  $Z_\mu$ . Il termine  $\sin^2 \theta_W J_D^\mu$  rappresenta l'accoppiamento tra interazione elettromagnetica e debole. Se si pone  $\theta_W = 0$  le due teorie risultano disaccoppiate.  $\theta_W$  è detto infatti *angolo di mescolamento elettrodebole* o di Weinberg, dal nome del fisico S. Weinberg che per primo unificò elettromagnetismo e teoria debole.

Resta da trattare la dinamica libera dei bosoni di gauge introdotti in assenza dei fermioni.

### 1.2.1 Lagrangiane libere dei bosoni $W$ , $W^\dagger$ e $Z$

Per descrivere la fisica dei bosoni di gauge introdotti torniamo ad utilizzare  $W_i^\mu$  e  $B^\mu$ . Inoltre dobbiamo richiedere che le Lagrangiane libere bosoniche abbiano le proprietà di simmetria  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

–  $B^\mu$

Ha la stessa legge di trasformazione del campo elettromagnetico  $A^\mu$ , dunque come in QED definiamo:

$$\mathcal{L}_0^B = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad \text{con} \quad B^{\mu\nu} := \partial^\nu B^\mu - \partial^\mu B^\nu \quad (1.40)$$

Poiché il campo  $B^\mu$  è invariante sotto  $SU(2)_L$ , anche  $\mathcal{L}_0^B$  lo è, e dunque risulta avere simmetria per  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

–  $W_i^\mu$

Qui si usa la stessa legge di trasformazione della QCD. Partendo dalla QED si definisce

$$F_i^{\mu\nu} := \partial^\nu W_i^\mu - \partial^\mu W_i^\nu \quad (1.41)$$

ma così  $F_i^{\mu\nu}$  non è gauge invariante rispetto alla trasformazione (1.22), perciò si aggiunge un termine per ottenerla.

$$G_i^{\mu\nu} := F_i^{\mu\nu} + g\epsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu \quad \rightarrow \quad G^{\mu\nu} := F^{\mu\nu} + \frac{g}{2}[W^\mu, W^\nu] \quad (1.42)$$

La Lagrangiana risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^W &= -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} \\ &\quad + g\epsilon_{ijk}W_{i\mu}W_{j\nu}\partial^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}W_{i\mu}W_{j\nu}W_l^\mu W_m^\nu \end{aligned} \quad (1.43)$$

L'ultima riga contiene i termini di autointerazione, e descrive vertici trilineari e quadrilineari tra i bosoni di gauge. Questo è dovuto al fatto che i bosoni vettori  $W_i$  sono portatori della carica debole.

Considerando insieme i quattro campi bosonici, la Lagrangiana complessiva è dunque:

$$\mathcal{L}_{\text{bos}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} + \text{autointerazione } W_i \quad (1.44)$$

In termini di  $A^\mu$ ,  $W^\mu$ ,  $W^{\mu\dagger}$ ,  $Z^\mu$ , definendo  $F_{W\mu\nu} := \partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu$ , valgono le seguenti relazioni:

- $\frac{1}{4}(F_{1\mu\nu}F_1^{\mu\nu} + F_{2\mu\nu}F_2^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu}$
- $\frac{1}{4}(B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + F_{3\mu\nu}F_3^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu})$

Pertanto, non considerando le autointerazioni come parte della Lagrangiana libera bosonica, la possiamo riscrivere in termini dei campi fisici.

$$\mathcal{L}_{0_{\text{bos}}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_{W\mu\nu}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \quad (1.45)$$

### 1.2.2 Il meccanismo di Higgs

La teoria elettrodebole come teoria di gauge regge fintanto che non compaiono le masse dei fermioni e dei bosoni coinvolti. Inserendo i termini massivi si perde l'invarianza di gauge, e con essa la rinormalizzabilità. Il problema fu risolto per i bosoni con il *meccanismo di Brout-Englert-Higgs*, che introduce un nuovo bosone massivo associato alla rottura spontanea della simmetria  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . L'idea infatti è quella che la simmetria di gauge della teoria è valida ad alte energie, mentre risulta "nascosta" per valori confrontabili con le masse delle particelle. Un fenomeno analogo più intuitivo avviene per i domini magnetici dei materiali. Per temperature inferiori alla temperatura di Curie i momenti magnetici delle particelle costituenti il materiale si organizzano in domini magnetici orientati, rompendo quindi la simmetria generata dall'isotropia dello spazio. Invece superata tale temperatura, i momenti magnetici non si organizzano più, ma hanno orientazione casuale: nel primo caso si ha un campo magnetico non nullo, a differenza del secondo caso.

Tornando alla teoria dei campi, si consideri un campo che è un doppietto di isospin debole:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{pmatrix}$$

con  $\phi_a$  e  $\phi_b$  campi scalari. La particolarità di  $\Phi$  è il fatto di avere un valore di aspettazione nel vuoto non nullo. Questa caratteristica si può ottenere inserendo un termine massivo di segno opposto a quello convenzionale nella Lagrangiana che ne descrive il moto. Per garantire la presenza di uno stato fondamentale è però necessario considerare anche un termine di autointerazione, con costante adimensionale  $\lambda$ . In questo modo il minimo del potenziale non si ha per  $\Phi = 0$ , ma per un certo valore  $\Phi_0$ .

$$\mathcal{L} = [D^\mu \Phi(x)]^\dagger [D_\mu \Phi(x)] + m^2 \Phi^\dagger(x) \Phi(x) - \lambda [\Phi^\dagger(x) \Phi(x)]^2 \quad (1.46)$$

Sono state inserite le derivate covarianti  $D^\mu = \partial^\mu + \frac{i}{2}g\sigma_j W_j^\mu(x) + ig'YB^\mu(x)$  per far sì che la Lagrangiana del nuovo campo sia invariante per trasformazioni locali del gruppo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Il potenziale cui è soggetto il campo  $\Phi(x)$  ha un minimo per  $|\Phi_0| = m^2/\sqrt{2\lambda}$ . Senza perdita di generalità lo identifichiamo come

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad v := \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$$

Questo è il valore di aspettazione del campo nel vuoto, che risulta quindi non nullo. A questo punto espandiamo i campi  $\phi_a$  e  $\phi_b$  come perturbazioni intorno a  $\Phi_0$ .

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1(x) + i\eta_2(x) \\ v + H(x) + i\eta_3(x) \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

I campi  $\eta_i$  sono associati a particelle scalari prive di massa che si originano da una rottura spontanea della simmetria, in numero pari alla dimensione della simmetria rotta. In questo caso infatti sono tre, due per  $SU(2)_L$  e uno per  $U(1)_Y$ . Queste particelle sono previste dal teorema di Goldstone [?], che assicura la presenza di particelle a massa nulla nella teoria se il vuoto non è invariante sotto trasformazioni di simmetria. Tali particelle sono dette *bosoni di Goldstone*. Il campo  $H$  invece è il bosone di Higgs. Sostituendo l'espansione di  $\Phi(x)$  intorno al minimo  $\Phi_0$  nell'espressione della Lagrangiana (1.46) si ottengono numerosi termini di interazione tra i bosoni di gauge e i bosoni di Goldstone. Nella gauge unitaria i campi  $W^\pm$  e  $Z$  "assorbono" un bosone di Goldstone, diventando massivi. Il meccanismo è spiegato nello specifico per una teoria di gauge  $U(1)$  nell'Appendice A. Esplicitiamo il campo  $\Phi$  in questa particolare gauge.

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Il campo elettromagnetico  $A^\mu$  invece non subisce modifiche: il fotone deve rimanere a massa nulla. Questo significa richiedere che il vuoto sia neutro elettromagneticamente per  $\Phi$ . Poiché nella gauge unitaria  $\Phi$  è parametrizzato in modo tale che  $\phi_b$  è l'unica componente non nulla, dobbiamo imporre che

$$Q_{\text{em}}\phi_b = 0 \quad \rightarrow \quad (I_3 + Y)\phi_b = 0$$

Siccome  $\phi_b$  è un campo scalare di isospin  $-1/2$ , vale  $I_3\phi_b = -\frac{1}{2}\phi_b$ , da cui

$$\left(-\frac{1}{2} + Y\right)\phi_b = 0 \quad \rightarrow \quad Y\phi_b = \frac{1}{2}\phi_b$$

ovvero  $\phi_b$  deve avere ipercarica  $+1/2$ . Data la simmetria di  $U(1)_Y$  di  $\phi$ , segue che tutto il campo  $\phi$  ha ipercarica  $+1/2$ .

Vediamo dunque nella gauge unitaria come diventa il termine cinetico di  $\Phi$ .

$$\begin{aligned} D_\mu\Phi &= \partial_\mu + \frac{i}{2}g\sigma_j W_{j\mu} + ig'Y B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} (v+H)W_\mu^- \\ -\frac{v+H}{\sqrt{2}}(W_\mu^3 - g'/gB_\mu) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} + \frac{ig}{2}(v+H) \begin{pmatrix} W_\mu^- \\ -\frac{Z_\mu}{\sqrt{2}\cos\theta_W} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.49)$$

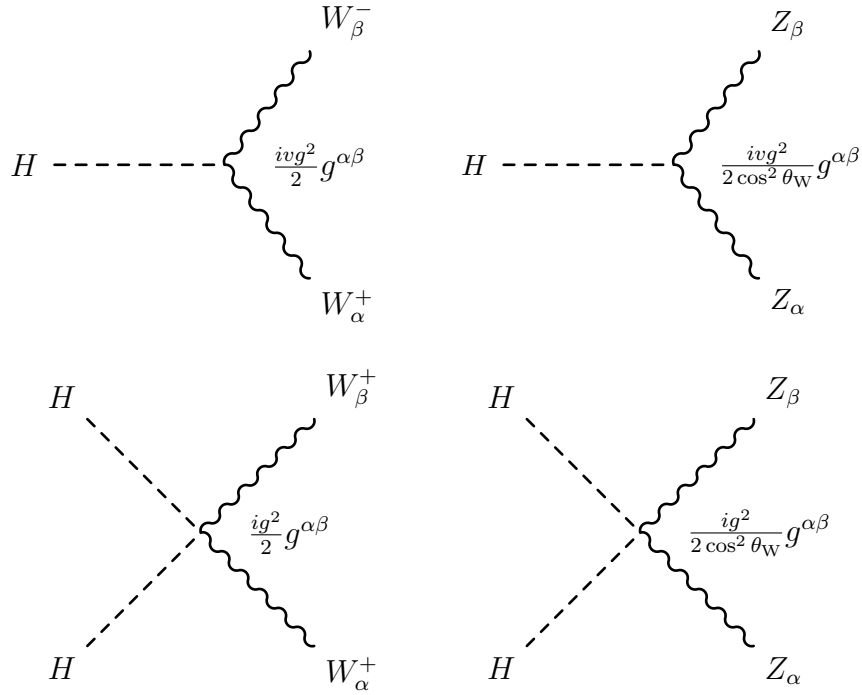
La quantità  $[D^\mu\Phi(x)]^\dagger$  si calcola facendo l'hermitiano coniugato del risultato appena ottenuto, e così il termine cinetico risulta:

$$(D^\mu\Phi)^\dagger D_\mu\Phi = \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H + \frac{g^2}{4}(v+H)^2(W_\mu^-W^{\mu+} + \frac{1}{2\cos^2\theta_W}Z_\mu Z^\mu) \quad (1.50)$$

Emergono quindi i termini di massa per i bosoni  $W^\pm$ ,  $Z$ :

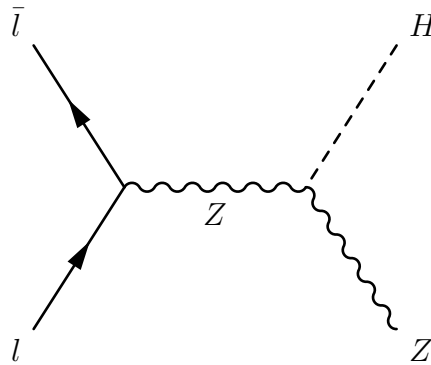
$$m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \quad m_Z^2 = \frac{g^2 v^2}{4\cos^2\theta_W} = \frac{m_W^2}{\cos^2\theta_W}$$

Il bosone di Higgs si accoppia con i bosoni, e si creano i nuovi vertici di interazione trilineari e quadrilineari, mostrati in 1.1.



**Figura 1.1.** Vertici trilineari e quadrilineari fra il bosone di Higgs e  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z$ .

In particolare i primi segnali dell'Higgs si sono riscontrati studiando il processo di "Higgs-strahlung" con il bosone  $Z$ .



**Figura 1.2.** Esempio di processo di Higgs-strahlung analizzato al LEP.

Infine vediamo cosa si ottiene dai termini di massa e autointerazione della Lagrangiana nella gauge unitaria:

$$m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda [\Phi^\dagger \Phi]^2 = \frac{m^2}{2} (v^2 + 2vH + H^2) - \frac{\lambda}{4} (v^4 + 4v^3H + 6v^2H^2 + 4vH^3 + H^4)$$



Ricordando la definizione di  $v$  si ha

$$\frac{1}{2}m^2v^2 - \frac{1}{2}m^2H^2 - \lambda vH^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4$$

Dunque emerge un termine di energia del vuoto,  $\frac{1}{2}m^2v^2$ , mentre il bosone di Higgs acquista una massa di  $m_H = m$ , osservata sperimentalmente. Inoltre sono presenti termini che descrivono vertici di autointerazione a tre e quattro bosoni di Higgs.

### 1.2.3 Accoppiamenti di Yukawa per i leptoni

Il meccanismo di Higgs permette di includere nella teoria le masse dei bosoni senza rompere la simmetria di gauge. Abbiamo visto però che anche i termini massivi per i leptoni sono problematici per la simmetria  $SU(2)_L$ . La questione è risolta utilizzando sempre il meccanismo di Higgs, ovvero accoppiando i campi leptonici con quello dell'Higgs. Vediamo i termini di interazione che rispettano la simmetria  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

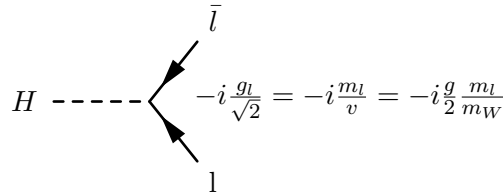
Dimostriamo che  $\bar{\Psi}_L^L \Phi \psi_R^R$  e hermitiano coniugato sono  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , infatti:

- Isospinore sinistrorso:  $I_3 = \pm\frac{1}{2}$ ,  $Y = -\frac{1}{2}$   $\rightarrow$   $\Psi_{L'\dagger} = \Psi_L^\dagger e^{-ig\sigma_j \frac{w_j(x)}{2} + ig' \frac{f(x)}{2}}$
- Doppietto di Higgs:  $I_3 = \pm\frac{1}{2}$ ,  $Y = \frac{1}{2}$   $\rightarrow$   $\Phi' = e^{ig\sigma_j \frac{w_j(x)}{2} + ig' \frac{f(x)}{2}} \Phi$
- Spinore destrorso:  $I_3 = 0$ ,  $Y = -1$   $\rightarrow$   $\psi_R' = e^{-ig' f(x)} \psi_R$

Utilizzando la gauge unitaria per il doppietto di Higgs calcoliamo esplicitamente il termine di accoppiamento yukawiano:

$$\begin{aligned} g_l \left( \bar{\Psi}_L^L \Phi \psi_L^R + h.c. \right) &= g_l \left( \bar{\psi}_L^L \frac{v + H}{\sqrt{2}} \psi_L^R + \bar{\psi}_L^R \frac{v + H}{\sqrt{2}} \psi_L^L \right) \\ &= g_l \bar{\psi}_L^L \frac{v + H}{\sqrt{2}} \psi_L^R = g_l \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_L^L \psi_L^R + \frac{g_l}{\sqrt{2}} H \bar{\psi}_L^L \psi_L^R \quad (1.51) \end{aligned}$$

Ecco quindi comparire un termine di massa per i leptoni, il primo, da cui  $m_l = \frac{g_l v}{\sqrt{2}}$ , e un accoppiamento tra leptoni e Higgs, il secondo. Vediamo il vertice a tre che ne deriva.





## Capitolo 2

# Neutrini

I neutrini osservati fino a oggi sono quelli che interagiscono tramite la forza debole, con i meccanismi illustrati precedentemente. È noto però che vanno incontro al fenomeno delle oscillazioni, trattato nello specifico nel Capitolo 3, la cui base teorica è la massa non nulla dei neutrini. Andiamo quindi a vedere come è possibile conferire una massa ai neutrini nell'ambito del Modello Standard, ma prima indaghiamo su queste particelle, partendo dal presupposto che siano fermioni di spin  $1/2$  a chiralità definita e massa nulla.

In quanto fermioni, soddisfano l'equazione di Dirac<sup>1</sup> senza il termine di massa

$$i\partial_t\psi = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\psi \quad (2.1)$$

dove  $\mathbf{p}$  l'impulso, e  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sono matrici hermitiane a traccia nulla e anticommutanti. Ricordiamo che queste matrici agiscono su uno spazio di Hilbert diverso da quello crono-spaziale degli operatori impulso e posizione.

Poiché le matrici  $\alpha$  sono solo tre, possiamo prendere le matrici di Pauli come riferimento:

$$\alpha_i = \pm\sigma_i \quad (2.2)$$

La scelta del segno è dovuta dal fatto che l'equazione di Dirac si riferisce all'equazione di Klein Gordon, che in pratica rappresenta la sua "quadratura".

$$i\partial_t \cdot i\partial_t\psi = i\partial_t(\pm\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\psi \Rightarrow -\partial_t^2\psi = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})^2\psi = |\mathbf{p}|^2\psi \quad (2.3)$$

da cui

$$-\partial_t^2\psi + \nabla^2\psi = 0 \quad (2.4)$$

dove abbiamo usato la definizione dell'operatore impulso nella rappresentazione di Schrödinger  $\mathbf{p} = -i\nabla$ ,

Consideriamo ora una soluzione generica in onde piane

$$\psi = \phi(p)e^{-ipx} \quad p = (p_0, \mathbf{p})$$

---

<sup>1</sup>L'equazione di Dirac per fermioni massivi ha invece il termine di massa  $m$ . La riportiamo già espressa nel formalismo delle matrici *gamma*.

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0$$

Ricordiamo inoltre che l'introduzione degli spinori  $\psi$  a quattro dimensioni è una necessità dovuta proprio al termine massivo.

dove  $u(p)$  è un vettore colonna a due componenti, detto spinore. Inserendola nell'equazione di Dirac in quadratura, si ottiene un vincolo sul quadrimpulso.

$$p_0 = \pm |\mathbf{p}|$$

Dunque  $p_0$  è l'energia, e come atteso, compaiono valori di energia negativa, che si associano alle antiparticelle. L'equazione di Dirac riscritta in termini di  $p_0$  e con le matrici di Pauli è detta *equazione di Weyl*, che si differenzia proprio per le dimensioni delle matrici che la compongono. Prendiamo il caso di energia positiva:

$$|\mathbf{p}|\psi = \pm \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\psi \quad (2.5)$$

Il  $\pm$  deriva dalla possibile scelta delle matrici  $\alpha$ . Da questa equazione si ottiene facilmente:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\psi = \pm\psi \quad (2.6)$$

Nel membro di sinistra è presente l'operatore di elicità, a meno di un fattore un mezzo. Questo è molto importante, perché significa che le soluzioni  $\psi$  sono autofunzioni dell'elicità, e la scelta del  $\pm$  per le matrici  $\alpha$  significa conferire elicità positiva (R) o negativa (L) alle particelle, e l'opposto alle antiparticelle.

## 2.1 Equazione di Weyl

Studiamo alcune caratteristiche dell'equazione di Weyl [?]. Scegliamo di analizzare quella corrispondente al segno negativo, in quanto dai dati sperimentali sappiamo che i neutrini sono levogiri e gli antineutrini destrorsi. Nondimeno è possibile descrivere altre particelle con l'equazione di Weyl con il segno positivo: il procedimento è analogo con quanto viene riportato di seguito per il caso fisico dei neutrini.

$$i\partial_t\psi = -\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\psi \quad (2.7)$$

### 2.1.1 Covarianza di Weyl

Vediamo se l'equazione (2.7) è scrivibile in forma covariante di Lorentz, caratteristica imprescindibile per una teoria quantistica e relativistica. Ricordiamo che per l'operatore impulso vale  $\mathbf{p} = -i\nabla$ , e denotiamo la coordinata temporale come  $x_0$ . Dunque si giunge a

$$i[\partial_0 + (-\boldsymbol{\sigma})\nabla]\psi = 0 \quad (2.8)$$

Definiamo

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, -\boldsymbol{\sigma})$$

e quindi si ottiene

$$i\sigma^\mu\partial_\mu\psi = 0 \quad (2.9)$$

che è l'equazione di Weyl in notazione covariante.

Vediamo come trasforma sotto Lorentz, indicando le quantità trasformate con un apice ':

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad (2.10)$$

con  $\Lambda_\nu^\mu$  la matrice delle trasformazioni di Lorentz, e  $S(\Lambda)$  una matrice da determinare che descrive le trasformazioni degli spinori sotto Lorentz.

Applichiamo queste relazioni all'equazione di Weyl.

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi(x) = \sigma^\mu \Lambda_\mu^{\nu'} \partial_{\nu'} S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') \quad (2.11)$$

Affinchè l'equazione sia relativisticamente covariante, la quantità appena trovata deve essere uguale all'equazione di Weyl che si ha nel sistema dopo la trasformazione di Lorentz. Ovvero vale l'uguaglianza

$$\sigma^{\mu'} \partial_{\mu'} \psi'(x') = \sigma^\mu \Lambda_\mu^{\nu'} \partial_{\nu'} S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') \quad (2.12)$$

Applichiamo  $S(\Lambda)$  da sinistra all'espressione (2.11) e notiamo che deve valere

$$S(\Lambda) \sigma^\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu^{\nu'} = \sigma^{\nu'} \quad (2.13)$$

che chiameremo *covarianza delle  $\sigma$* , in analogia con quanto si fa per le matrici gamma di Dirac.

Cerchiamo di definire la matrice di trasformazione per gli spinori di Weyl dalla covarianza delle  $\sigma$ . Per farlo consideriamo una trasformazione infinitesima:

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \epsilon_\nu^\mu$$

Sono stati introdotti la matrice  $M$ , antisimmetrica, e lo pseudo-tensore  $\epsilon$ , anch'esso antisimmetrico.

Dalla covarianza (2.13), si ottiene la definizione di  $M$ :

$$M^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} [\sigma^\mu, \sigma^\nu] \quad (2.14)$$

Sottolineamo che siccome  $\sigma^0 = \mathbb{1}$ ,  $M$  ha le componenti temporali tutte nulle. Dunque risulta che la matrice  $S$  è unitaria, poichè vale

$$S(\Lambda)^{-1} = S(\Lambda)^\dagger$$

Infatti:

$$[\sigma^0, \sigma^i] = 0 \quad [\sigma^i, \sigma^j]^\dagger = [\sigma^j, \sigma^i] = -[\sigma^i, \sigma^j]$$

Questo ha come conseguenza che l'equazione hermitiana coniugata di Weyl (2.15) è covariante, a differenza del caso dell'equazione di Dirac dove per ottenere la covarianza si definisce lo spinore aggiunto  $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$ .

$$\psi(x)^\dagger \sigma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu = 0 \quad (2.15)$$

La quantità  $\psi^\dagger \psi$  è dunque un invariante relativistico. Inoltre la corrente  $\psi^\dagger \sigma^\mu \psi$  è conservata, rendendo il prodotto  $\int d\mathbf{x} \psi^\dagger \psi$  una costante del moto. L'equazione di Weyl quindi induce una metrica nella quale il prodotto scalare è

$$(\psi_1, \psi_2) = \int d\mathbf{x} \psi_1^\dagger \psi_2$$

che è invariante di Lorentz.

### 2.1.2 Soluzioni dell'equazione di Weyl

Caratterizziamo le funzioni d'onda  $\psi$  che soddisfano l'equazione di Weyl (2.7). Consideriamo una generica onda piana, dove introduciamo lo spinore a due componenti  $w$ , un vettore colonna  $2 \times 1$ .

$$\psi(x) = \phi(p)e^{-ipx}$$

Inserendolo nell'equazione di Weyl si ottiene una relazione per lo spinore  $\phi$ .

$$[p_0 - (-\sigma\mathbf{p})]\phi(p) = 0 \quad \rightarrow \quad (p_0 + \sigma\mathbf{p})\phi(p) = 0 \quad (2.16)$$

Cerchiamo una soluzione non banale per  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \sigma\mathbf{p} &= \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Imponiamo che il determinante della matrice sia nullo

$$\det(\sigma\mathbf{p}) = 0 \quad \rightarrow \quad p_0^2 = |\mathbf{p}|^2 \quad \rightarrow \quad p_0 = \pm E$$

Quindi l'equazione ha soluzione non banale quando  $p_0$  è l'energia, positiva o negativa, associata al campo.

$$\begin{cases} (p_0 + p_3)a = -(p_1 - ip_2)b & \rightarrow & a = -\frac{p_1 - ip_2}{p_0 + p_3} \cdot b & (i) \\ (p_1 + ip_2)a = -(p_0 - p_3)b & \rightarrow & b = -\frac{p_1 + ip_2}{p_0 - p_3} \cdot a & (ii) \end{cases}$$

Le due equazioni non sono indipendenti, ma sono necessarie entrambe in quanto per alcuni valori di  $\mathbf{p}$  una o l'altra diventano critiche. Ad esempio se scegliamo la (i) come parametrizzazione per gli spinori a energia positiva, otteniamo una forma indeterminata per  $\mathbf{p} = -|\mathbf{p}|\hat{z}$ , e siamo costretti ad usare la (ii), ottenendo  $b = 0$ ,  $a = 1$ .

Consideriamo quindi  $\mathbf{p} \neq -|\mathbf{p}|\hat{z}$  e definiamo i seguenti spinori:

$$\varphi(p) = \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - ip_2}{E + p_3} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow p_0 = E \quad \varphi_-(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_1 + ip_2}{E + p_3} \end{pmatrix} \rightarrow p_0 = -E$$

Abbiamo posto  $a = 1$  nella prima e  $b = 1$  nella seconda per comodità, in quanto non modificano la definizione degli spinori se non moltiplicandoli per una costante.

Gli spinori sono tra loro ortogonali,  $\varphi^\dagger\varphi_- = 0$ , poichè corrispondono a soluzioni con diversa energia. Ora richiediamo che siano normalizzati.

$$\varphi^\dagger\varphi = \left( -\frac{p_1 + ip_2}{E + p_3}, 1 \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - ip_2}{E + p_3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{(E + p_3)^2} + 1 = \frac{2E}{E + p_3}$$

Lo stesso si ottiene per  $\varphi_-$ , perciò abbiamo:

$$\varphi(p) = \sqrt{\frac{E + p_3}{2E}} \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - ip_2}{E + p_3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_-(p) = \sqrt{\frac{E + p_3}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_1 + ip_2}{E + p_3} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Dunque le funzioni d'onda soluzioni dell'equazione di Weyl risultano essere:

$$\psi_+ = \varphi(p)e^{-ipx} \quad p_0 = E \quad \psi_- = \varphi_-(p)e^{-ipx} \quad p_0 = -E$$

Volendo uniformare la notazione del quadrimpulso, imponiamo  $p_0 = E$  anche nella soluzione d'energia negativa. Così però l'esponentiale non risulta scritta in maniera covariante, poichè l'esponente è  $iEx_0 + i\mathbf{p}\mathbf{x}$ . Per riottenere la scrittura covariante invertiamo l'impulso spaziale. Questa procedura è coerente con l'interpretazione delle antiparticelle come "lacune" nel mare di Dirac. Ovvero una particella a energia negativa con impulso  $\mathbf{p}$  corrisponde ad uno stato quantistico che ha la stessa energia, ma positiva, e tutti i numeri quantici invertiti, oltre all'impulso spaziale  $-\mathbf{p}$ . Nei diagrammi di Feynman infatti le antiparticelle hanno gli impulsi con direzione opposta a quella convenzionale, cioè vanno "a ritroso nel tempo".

$$\chi(\mathbf{p}) := \varphi_-(\mathbf{-p}) = \sqrt{\frac{E - p_3}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{p_1 + ip_2}{E - p_3} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Notiamo che per via dell'inversione dell'impulso cambiano le criticità: ora  $\chi$  non è definita per  $\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\hat{z}$ . Per coerenza con  $\varphi_-$  vale  $\chi(\mathbf{p} = p_3\hat{z}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Quindi le definizioni degli spinori:

$$\varphi(p) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E+p_3}{2E}} \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - ip_2}{E+p_3} \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{p} \neq -|\mathbf{p}|\hat{z} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{p} = -|\mathbf{p}|\hat{z} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\chi(p) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E-p_3}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{p_1 + ip_2}{E-p_3} \end{pmatrix} & \mathbf{p} \neq |\mathbf{p}|\hat{z} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{p} = |\mathbf{p}|\hat{z} \end{cases}$$

La generica soluzione dell'equazione di Weyl è data dalla combinazione lineare di  $\psi_+$  e  $\psi_-$ :

$$\psi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} [b_{\mathbf{p}}\varphi(\mathbf{p})e^{-ipx} + c_{\mathbf{p}}^*\chi(\mathbf{p})e^{ipx}] \quad (2.21)$$

### Quantizzazione dell'equazione di Weyl

Introduciamo la Lagrangiana che tramite il principio variazionale genera l'equazione di Weyl normale ed hermitiana coniugata.

$$\mathcal{L}(x) = \psi^\dagger(x)i\sigma^\mu\partial_\mu\psi(x) \quad (2.22)$$

Verifichiamo rapidamente che sia uno scalare di Lorentz.

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(x')i\sigma^{\mu'}\partial_{\mu'}\psi'(x') &= \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)i\sigma^{\mu'}\partial_{\mu'}S(\Lambda)\psi(x) \\ &= \psi^\dagger(x)i\sigma^\nu\Lambda_n u^{\mu'}\partial_{\mu'}\psi(x) = \psi^\dagger(x)i\sigma^\nu\partial_\nu\psi(x) \end{aligned}$$

Definiamo i momenti coniugati dalla Lagrangiana:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger(x) \\ \Pi_{\psi^\dagger} &= 0 \end{aligned} \right\} \mathcal{H}(x) = \Pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L}$$

Il momento coniugato alla  $\psi^\dagger$  risulta nullo, perché nella Lagrangiana compare solo una derivata temporale del primo ordine. Questo fatto impedisce di adottare la procedura della quantizzazione canonica, ma possiamo definire comunque l'Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  e imporre la quantizzazione sui campi, e vedere se risultano consistenti con la teoria. Imponiamo dunque le regole di anticommutazione seguendo l'oscillatore di Fermi<sup>2</sup>:

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \Pi_{\psi_\beta}(y) \right\}_{x^0=y^0} = i\delta_\alpha^\beta \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

ovvero

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y) \right\}_{x^0=y^0} = \delta_\alpha^\beta \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.23)$$

Dunque i coefficienti  $b_{\mathbf{p}}$  e  $c_{\mathbf{p}}$  diventano operatori che agiscono sullo spazio-tempo, nello specifico di distruzione di particelle e antiparticelle a impulso  $\mathbf{p}$ , definiti dalle relazioni

$$b = (\psi_+, \psi) \quad c^\dagger = (\psi_-, \psi)$$

da cui:

$$\left\{ b(\mathbf{p}), b^\dagger(\mathbf{q}) \right\} = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.24)$$

Lo stesso vale per gli operatori  $c, c^\dagger$ . In conclusione la soluzione generica all'equazione di Weyl dopo la quantizzazione è:

$$\psi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ b_{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{p}) e^{-ipx} + c_{\mathbf{p}}^\dagger \chi(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \quad (2.25)$$

.

---

<sup>2</sup>Per i fermioni non possono esistere due particelle nello stesso livello energetico. Quindi se consideriamo un oscillatore armonico con queste costrizioni, si ha

$$H = \omega a^\dagger a$$

Nell'oscillatore bosonico vale la regola di commutazione  $[a, a^\dagger] = 1$ , ma nell'oscillatore di Fermi imponiamo le anticommutazioni:

$$\left\{ a, a^\dagger \right\} = 1 \quad \{a, a\} = 0 \rightarrow a^2 = 0$$

In questo modo il numero di particelle  $N = a^\dagger a$  sul livello risulta corretto.

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger (1 - a^\dagger a) a = a^\dagger a - a^\dagger a^\dagger a a = N$$

dove si è usata l'anticommutazione e il fatto che  $aa = a^\dagger a^\dagger = 0$ .

Risulta quindi un'equazione in  $N$ :

$$N^2 = N \rightarrow N = 0, 1$$

che è quanto chiedevamo inizialmente, ovvero che in un livello vi fosse al più una particella. Quindi imponendo le regole di anticommutazione si descrivono particelle fermioniche.



### 2.1.3 Quantità conservate

La Lagrangiana di Weyl ammette diverse simmetrie continue. Per il teorema di Nöther a ognuna di esse è associata una quantità conservata. Definiamo il tensore energia-impulso  $T$ :

$$T_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} \partial_{\nu}\psi - \mathcal{L}g_{\nu}^{\mu} \quad (2.26)$$

con  $g^{\mu\nu}$  il tensore metrico dello spazio di Minkowsky, e il tensore momento angolare  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{J}^{\mu\nu}(x) = \int d\mathbf{x} \left[ x^{\mu}T^{0\nu} - x^{\nu}T^{0\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} M^{\mu\nu}\psi \right] \quad (2.27)$$

L'invarianza della Lagrangiana per traslazioni spazio-temporali comporta la conservazione del quadrimpulso, dall'equazione

$$\partial_{\mu}T_{\nu}^{\mu}(x) = 0 \rightarrow P^{\nu} = \int d\mathbf{x}T^{0\nu}(x)$$

con  $P^{\mu} := (H, P^i)$  l'operatore quadrimpulso.

$$H = \int d\mathbf{x}\mathcal{H}(x) = \int d\mathbf{p}E_{\mathbf{p}}(b^{\dagger}b - cc^{\dagger}) = \int d\mathbf{p}E_{\mathbf{p}}(b^{\dagger}b + c^{\dagger}c) \quad (2.28)$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzata la relazione di anticommutazione

$$c_{\mathbf{p}}c_{\mathbf{p}}^{\dagger} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}) - c_{\mathbf{p}}^{\dagger}c_{\mathbf{p}}$$

Così si ottiene una scrittura in cui gli operatori di annichilazione sono a destra, mentre quelli di creazione a sinistra. In questo modo è più facile eseguire i calcoli quando l'operatore in questione agisce su uno stato quantistico, in quanto prima distruggerà una particella e poi ne creerà una nuova. Ciò è particolarmente utile nei processi di interazione, quando conviene che gli operatori prima distruggano le particelle iniziali, e poi creino quelle finali, senza creare stati virtuali non necessari. Il termine divergente  $\delta(0)$  che emerge dalla procedura è una costante infinita che non modifica i risultati, e pertanto può essere eliminata. La procedura appena descritta è quella del *buon ordinamento*, e sarà seguita e omessa in tutte le definizioni che seguono.

$$P^i = -i \int d\mathbf{x}\psi^{\dagger}(x)\partial_i\psi(x) = \int d\mathbf{p}p^i(b^{\dagger}b + c^{\dagger}c) \quad (2.29)$$

Dall'invarianza per cambiamenti di fase si ottiene la conservazione della carica  $Q$ :

$$Q = \int d\mathbf{x}\psi^{\dagger}\psi = \int d\mathbf{p}(b^{\dagger}b - c^{\dagger}c) \quad (2.30)$$

Infine dall'invarianza per rotazioni si ottiene la conservazione del momento angolare totale. Dalla definizione di  $\mathcal{J}$  si possono distinguere due termini diversi, uno legato al prodotto vettoriale tra  $x$  e  $T$ , che possiamo riconoscere come il momento angolare, e l'altro costituito dal termine con  $M$ , che possiamo identificare con lo spin.

### 2.1.4 Spin ed elicità

Soffermiamoci sullo spin. Poiché stiamo trattando particelle a massa nulla, non è possibile studiare lo spin mettendoci nel sistema di riferimento nel quale le particelle sono a riposo. Possiamo però studiare l'elicità, che è la proiezione dello spin lungo la direzione del moto. In più eseguendo la proiezione in  $\mathcal{J}$  sopravvive soltanto il termine legato allo spin, in quanto il momento angolare lungo il moto è nullo<sup>3</sup>. Definiamo

$$S^{\mu\nu} = i \int d\mathbf{x} \psi^\dagger M^{\mu\nu} \psi \quad (2.31)$$

Consideriamo il caso di una rotazione sul piano  $x - y$ , e valutiamo quindi  $S^{12}$ :

$$\begin{aligned} M^{12} &= -\frac{1}{4}[-\sigma^1, -\sigma^2] = -\frac{i}{2}\sigma^3 \quad \rightarrow \quad iM^{12} = \frac{\sigma^3}{2} \\ S^{12} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \psi^\dagger \sigma^3 \psi \quad \Rightarrow \quad S^i = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \psi^\dagger \sigma^i \psi \end{aligned} \quad (2.32)$$

dove abbiamo definito l'operatore di spin  $S$  con le componenti:  $S^1$  riferito alla rotazione  $y - z$ ,  $S^2$  a quella sul piano  $z - x$  e  $S^3$  sul piano  $x - y$ .

### Elicità

Ora possiamo definire l'operatore elicità per spinori di Weyl,  $\sigma_p$ :

$$\sigma_p = \frac{\mathbf{S}\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \psi^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|} \psi \quad (2.33)$$

Andiamo a vedere come agisce questo operatore sugli spinori  $\varphi$ ,  $\chi$ , autofunzioni dell'energia. Usiamo anche  $E = |\mathbf{p}|$ .

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E} \varphi(\mathbf{p}) = -\varphi(\mathbf{p}) \quad \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E} \chi(\mathbf{p}) = -\chi(\mathbf{p})^4 \quad (2.34)$$

Così l'operatore elicità risulta:

$$\sigma_p = \frac{1}{2} \int d\mathbf{p} (-b^\dagger b - c c^\dagger) \quad (2.35)$$

che con il buon ordinamento diventa

$$\sigma_p = \frac{1}{2} \int d\mathbf{p} (-b^\dagger b + c^\dagger c) \quad (2.36)$$

Quindi l'equazione di Weyl descrive particelle e antiparticelle di spin 1/2 con elicità definita: neutrini levogiri e antineutrini destrorsi, come previsto in precedenza. La caratteristica peculiare delle soluzioni all'equazione di Weyl è che sono *necessariamente* ad elicità definita, proprietà che si perde considerando equazioni a più dimensioni.

<sup>3</sup>Se pensiamo al momento angolare definito come  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , risulta immediato come  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{L} = 0$ .

<sup>4</sup>Nonostante effettuando i conti sembri che lo spinore  $\chi$  abbia elicità negativa, il risultato è dovuto all'inversione dell'impulso. Il buon ordinamento nella definizione dell'operatore elicità scritto in termini degli operatori di creazione e distruzione risolve la questione, dando elicità positiva alle antiparticelle descritte da  $\chi$ .

## 2.2 Neutrini di Dirac

Ora proviamo a descrivere i neutrini come campi di Dirac [?], ovvero tramite spinori a quattro dimensioni, e vediamo se le soluzioni si raccordano con gli spinori di Weyl. Scriviamo la Lagrangiana e l'equazione di Dirac per fermioni a massa nulla:

$$\mathcal{L}\bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi \quad \rightarrow \quad i\cancel{\partial}\psi = 0 \quad (2.37)$$

dove usiamo la base delle matrici  $4 \times 4$   $\gamma$  di Dirac. Consideriamo una generica funzione d'onda con uno spinore  $u$

$$\psi = u(p)e^{-ipx}$$

Inserendola nell'equazione di Dirac si ottiene la relazione per lo spinore  $\cancel{p}u(p) = 0$ . Imponendo che il determinante della matrice sia nullo, si giunge alla stessa condizione ottenuta per l'equazione di Weyl, ovvero  $p_0 = \pm E$ . Dunque si segue lo stesso procedimento utilizzato per determinare le soluzioni di Weyl, ottenendo gli spinori per particelle e antiparticelle  $u, v$ , a quattro componenti:

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{\sigma_{\mathbf{p}}}{E} \varphi_r \end{pmatrix} \quad v_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{\mathbf{p}}}{E} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Le funzioni  $\varphi$  e  $\chi$  sono vettori colonna a due componenti indipendenti, normalizzate secondo il prodotto  $\chi_r^\dagger \chi_s = \delta_r^s$ . Infatti non è più possibile utilizzare la normalizzazione secondo il prodotto  $\bar{\psi}\psi$  indotto dall'equazione di Dirac a causa della massa nulla, perciò si utilizza il prodotto scalare  $\psi^\dagger\psi$ . I pedici  $r$  e  $s$  corrono sui possibili stati di spin delle particelle, quindi possono assumere solo due valori, 1 e 2. Vale infine  $u_r^\dagger u_s = \delta_r^s$ . Per il generico spinore  $w$  l'equazione del moto è

$$\cancel{p}w_r(\mathbf{p}) = 0 \quad \rightarrow \quad p_0\gamma^0 w_r = \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}w_r \quad (2.39)$$

### L'operatore di Spin

Brevemente discutiamo come si modifica il formalismo adottato per Weyl nel caso di Dirac. Dalla covarianza dell'equazione di Dirac si giunge alla definizione di  $S(\Lambda)$ , matrice di trasformazione degli spinori sotto Lorentz, che esprimiamo come in precedenza. La differenza è nella matrice  $M$ :

$$M^{\mu\nu} := \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.40)$$

Da qui l'operatore di spin  $\mathbf{S}$  segue la definizione (2.31), da cui

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \psi^\dagger \boldsymbol{\Sigma} \psi \quad (2.41)$$

dove le  $\boldsymbol{\Sigma}$  sono la generalizzazione delle matrici di Pauli in quattro dimensioni

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

### Operatore Elicità

La definizione (2.33) data in precedenza è sempre valida, però osserviamo che nel caso di Dirac a massa nulla si verifica una particolare condizione. Moltiplichiamo l'espressione (2.39) soddisfatta dal generico spinore  $w$  per la quantità  $\gamma^5\gamma^0$  da sinistra.

$$\gamma^5 p_0 w_r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \mathbf{p} w_r = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{p} w_r$$

Così possiamo scrivere

$$\gamma^5 w_r = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{p}}{p_0} w_r \quad (2.42)$$

Dunque per campi fermionici a massa nulla  $\gamma^5$  agisce sugli spinori come l'operatore di elicità.

#### 2.2.1 Soluzioni a elicità definita

Esiste una particolare scelta delle  $\phi_r$  e  $\chi_r$  tale che gli spinori  $u_r$  e  $v_r$  siano, oltre che soluzione all'equazione del moto, autofunzioni dell'operatore elicità. Caratterizziamo le componenti del generico  $w$ , in modo che questo si verifichi: chiediamo che sia autofunzione di  $\gamma^5$  con autovalori  $\pm 1$ .

$$\gamma^5 w(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \phi \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \phi \\ \zeta \end{pmatrix}$$

Vale quindi la relazione  $\phi = \pm \zeta$ , che nell'equazione di Dirac comporta:

$$\not{p} w(\mathbf{p}) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbb{1} p_0 & -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} & -\mathbb{1} p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \pm \phi \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad p_0 \phi = \pm \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \phi \quad (2.43)$$

Dove abbiamo ottenuto l'equazione di Weyl per  $\phi$ . Quello che accade quindi è che il campo di Dirac descrive particelle sinistrorse e destrorse, a seconda della scelta degli spinori bidimensionali che compaiono nella definizione di  $u$  e  $v$ . Infatti prendendoli uguali alle soluzioni all'equazione di Weyl descritte in (2.20), si ottengono particelle sinistrorse, mentre risolvendo la (2.7) con il segno  $+$  per  $\varphi$  e  $\chi$  si otterranno particelle destrorse. Dunque prendiamo entrambe le parametrizzazioni appena citate come possibili, definendo  $\varphi_+ := \varphi_{\sigma_p=+1}$  e  $\varphi_- := \varphi_{\sigma_p=-1}$  gli spinori bidimensionali a energia positiva con elicità positiva e negativa, e facciamo lo stesso per gli spinori bidimensionali a energia negativa:  $\chi_+ := \chi_{\sigma_p=+1}$ ,  $\chi_- := \chi_{\sigma_p=-1}$ <sup>5</sup>.

Studiamo a titolo di esempio i quadrispinori  $u_-$  e  $v_-$

$$u_r(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E} \varphi_r \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

<sup>5</sup>Per via dell'inversione dell'impulso si rischia di fare confusione, ma in questo caso facciamo in modo che

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E} \chi_+(\mathbf{p}) = -\chi_+(\mathbf{p})$$

scelta consistente con i risultati ottenuti nella definizione dell'operatore elicità.

Poiché sappiamo che per lo spinore a due dimensioni  $\varphi$  definito in (2.20) vale  $\frac{\sigma_{\mathbf{p}}}{E}\varphi = -\varphi$ , abbiamo che  $\varphi_- = \varphi$ .

$$u_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_- \\ -\varphi_- \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Per  $v_r(\mathbf{p})$  vale un discorso analogo, però bisogna tenere conto della parametrizzazione differente che si sceglie per definirlo. In ogni caso, partendo dalla definizione di  $v$  presente in (2.38), si vede come scegliendo  $\chi_+$  uguale allo spinore  $\chi$  in due dimensioni definito in (2.20), si ottengano antineutrini destrogiri.

$$\psi_R = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ b_{\mathbf{p}} u_+(\mathbf{p}) e^{-ipx} + c_{\mathbf{p}}^\dagger v_-(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \quad (2.46)$$

$$\psi_L = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ b_{\mathbf{p}} u_-(\mathbf{p}) e^{-ipx} + c_{\mathbf{p}}^\dagger v_+(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \quad (2.47)$$

La generica soluzione di Dirac è dunque una composizione di queste due,  $\psi = \psi_R + \psi_L$ . Pertanto prevede la compresenza di particelle destrogire e levogire, anche se assegnare elicità positiva alle particelle non risulta descrivere la fenomenologia dei neutrini e di alcuna particella finora osservata.

## 2.3 Neutrini di Majorana

Ettore Majorana nell'articolo [?] *Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone* del 1937 teorizzò i *fermioni di Majorana*. Egli trovò che non era necessario introdurre le soluzioni ad energia negativa nell'equazione di Dirac. Le particelle neutre possono essere antiparticelle di sè stesse. Tale situazione è facilmente spiegabile introducendo la rappresentazione di Majorana delle matrici gamma. Effettivamente in questa rappresentazione tutte le matrici sono immaginarie pure, e dunque l'equazione di Dirac non è più a coefficienti complessi bensì tutti immaginari. Perciò ammette anche soluzioni  $\psi$  reali.

### La rappresentazione di Majorana

Introduciamo brevemente le matrici  $\gamma$  nella rappresentazione di Majorana [?]. Queste saranno indicate con una tilde per differenziarle da quelle di Dirac, e ovviamente rispettano l'algebra di Clifford<sup>6</sup>. Le due rappresentazioni sono connesse da una trasformazione unitaria  $U$ . Infatti vale

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= U\gamma U^\dagger \\ U &= U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^0(1 + \gamma^2) \\ \tilde{\gamma}^0 &= \gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} & \tilde{\gamma}^5 &= \gamma^2\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \\ \tilde{\gamma}^1 &= \gamma^2\gamma^1 = i\Sigma^3 & \tilde{\gamma}^2 &= -\gamma^2 & \tilde{\gamma}^3 &= \gamma^2\gamma^3 = -i\Sigma^1 \end{aligned}$$

6

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

### 2.3.1 Soluzioni di Majorana

Consideriamo una generica funzione d'onda con uno spinore  $u$

$$\psi = u(p)e^{-ipx}$$

Inserendola nell'equazione di Dirac si ottiene la solita relazione per lo spinore,  $\not{p}u(p) = 0$ . Imponendo che il determinante della matrice sia nullo<sup>7</sup> affinché la soluzione sia non banale, anche in questo caso si arriva alla condizione

$$p_0 = \pm|\mathbf{p}|$$

Majorana però contrastava la teoria delle antiparticelle intese come "vuoti di energia negativa". Perciò prendiamo come unica possibilità il caso di energia positiva, ovvero  $p_0 = |\mathbf{p}| = E$ .

Studiamo il sistema di equazioni per spinori bidimensionali, che richiediamo essere normalizzati secondo il prodotto scalare  $\varphi^\dagger\varphi$ , con  $u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} i(p_1\sigma^3 - p_3\sigma^1)\varphi + (p_0 - p_2)\sigma^2\chi &= 0 & \rightarrow & \chi = \frac{-i(p_1\sigma^3 - p_3\sigma^1)}{(p_0 - p_2)\sigma^2}\varphi & (i) \\ (p_0 + p_2)\sigma^2\varphi + i(p_1\sigma^3 - p_3\sigma^1)\chi &= 0 & & & (ii) \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ottiene una relazione tra  $\chi$  e  $\varphi$ . Poiché compare una matrice a denominatore, moltiplichiamo da sinistra sopra e sotto per  $\sigma^2$  così da eliminarla. Dall'algebra delle matrici di Pauli si ottiene

$$\chi = \frac{p_1\sigma^1 + p_3\sigma^3}{p_0 - p_2}\varphi$$

Sostituendo nella seconda equazione si ottiene, in maniera più semplice, la condizione di soluzione non banale.

$$(p_0 + p_2)\sigma^2\varphi + i\frac{(p_1\sigma^3 - p_3\sigma^1)(p_1\sigma^1 + p_3\sigma^3)}{p_0 - p_2}\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2}{p_0 - p_2}\varphi = 0 \quad (2.48)$$

L'equazione di Dirac è una relazione tra spinori di quattro componenti. Le equazioni trovate per gli spinori  $\varphi$  e  $\chi$  sono reali<sup>8</sup> e a due dimensioni, e ammettono quindi

<sup>7</sup>In questo caso non si può utilizzare la semplificazione del determinante a blocchi, come nel caso di Dirac. Bisogna esplicitare tutti i conti. La matrice da affrontare è

$$\not{p} = \begin{pmatrix} ip_1 & -ip_3 & 0 & -i(p_0 - p_2) \\ -ip_3 & -ip_1 & i(p_0 - p_2) & 0 \\ 0 & -i(p_0 + p_2) & ip_1 & -ip_3 \\ i(p_0 + p_2) & 0 & -ip_3 & -ip_1 \end{pmatrix}$$

e il determinante, ottenuto con la regola di Laplace, è

$$[p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2]^2$$

<sup>8</sup>In realtà nel caso massivo questo non è più vero, poiché l'equazioni degli spinori sono complesse:

$$(\not{p} - m)u(p) = 0$$

due soluzioni indipendenti ciascuna, che richiediamo essere una base ortonormale dello spazio  $\mathbb{C}^2$ . Una possibile scelta è per esempio:

$$\varphi_1 = \chi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 = \chi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

In questo modo valgono le relazioni

$$\varphi_r^\dagger \chi_r = 0 \quad \varphi_r^\dagger \varphi_s = \chi_r^\dagger \chi_s = \delta_r^s \quad r, s = 1, 2$$

Tra l'altro imponiamo che, mentre la definizione degli spinori è arbitraria, purché normalizzata, queste relazioni siano vere per qualsiasi scelta di  $\varphi$  e  $\chi$ .

Come nel caso di Weyl, la parametrizzazione scelta in (i) non è definita per un valore dell'impulso, quando  $\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\hat{y}$ . In questo caso si utilizza la (ii), ottenendo  $\varphi = 0$  e  $\chi$  un vettore non nullo. Ora richiediamo la normalizzazione secondo il prodotto  $u^\dagger u$ , assumendo che  $\mathbf{p} \neq |\mathbf{p}|\hat{y}$ . Scriviamo  $E$  al posto di  $p_0$ .

$$u_r^\dagger u_r = \left( \varphi_r^\dagger, \varphi_r^\dagger \frac{p_1 \sigma^1 + p_3 \sigma^3}{E - p_2} \right) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{p_1 \sigma^1 + p_3 \sigma^3}{E - p_2} \varphi_r \end{pmatrix} = 1 + \frac{p_1^2 + p_3^2}{(E - p_2)^2} = \frac{2E}{E - p_2} \quad (2.50)$$

Definiamo quindi lo spinore soluzione dell'equazione  $\not{p}u = 0$ , normalizzandolo:

$$u_r(p) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E - p_2}{2E}} \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{p_1 \sigma^1 + p_3 \sigma^3}{E - p_2} \varphi_r \end{pmatrix} & \mathbf{p} \neq |\mathbf{p}|\hat{y} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_r \end{pmatrix} & \mathbf{p} = |\mathbf{p}|\hat{y} \end{cases} \quad (2.51)$$

A questo punto si esegue la procedura di quantizzazione, come visto in precedenza, e si giunge alla soluzione generica dell'equazione di Dirac, che però in questo caso risulta reale:

$$\psi(x) = \sum_r \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ b_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^\dagger u_r^*(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \quad (2.52)$$

La sommatoria che compare nell'espressione ottenuta corre sulle due possibili polarizzazioni. Stiamo dunque descrivendo una teoria in cui le particelle di spin 1/2 sono anche antiparticelle di sé stesse. Ovviamente poiché la soluzione è reale,  $\psi^\dagger$  e  $\psi$  non sono più indipendenti, e il numero dei gradi di libertà associato al campo è dimezzato rispetto al caso di Dirac.

### 2.3.2 Soluzioni a elicità definita

Anche in questo caso è possibile scegliere una base di  $\phi_r$  e  $\chi_r$  tale che le autofunzioni dell'energia  $u_r$  abbiano elicità definita. L'operatore elicità è equivalente a  $\tilde{\gamma}_5$ , poiché

dove ricordiamo che le matrici  $\gamma$  di Majorana sono immaginarie pure. Per esempio l'espressione di  $\chi$  in funzione di  $\varphi$  risulta

$$\chi = \frac{p_1 \sigma^1 + p_3 \sigma^3 + m \sigma^2}{p_0 - p_2} \varphi$$

la rappresentazione di Majorana è equivalente a quella di Dirac. La differenza sta nelle matrici di spin:  $\tilde{\Sigma} \neq \Sigma$ . Queste si calcolano partendo dall'operatore di spin (2.31).

$$\tilde{\Sigma}^1 = i\gamma^3 \quad \tilde{\Sigma}^2 = \Sigma^2 \quad \tilde{\Sigma}^3 = -i\gamma^1$$

Richiediamo ora che il quadrispinore  $u_r$  (2.51) sia autofunzione di  $\tilde{\gamma}_5$  con autovalori  $\pm 1$ , nel caso  $\mathbf{p} \neq |\mathbf{p}|\hat{y}$ :

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E-p_2}{2E}} \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{p_1\sigma^1 + p_3\sigma^3}{E-p_2} \varphi_r \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E-p_2}{2E}} \begin{pmatrix} \sigma_2 \varphi_r \\ \frac{p_1\sigma^1 + p_3\sigma^3}{E-p_2} \sigma_2 \varphi_r \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Da cui

$$\begin{aligned} \sigma^2 \varphi_r = \varphi_r &\quad \rightarrow \quad \varphi_{\sigma_{\mathbf{p}}=+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma^2 \varphi_r = -\varphi_r &\quad \rightarrow \quad \varphi_{\sigma_{\mathbf{p}}=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.54)$$

È importante notare che le due soluzioni a elicità opposta sono l'una il complesso coniugato dell'altra. Per completezza esplicitiamo anche le  $\chi_r$ , utilizzando anche qui la notazione  $\varphi_{\pm} = \varphi_{\sigma_{\mathbf{p}}=\pm 1}$ .

$$\chi_{\pm} = \varphi_{\mp}$$

Dunque la soluzione di Majorana all'equazione di Dirac non considera le soluzioni ad energia negativa, e porta alla teorizzazione di un fermione neutro antiparticella di sé stesso. Questo fatto implica che non vi è più conservazione del numero leptonic per i neutrini. Poiché per i leptoni la conservazione è valida, si può arrivare al compromesso della conservazione della parità del numero leptonic. Le soluzioni ottenute ammettono una base nella quale hanno anche elicità definita. In questo modo è possibile separare campi destrorsi e sinistrorsi:

$$\psi_R = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ b_{\mathbf{p}} u_+(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^\dagger u_-(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \quad (2.55)$$

$$\psi_L = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ b_{\mathbf{p}} u_-(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^\dagger u_+(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \quad (2.56)$$

Quindi  $\psi_R$  crea neutrini destrorsi e distrugge neutrini sinistrorsi, al contrario di  $\psi_L$ .

### Coniugazione di carica dei fermioni

La coniugazione di carica<sup>9</sup> è una trasformazione discreta che agisce sulle particelle, trasformandole nelle loro relative antiparticelle. Di conseguenza, applicata a un

<sup>9</sup>La coniugazione di carica è una trasformazione discreta che agisce nello spazio delle particelle, cui è associato l'operatore  $C$ , unitario ed hermitiano.

$$C^2 = \mathbb{1} \quad C^\dagger = C^{-1} = C$$

Nel caso fermionico agisce in maniera non banale sugli spinori: li trasforma nel corrispondente spinore dell'antiparticella, moltiplicandoli per una matrice  $C$  e facendone il complesso coniugato. Ad esempio  $u^c = Cv^*$ .

$$C = i\gamma^2$$

dove  $\gamma^2$  è espressa nella rappresentazione di Dirac. Notiamo che  $C$  è una matrice reale e simmetrica, tale che  $C^2 = \mathbb{1}$ .



generico campo, agisce sugli operatori di creazione e distruzione, trasformandoli in quelli relativi all'antiparticella associata. Nel caso di campi fermionici vale

$$\psi^c := C\psi C = e^{i\delta} \mathcal{C}\psi^\dagger \quad \rightarrow \quad \psi_\alpha^c = e^{i\delta} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \psi_\beta^\dagger$$

La matrice di coniugazione di carica  $\mathcal{C}$  agisce solo sugli spinori, e il prodotto avviene componente per componente per  $\psi^\dagger$ .  $e^{i\delta}$  è una fase non determinabile che compare sempre nei coniugati di carica. Nei conti successivi sarà omessa. Ricordiamo che per fermioni di Dirac  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  sono campi indipendenti. Nella teoria di Majorana il campo  $\psi$  è reale e autoconiugato, dunque abbiamo una condizione in più sulle sue componenti:

$$\psi = \psi^c = \mathcal{C}(\psi^\dagger)^T = \mathcal{C}\psi$$

I campi chirali  $\psi_{L/R}$  violano la simmetria sotto coniugazione di carica, infatti:

$$\psi_{L\alpha}^c = \mathcal{C}_{\alpha\beta} \psi_{R\beta}^\dagger$$

Di nuovo per particelle di Majorana vale invece la relazione

$$\psi_L^c = \mathcal{C}\psi_L = \psi_R$$

## 2.4 Massa ai neutrini

Il formalismo seguito fin ora non contempla la presenza di termini massivi. Da qui si giunge alle tre possibilità descritte, non distinguibili fisicamente. Notiamo anche che in questo modo neutrini levogiri e destrogiri sono completamente indipendenti, così come gli antineutrini (non presenti nella teoria di Majorana). Questo è molto importante in quanto l'interazione debole coinvolge solo i campi levogiri, mentre i campi destrogiri risultano *sterili*. La massa nulla implica anche la coincidenza tra elicità e chiralità. Discutiamo le conseguenze dell'introduzione della massa per queste particelle.

Innanzitutto la teoria di Weyl non è in grado di descrivere questo scenario, perciò la accantoniamo. Le teorie di Dirac e Majorana invece avendo quattro dimensioni sono capaci di includere la massa, ma ciò comporta che le componenti chirali non sono più indipendenti. Pertanto i due modelli divengono fisicamente distinguibili.

Ora vediamo come introdurre i termini massivi rimanendo nella teoria del Modello Standard.

### 2.4.1 Massa di Dirac

Il modo più semplice di conferire massa ai neutrini di Dirac è con un accoppiamento yukawiano con il bosone di Higgs. Tuttavia il bosone di Higgs  $\Phi$  introdotto in (1.47) per costruzione conferisce massa solo alle componenti inferiori dei doppietti di isospin  $\Psi$ , ovvero ai leptoni. Pertanto introduciamo un nuovo campo di Higgs,  $\tilde{\Phi}$ , in modo da poter conferire massa ai neutrini tramite la rottura spontanea della simmetria<sup>10</sup>.

$$\tilde{\Phi}(x) = i\sigma_2 \Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) - i\eta_3(x) \\ i\eta_2(x) - \eta_1(x) \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

<sup>10</sup>Lo stesso metodo viene utilizzato per conferire massa ai quark up, charm e top, anch'essi componenti superiori di doppietti di isospin.

Vediamo anche nel gauge unitario come diventa.

$$\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

In questo caso il nuovo campo di Higgs ha ipercarica  $Y = -1/2$ , ottenuto dalla richiesta che il valore d'aspettazione nel vuoto abbia carica elettrica nulla. Così possiamo costruire termini invarianti per  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  che includano i campi dei neutrini da aggiungere alla Lagrangiana del Modello Standard:

$$\begin{aligned} g_{\nu_l} \left( \bar{\Psi}_l^L \tilde{\Phi} \psi_{\nu_l}^R + h.c. \right) &= g_{\nu_l} \left( \bar{\psi}_{\nu_l}^L \frac{v + H}{\sqrt{2}} \psi_{\nu_l}^R + h.c. \right) = g_{\nu_l} \bar{\psi}_{\nu_l} \frac{v + H}{\sqrt{2}} \psi_{\nu_l} \\ &= \underbrace{\frac{g_{\nu_l} v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{\nu_l} \psi_{\nu_l}}_{\text{termine di massa}} + \underbrace{\frac{g_{\nu_l}}{\sqrt{2}} H \bar{\psi}_{\nu_l} \psi_{\nu_l}}_{\text{interazione con l'Higgs}} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Definiamo quindi  $m_{lD} = \frac{g_{\nu_l} v}{\sqrt{2}}$  la massa dei neutrini di sapore  $l$ .

Tuttavia sperimentalmente si osserva che l'accoppiamento tra il doppietto di Higgs e i neutrini è molto inferiore rispetto a quello dei loro leptoni associati, almeno di cinque ordini di grandezza. Tale asimmetria non è spiegabile, e pertanto si cercano possibilità che giustifichino la piccolezza della massa dei neutrini. Notiamo infine che termini massivi di Dirac accoppiano le componenti a chiralità diversa dei campi. Pertanto è possibile che stati levogiri transiscano in stati destrorsi e viceversa. Nell'ambito del MS significherebbe che neutrini levogiri generati in vertici elettrodeboli abbiano probabilità non nulla di divenire destrorsi, e quindi sterili. Stesso discorso, ma al contrario, vale per gli antineutrini.

### 2.4.2 Massa di Majorana

Nella teoria di Majorana vi sono relazioni aggiuntive tra le componenti chirali, che emergono dalla coniugazione della carica. Questo permette di scrivere termini massivi solamente in termini di un campo a chiralità definita. Dunque la Lagrangiana di massa per i neutrini potrebbe essere

$$\mathcal{L} = m_L \left( \bar{\psi}_L \psi_L^c + \bar{\psi}_L^c \psi_L \right) \quad (2.60)$$

e lo stesso si può scrivere per le componenti R. Dunque per i fermioni di Majorana è possibile avere due masse diverse per le componenti levogire e destrugire. Inoltre è possibile aggiungere un termine massivo alla Dirac, tale da rendere più articolata la Lagrangiana di massa per campi di Majorana.

$$\mathcal{L}_m = -m_D (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) - \frac{m_R}{2} (\bar{\psi}_R^c \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_R^c) - \frac{m_L}{2} (\bar{\psi}_L^c \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_L^c)$$

Ovvero in forma matriciale:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} \left( \bar{\psi}_L^c, \bar{\psi}_R \right) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R^c \end{pmatrix} + h.c. \quad (2.61)$$

Nell'ambito del Modello Standard la richiesta di simmetria  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  comporta l'annullamento del termine massivo levogiro, poichè i campi  $\psi_L$  fanno parte di un

doppio di isospin. Il termine  $m_R$  è consentito, in quanto le componenti chirali destrorse sono singoletti per  $SU(2)_L$ . Il termine di Dirac anche in questa teoria rappresenta un accoppiamento tra neutrini levogiri e destrorsi, entrambi attivi per l'interazione elettrodebole.

La Lagrangiana delle masse non risulta invariante per trasformazioni di fase, ovvero per il gruppo  $U(1)$ , per via dei termini proporzionali alle masse chirali. Da qui la possibilità di violare la conservazione del numero leptonico in un processo, finora mai osservata. Vediamolo per il termine chirale destrorso, analogo a quello levogiro.

$$\psi_R^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi_R + \bar{\psi}_R \mathcal{C} (\psi_R^\dagger)^T \rightarrow e^{i2\alpha} \psi_R^T \mathcal{C} \gamma^0 \psi_R + e^{-i2\alpha} \bar{\psi}_R \mathcal{C} (\psi_R^\dagger)^T \quad (2.62)$$

Un campo di ricerca attualmente in corso riguarda proprio questo fenomeno, che potrebbe avvenire per il *doppio decadimento  $\beta$  senza emissione di neutrini* [?], favorito rispetto a due singoli decadimenti  $\beta$  per alcuni nuclei atomici, quali il  $^{76}\text{Ge}$ . L'osservazione del processo, possibile grazie al termine di accoppiamento tra stati levogiri e destrorsi proporzionale a  $m_D$ , confermerebbe la teoria di Majorana per i neutrini.

### 2.4.3 Il meccanismo *see-saw*

La matrice delle masse presente in (2.61) non è diagonale, pertanto i campi utilizzati nella Lagrangiana non sono autostati della massa. Nell' Appendice B vi sono i passaggi dettagliati della diagonalizzazione della matrice. Consideriamo ora un caso particolare, ovvero

$$m_R \gg m_D \quad (2.63)$$

In questo caso gli autovalori di massa sono:

$$m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R} \quad m_2 \simeq m_R \quad (2.64)$$

Dunque si è giunti a una situazione in cui un campo ha una massa estremamente piccola,  $\psi_1$ , mentre l'altro,  $\psi_2$ , ne ha una molto grande; questo è il meccanismo dell'altalena, detto appunto *see-saw*: tanto più è pesante  $m_2$ , tanto più leggera sarà  $m_1$ .

Tra l'altro si può scegliere la matrice  $U$  in modo che i neutrini levogiri siano costituiti perlopiù da  $\phi_1$ , così da conferire loro una massa simile a  $m_1$ . Al contrario i neutrini destrorsi risultano avere una massa molto grande,  $m_R$ . In questo modo si spiega la fenomenologia dei neutrini attivi, che hanno masse estremamente piccole rispetto ai fermioni leggeri del Modello Standard. Il termine  $m_D$  è ottenuto con il meccanismo di Higgs, pertanto ci si aspetta che come ordine di grandezza sia vicino a quello dei leptoni, per esempio non lontano dai 511 keV dell'elettrone. Al contrario il termine  $m_R$  è inserito ad hoc nella teoria di Majorana, e non ha vincoli nel Modello Standard: può essere arbitrariamente grande, e ci si aspetta sia figlio di effetti ad altissima energia, non descritti dal MS. A titolo d'esempio, assumendo  $m_D \simeq 10^3 - 10^5$  eV e  $m_R \simeq 10^7 - 10^{11}$  eV si ottiene che  $m_1$  è più piccola dell'elettronVolt.

Il caso che abbiamo visto è semplice e illustrativo, in quanto coinvolge una sola famiglia di neutrini. È possibile considerare una formulazione ancora più generale dove si mescolano tutte e tre le famiglie con i corrispondenti neutrini destrorsi.



## Capitolo 3

# Oscillazione dei neutrini

Nel modello standard sono presenti i neutrini di tre sapori diversi: elettronico, muonico e tauonico. Tali particelle sono previste dalla teoria come fermioni chirali a massa nulla. È ormai appurato però che sono possibili dei mescolamenti tra i vari sapori dei neutrini. Infatti dai risultati di SuperKamiokande [?] nel 1998 si ebbe la conferma di tale fenomeno, e a questa seguirono numerosi esperimenti che confermarono con sempre maggiore precisione quella che prende il nome di *oscillazione dei neutrini*. Questa oscillazione è possibile solo se la massa dei neutrini è non nulla, in quanto rappresenta un grado di libertà in più delle particelle: il fenomeno delle oscillazioni si spiega elegantemente con il *principio di sovrapposizione degli stati quantistici*. Infatti si costruisce una teoria dove gli autostati della massa non coincidono con quelli del sapore. In pratica un neutrino di un determinato sapore viene interpretato come una sovrapposizione di più stati con massa diversa, che sono gli autostati dell'Hamiltoniana libera. Questi a loro volta sono composti da neutrini con diversi sapori in proporzioni fisse determinate sperimentalmente. Dunque se si avesse un fascio di neutrini autostati della massa la probabilità di avere un determinato sapore sarebbe indipendente dal tempo. Invece il fenomeno dell'oscillazione è dovuto al fatto che i neutrini si originano dai processi elettrodeboli come autostati del sapore, e pertanto come sovrapposizione di più stati a massa definita, aventi fasi relative che evolvono nel tempo. Le componenti di sapore diverso in un autostato del sapore sono sempre presenti, solo che possono trovarsi in una situazione di interferenza distruttiva per via delle fasi degli stati a massa definita che compongono il neutrino. Facendo riferimento al Modello Standard consideriamo una teoria fisica con tre autostati del sapore e altrettanti della massa. È conveniente descrivere il mescolamento tra stati quantistici con il formalismo matriciale:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U_{li} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

dove  $\nu_i$  con  $i = 1, 2, 3$  sono gli autostati della massa, mentre  $U_{li}$  è una matrice  $3 \times 3$ , unitaria, a coefficienti complessi.

Da studi cosmologici combinati ai dati sperimentali della fisica delle particelle [?] si è ottenuto un limite superiore alla somma delle masse dei neutrini, che risultano

molto piccole:

$$\sum_l m_{\nu_l} \lesssim 0.26 \text{ eV} \quad (3.2)$$

È inoltre noto il limite superiore per la particella più leggera fra queste:

$$m_{\nu_{\min}} \lesssim 0.086 \text{ eV}$$

### 3.1 Matrici unitarie di mescolamento

In generale una matrice  $N \times N$  unitaria a coefficienti complessi ha  $2N^2$  parametri,  $N^2$  coefficienti e  $N^2$  fasi. Per le normalizzazioni ci sono  $N$  vincoli sui coefficienti mentre per la condizione di ortogonalità se ne hanno  $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$  sui coefficienti e altrettanti sulle fasi, dunque:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Coefficienti: } N^2 - N - \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} \\ \bullet \text{ Fasi: } N^2 - \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \end{array} \right\} N^2 \text{ parametri indipendenti}$$

La Lagrangiana che descrive i campi dei neutrini è invariante per trasformazioni di fase, pertanto è possibile ridefinire le fasi dei campi, per ridurne il numero all'interno della matrice. Infatti questa compare sempre accoppiata ai campi, e dunque  $N$  fasi possono essere eliminate ridefinendoli. I termini massivi invece accoppiano tra loro  $N$  campi distinti, e risultano invarianti per trasformazioni di fase solo nella teoria di Dirac, non in quella di Majorana. Nel caso di neutrini di Dirac è possibile eliminare  $N - 1$  fasi relative. Dunque si hanno:

- Fasi fisiche Dirac:  $\frac{N(N+1)}{2} - 2N + 1 = \frac{N^2 - 3N + 2}{2} = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$
- Fasi fisiche Majorana:  $\frac{N(N+1)}{2} - N = \frac{N(N-1)}{2}$

Da qui in avanti tratteremo i neutrini come campi di Dirac. Le matrici di mescolamento di Majorana si ottengono da quelle di Dirac  $U$  moltiplicandole per matrici diagonali  $\Omega$  del tipo

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\alpha_{N-1}} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

dove  $\alpha_i$  con  $i = 1, \dots, N - 1$  sono le fasi di Majorana in più, e  $N$  è la dimensione della matrice di mescolamento  $U$ .

In conclusione per particelle di Dirac:

$$\hookrightarrow \text{Coefficienti: } \frac{N(N-1)}{2} \quad \text{Fasi fisiche: } \frac{(N-1)(N-2)}{2} \quad (3.4)$$

La matrice che stiamo considerando è unitaria, pertanto i coefficienti sono seni e coseni di angoli; per questo si parla di *angoli di mescolamento*.

### 3.1.1 Mescolamento a due sapori

Consideriamo il caso in cui si abbia mescolamento solo tra due sapori, ad esempio elettronico e muonico, e dunque si abbiano altrettanti autostati della massa. Caratterizziamo la matrice di mescolamento, che risulta essere  $2 \times 2$ .

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U_{li} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Seguendo le (3.4) si hanno: 1 angolo di mescolamento e 0 fasi. Quindi la  $U_{li}$  coincide con una matrice di rotazione intorno ad un angolo, quello di mescolamento.

$$U_{li} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

#### Probabilità di transizione

Vediamo nel dettaglio cosa succede ad un fascio di neutrini muonici con energia  $E$  che si propaga nel vuoto. L'evoluzione temporale è definita dall'Hamiltoniana libera relativistica, e dunque dall'equazione di Schrödinger:

$$|\nu_\mu(t)\rangle = e^{-iHt} |\nu_\mu\rangle = -\sin \theta e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \cos \theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle \quad (3.7)$$

Calcoliamo la probabilità di trovare un neutrino elettronico al tempo  $t$  a partire dal neutrino muonico:

$$\left| \langle \nu_e | \nu_\mu(t) \rangle \right|^2 = \left| -\sin \theta \cos \theta e^{-iE_1 t} + \sin \theta \cos \theta e^{-iE_2 t} \right|^2 = (\sin \theta \cos \theta)^2 \left| e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t} \right|^2$$

Moltiplichiamo all'interno del modulo quadro per  $e^{\frac{i(E_2 - E_1)t}{2}}$ , operazione ininfluente poiché il modulo elimina le fasi globali, e definiamo  $\Delta E := E_2 - E_1$

$$(\sin \theta \cos \theta)^2 \left| e^{-\frac{i\Delta E t}{2}} - e^{\frac{i\Delta E t}{2}} \right|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta E t}{2} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta (1 - \cos(\Delta E t))$$

da cui

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta (1 - \cos(\Delta E t)) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta E t}{2} \quad (3.8)$$

Dall'espressione precedente emerge che  $\sin^2 2\theta$  è l'ampiezza dell'oscillazione mentre  $\frac{\Delta E}{2}$  è la pulsazione.

Ovviamente la probabilità di avere un neutrino muonico al tempo  $t$  si ottiene da quella di transizione appena calcolata

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{(\Delta E t)}{2} \quad (3.9)$$

È possibile scrivere queste quantità evidenziando la dipendenza dalla massa delle particelle. Infatti, poiché la massa dei neutrini è molto piccola, vale

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \approx |\mathbf{p}| \left( 1 + \frac{m^2}{2|\mathbf{p}|^2} \right) \approx |\mathbf{p}| + \frac{m^2}{2E} \quad (3.10)$$

Per lo stesso motivo le due energie  $E_1$  e  $E_2$  sono molto vicine tra loro, e quindi

$$\Delta E \approx \frac{\Delta m^2}{2E} \quad (3.11)$$

dove  $\Delta m^2 := m_2^2 - m_1^2$ .

Così la (3.8) diventa

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E} t \right) \quad (3.12)$$

Da un punto di vista pratico e sperimentale è più comodo esplicitare la dipendenza dallo spazio percorso, piuttosto che lasciare la dipendenza temporale. Anche perché la velocità dei neutrini è, a meno di fattori correttivi molto piccoli, pari a quella della luce. Pertanto da  $t = L/v \approx L/c$ , dove  $L$  è lo spazio percorso, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \Delta m^2 [\text{eV}^2] \frac{L[\text{m}]}{4E[\text{eV}]} \frac{c}{\hbar} \right) \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left( 1.267 \Delta m^2 [\text{eV}^2] \frac{L[\text{m}]}{E[\text{MeV}]} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dunque si arriva all'importante conclusione che le transizioni di sapore sono di natura oscillante, e il periodo di tale oscillazione è legato alla differenza dei quadrati delle masse degli autostati della massa. Misurando la probabilità di transizione in un esperimento non è quindi possibile determinare la massa assoluta degli autostati, ma solo la differenza. Per di più non se ne può inferire il segno, in quanto nel calcolo della probabilità vi è la dipendenza dal quadrato del seno. Questo comportamento, dedotto dal caso semplice di mescolamento tra due sapori, è in realtà valido anche nei casi più complicati di mescolamento a tre sapori.

### 3.1.2 Mescolamento a tre sapori

Studiamo ora il caso in cui si abbia il mescolamento di neutrini a tre sapori. Il mescolamento è descritto dalla (3.1). Caratterizziamo la matrice  $3 \times 3$   $U_{li}$ .

Dalle (3.4) si hanno: 3 angoli di mescolamento e 1 fase fisica. Quindi si può pensare la  $U_{li}$  come combinazione di tre matrici di rotazione. Considereremo le matrici di rotazione di Eulero, utilizzate per descrivere le possibili rotazioni di un corpo nello spazio:  $R_{23} \cdot \widehat{R}_{13} \cdot R_{12}$ .

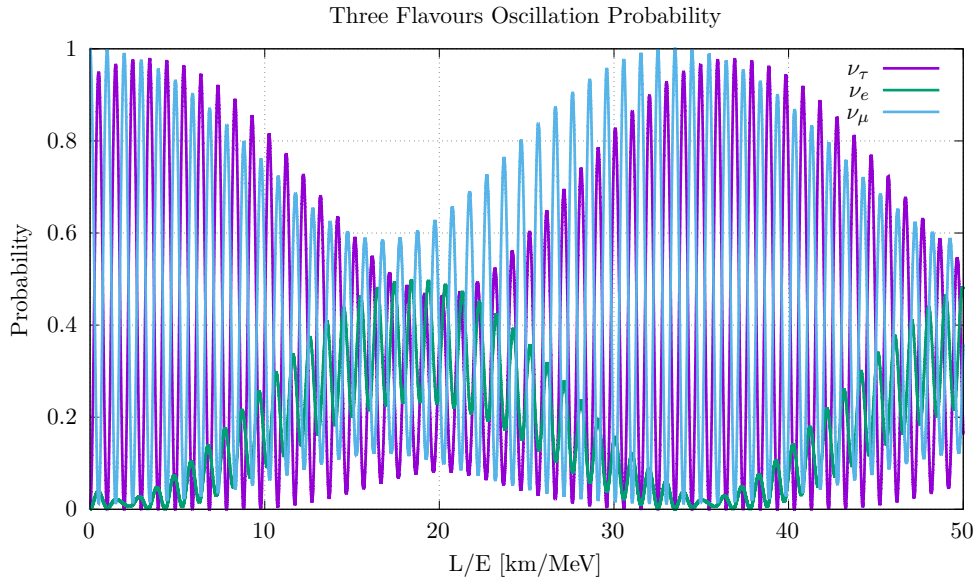
$$U := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}}_{\widehat{R}_{13} \neq R_{13} \text{ perchè ha anche la fase } \delta} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

dove  $c_{ij} := \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} := \sin \theta_{ij}$  e  $\theta_{ij}$  angoli di mescolamento, con  $i, j = 1, 2, 3$ .

Il procedimento fin qui utilizzato è quello di Pontecorvo, Maki, Nagasawa e Sakata, e per questo la matrice  $U$  così definita porta il loro nome.

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$





**Figura 3.1.** Oscillazioni di sapore nel modello a tre particelle, con neutrino muonico iniziale. La probabilità è espressa in funzione del rapporto  $L/E$ . I parametri di oscillazione utilizzati sono quelli della tabella 3.1.

Un analogo di questo fenomeno del mescolamento è presente nel settore dei quark, dove però la matrice, detta CKM [?] dai fisici N. Cabibbo, M. Kobayashi e T. Maskawa, è quasi diagonale, e dunque le oscillazioni hanno ampiezze ridotte rispetto al caso leptonic. Inoltre la presenza della fase è molto importante, in quanto comporta la violazione della simmetria CP. Nel settore adronico la fase è stata misurata e la violazione della CP si manifesta per esempio nei decadimenti dei kaoni [?], mentre per i neutrini ancora non si sono riscontrati processi che violano questa simmetria. Ad oggi sono in atto esperimenti votati alla misurazione indiretta della fase di Dirac, e più in generale alla ricerca di possibili violazioni di CP anche nel settore leptonic, come T2K [?]. Nella tabella 3.1 sono riportati i valori degli angoli di mescolamento e della fase nell'ambito della teoria di Dirac.

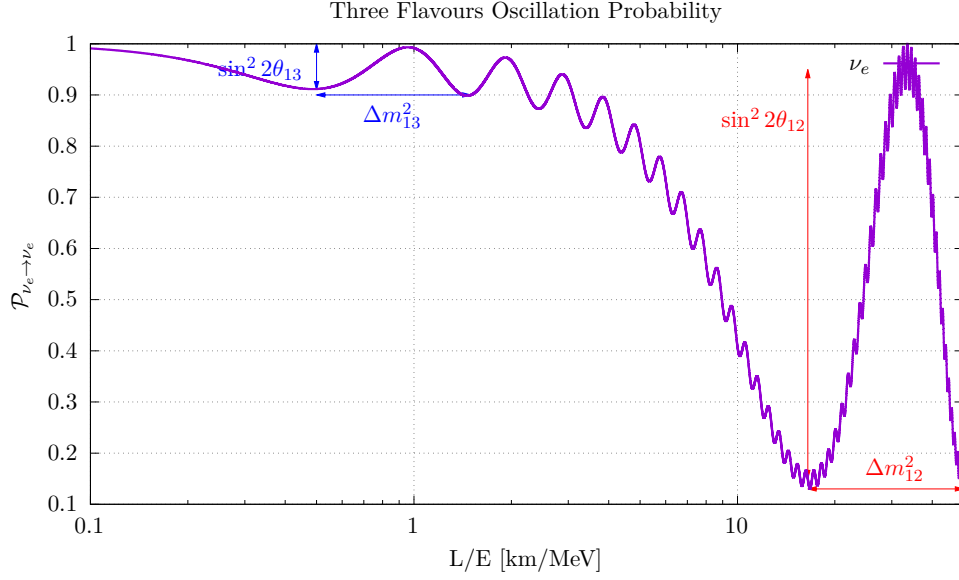
Parametri ottenuti da [?, ?] per la gerarchia normale

$\sin^2 \theta_{12}$	$0.304^{+0.013}_{-0.012}$
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.570^{+0.018}_{-0.024}$
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.02221^{+0.00068}_{-0.00062}$
$\delta_{CP}$	$-1.89^{+0.70}_{-0.58}$

**Tabella 3.1.** Parametri di mescolamento tra i tre neutrini attivi del Modello Standard.

### 3.1.3 Masse dei neutrini

Come detto in precedenza non si riesce ad avere un valore della massa delle singole specie di neutrino direttamente. Infatti studiando il mescolamento dei sapori si



**Figura 3.2.** Probabilità di sopravvivenza del neutrino elettronico in funzione del rapporto  $L/E$ . In evidenza gli effetti dei parametri di oscillazione  $\sin^2 2\theta$  e  $\Delta m^2$ . I valori utilizzati sono quelli della tabella 3.1.

può avere solo una stima della differenza in massa tra queste. Si definiscono  $\Delta m_{21}^2 := m_2^2 - m_1^2$  e  $\Delta m_{32}^2 := m_3^2 - m_2^2$ . Di seguito sono riportati i valori che si hanno dagli esperimenti [?], nel caso di gerarchia normale.

$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^2 &= (7.42^{+0.21}_{-0.20}) \times 10^{-5} \text{eV}^2 \\ |\Delta m_{32}^2| &= (2.517^{+0.026}_{-0.028}) \times 10^{-3} \text{eV}^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dalle definizioni di  $\Delta m_{21}^2$  e  $|\Delta m_{32}^2|$  si ricava anche  $|\Delta m_{31}^2| = \Delta m_{21}^2 + |\Delta m_{32}^2|$ , ma poiché  $|\Delta m_{32}^2| \gg \Delta m_{21}^2$  si ha che  $\Delta m_{32}^2 \approx \Delta m_{31}^2$ .  $\Delta m_{21}^2$  non necessita il modulo perché il suo segno è conosciuto.

In realtà non è ancora noto quale sia l'ordinamento delle masse dei neutrini. Infatti come detto in precedenza le oscillazioni nel vuoto permettono di inferire solo il modulo della differenza dei quadrati delle masse. Storicamente ci si riferisce alle due quantità (3.16) in base alla tipologia di sorgente utilizzata negli esperimenti:  $\Delta m_{21}^2$  è detta dei neutrini *solari*,  $\Delta m_{\text{sol}}^2$ , perché misurata utilizzando i neutrini elettronici prodotti dal Sole, mentre  $|\Delta m_{32}^2|$  è detta dei neutrini elettronici e muonici atmosferici,  $\Delta m_{\text{atm}}^2$ , e si riferisce allo studio dei prodotti delle reazioni dei raggi cosmici con le particelle dell'atmosfera terrestre. Il segno di  $\Delta m_{21}^2$  è stato individuato grazie all'oscillazione dei neutrini nella materia, che avviene in maniera differente rispetto a quella nel vuoto. Tale fenomeno è detto effetto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW). I neutrini solari sono prodotti nel nucleo solare, e attraversano gli strati più esterni della stella. I neutrini elettronici a differenza di quelli di altri sapori possono andare incontro ad un processo in più, ovvero lo scattering neutrino-elettrone con scambio di bosone carico. Quindi oltre al potenziale che avvertono i neutrini poiché immersi nella materia, si aggiunge un potenziale "elettronico" solo per questo sapore. Così l'oscillazione risulta sensibile alla densità di elettroni presenti. Inoltre vi sono

effetti più complessi dovuti al fatto che la densità elettronica nel Sole non è uniforme, ma cambia a seconda della distanza dal nucleo. Nel calcolo della probabilità di transizione in queste condizioni emerge un vincolo sull'energia,  $\Delta m_{21}^2 \cdot \cos 2\theta_{12} > 0$  che porta alla relazione  $m_2 > m_1$ , dato che  $\theta_{12} \simeq 33^\circ$  [?]. L'altra differenza di massa non è stata ancora risolta, e pertanto si ha il *problema delle gerarchie*, ovvero non si sa se l'autostato con massa  $m_3$  sia il più pesante o il più leggero dei tre. Nel primo caso si parla di *gerarchia normale*, mentre nel secondo di *gerarchia invertita*. L'esperimento T2K [?] svolge un'importante attività di ricerca anche in questo ambito.

## 3.2 Misurazione delle oscillazioni

Gli studi sul fenomeno delle oscillazioni dei neutrini sono portati avanti tramite due tipologie di esperimenti: di *scomparsa* e di *apparizione*.

Infatti se si ha a disposizione una sorgente<sup>1</sup> di neutrini con sapore definito, si rilevano le particelle prodotte dall'urto di questi su un bersaglio, solitamente nuclei atomici. Le particelle finali portano infatti l'informazione del sapore del neutrino coinvolto nel processo. Quindi, noto il flusso di neutrini, si può avere una stima dei segnali che si dovrebbero avere considerando che tutti i neutrini rimangano del sapore che hanno alla sorgente. Per le oscillazioni si ha invece che il numero dei neutrini del sapore di partenza risulta ridotto. In questo senso si ha la *scomparsa* dei neutrini. D'altro canto se si rilevano particelle finali associate a un altro sapore, significa che una porzione del flusso di neutrini incidenti ha cambiato sapore, andando poi incontro a un processo elettrodebole diverso. Allora si ha la *apparizione* di neutrini di sapore diverso da quello che hanno alla sorgente. Inoltre la misurazione può avvenire in maniera *diretta* o *indiretta*. Nel primo caso si individuano i percorsi delle particelle di interesse e dei prodotti di decadimento, per esempio nelle emulsioni, e dunque si osservano direttamente. Un esempio importante è quello del neutrino tau individuato nell'esperimento OPERA. Nel secondo invece si esegue una complessa analisi statistica partendo dalla misurazione di energia e impulso di particelle finali, come fatto per Super-Kamiokande [?, ?].

---

<sup>1</sup>Le sorgenti di neutrini che si utilizzano possono essere diverse. Principalmente ci sono i neutrini solari, di sapore elettronico poiché si conoscono i processi di fusione nel Sole nei quali sono prodotti, o quelli atmosferici, prodotti dall'interazione dei raggi cosmici con i nuclei delle particelle dell'atmosfera. Altrimenti si possono produrre fasci di neutrini artificialmente negli acceleratori di particelle. Anche le fissioni nucleari nei reattori producono antineutrini elettronici.

### Esperimenti *Long Baseline*

L'effetto delle oscillazioni dipende dall'energia del fascio di neutrini e dalla distanza percorsa dalla sorgente, come visto nel caso semplice del mescolamento a due sapori (3.13). Nell'espressione vi sono quindi due parametri relativi alla fisica dei neutrini, l'angolo di mescolamento e la differenza delle masse, mentre la distanza e l'energia del fascio possono essere variate. Poiché  $|\Delta m|$  è molto ridotto  $-10^{-5} - 10^0$  (neutrino sterile) eV- e l'energia dei neutrini utilizzati negli esperimenti non scende sotto il MeV, si ha che la distanza percorsa deve essere piuttosto grande per avere fenomeni di oscillazione significativi. Infatti per fasci di neutrini molto energetici ( $E > 1$  GeV) si fanno percorrere distanze molto grandi alle particelle, sulle centinaia di chilometri. Questo tipo di esperimenti è detto a *long baseline*. Per esempio l'esperimento OPERA all'INFN sul Gran Sasso, in funzione dal 2008 al 2012, analizzava un fascio di neutrini muonici prodotto al CERN di Ginevra. Il fascio di neutrini era prodotto dal decadimento in volo di  $\pi^+$  e  $K^+$  in  $\mu^+$  e  $\nu_\mu$ , con energia media di 17 GeV. La distanza tra la sorgente e OPERA è di 730 km, e l'esperimento era votato allo studio del canale di oscillazione  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  in modalità apparizione [?]. Vediamo dunque l'ordine di grandezza della differenza dei quadrati delle masse dei neutrini utilizzando questi valori numerici:  $L = 730$  km  $= 7.3 \times 10^5 / 1.973 \times 10^{-7} = 3.7 \times 10^{12}$  eV $^{-1}$ , e quindi il rapporto  $L/4E \simeq 2.2 \times 10^2$  eV $^{-2}$ . Così, considerando ottimale una situazione in cui l'argomento del seno al quadrato in (3.13) sia di ordine  $10^0$  rad, i valori misurabili con più precisione sono quelli corrispondenti a  $\Delta m^2 \simeq 10^{-3}$  eV $^2$ . Infatti il risultato dell'esperimento è proprio  $|\Delta m_{32}^2| = 2.7_{-0.6}^{+0.7} \times 10^{-3}$  eV $^2$ . I pedici sulla separazione delle masse indicano che si riferiscono al secondo e al terzo autostato della massa nella gerarchia normale.

### Esperimenti *Short Baseline*

Quando l'energia media del fascio di neutrini è minore, non è necessario che la distanza da percorrere sia dell'ordine delle centinaia di chilometri per avere oscillazioni, ma è sufficiente che sia dell'ordine delle centinaia di metri. Si parla in questo caso di esperimenti *short baseline*. Per esempio i neutrini prodotti dai reattori nucleari sono di energie dell'ordine delle decine di MeV. Questo però comporta una riduzione della sezione d'urto per neutrone, complicando quindi la progettazione delle rivelazioni. Tuttavia questa tipologia di esperimenti risulta molto utile per investigare altri possibili valori della differenza di massa, come nel caso del neutrino sterile. Numerosi esperimenti sono stati portati avanti con la finalità di indagare sulla possibile presenza di uno o più neutrini sterili con  $|\Delta m|$  dell'ordine dell'eV, come LNSD, MiniBooNE [?, ?, ?], e ICARUS-T600 sul fascio CNGS. Infatti la breve distanza percorsa dai neutrini sfavorisce le transizioni di sapore discusse in precedenza, isolando quelle dovute al neutrino sterile. Come esempio numerico riportiamo le specifiche dell'esperimento MiniBooNE: si è utilizzato un fascio di neutrini con energia media di 600 MeV, che percorrono 540 m prima di raggiungere il rivelatore. Dunque vale  $L/4E = 1.27 \cdot 540/600 = 1.143$  eV $^{-2}$ , così che l'oscillazione risulta massimale proprio per valori di  $\Delta m^2 \simeq 1$  eV $^2$ .

## Capitolo 4

# Neutrino sterile

Negli anni '90, LSND riscontrò un segnale inatteso di comparsa nel canale  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ . Il segnale non era compatibile con il modello a tre neutrini, ma fece nascere l'idea di un possibile neutrino sterile di massa  $\sim 1 \text{ eV}^2$ . Da allora un numero sempre maggiore di osservazioni ha dato esito a risultati che supportano questa teoria. Per questo si sono susseguiti molti esperimenti short baseline volti a portare prove dell'esistenza di differenze di massa su ordini di grandezza diversi da quelli delle oscillazioni del modello a tre sapori, che attesterebbero quindi la presenza di altri tipi di neutrino, come i *neutrini sterili*. È doveroso menzionare altre possibilità attualmente sotto indagine nel mondo scientifico per spiegare l'insieme di dati anomali raccolti. Esse sono più esotiche, come la violazione dell'invarianza di Lorentz e della simmetria CPT, la decoerenza tra stati quantistici [?, ?] e altre, che non sono prese in considerazione in questa trattazione.

### 4.1 Evidenze di neutrino sterile

#### LSND [?]

LSND, *Liquid Scintillator Neutrino Detector* di Los Alamos, è un esperimento che fu installato al *Los Alamos Meson Physics Facility*, LAMPF, per lo studio dei neutrini, ed operò dal 1993 fino al 1998. Era di tipologia short baseline, con una distanza tra sorgente e rivelatore di 30 m. Nello specifico, lo scopo era di cercare oscillazioni di neutrini a masse maggiori rispetto ai segnali provenienti dai neutrini solari e atmosferici, ancora non ben inquadrati. Questo perché un modello sulla materia oscura postulava l'esistenza di un neutrino con massa maggiore di 1 eV, che si credeva inserito nel modello a tre sapori. L'esperimento era progettato per lo studio in modalità di apparizione della transizione  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$  dal decadimento di  $\mu^+$  a riposo. Veniva impiegato un fascio di protoni con energia cinetica a 798 MeV su un bersaglio di acqua, con conseguente produzione di pioni. Molti dei pioni positivi si arrestavano, andando incontro alla catena di decadimenti

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

Anche i muoni positivi si arrestavano prima del decadimento, producendo quindi un flusso di  $\bar{\nu}_\mu$  ben noto (incertezze al 7%) con un intervallo in energia di 20 – 52.8 MeV. Una frazione assai ridotta di pioni e quindi di muoni decadeva in volo, causando irregolarità del flusso ( $\sim 1\%$ ). La catena di decadimenti originata dai pioni positivi, che costituisce una pericolosa fonte di rumore, produceva pochi  $\bar{\nu}_e$ , in quanto la maggioranza dei pioni e dei muoni negativi veniva assorbita dall'acqua. Il flusso di  $\bar{\nu}_e$  è calcolato e si attesta sui  $\sim 8 \times 10^{-4}$  rispetto al flusso di  $\bar{\nu}_\mu$ , nell'intervallo di energie in esame, ovvero 20 – 52.8 MeV. Il rivelatore di  $\bar{\nu}_e$  era invece costituito da tonnellate di olio CH<sub>2</sub> leggermente dopato, e dunque sensibile all'effetto Cherenkov delle particelle più leggere, ma anche alla scintigrafia per le particelle più pesanti, come i nucleoni. Così gli antineutrini andavano incontro al processo

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (4.1)$$

identificabile grazie all'effetto Cherenkov associato al positrone, cui segue la reazione di cattura neutronica da parte di un protone libero

$$n + p \rightarrow d + \gamma$$

riconoscibile dall'energia di 2.2 MeV del fotone prodotto. Il conto dei  $\bar{\nu}_e$  è stato fatto considerando la coincidenza di questi due segnali.

Dopo tre anni di attività con acqua come bersaglio (1993 – 1995) e altrettanti con metallo pesante (1996 – 1998), LNSD ha contato  $87.9 \pm 22.4 \pm 6.0$   $\bar{\nu}_e$ , interpretati come segnale in approssimazione di oscillazione tra due neutrini, con valori di differenza di massa compresi tra 0.2 – 10 eV<sup>2</sup>, con  $\sin^2 2\theta = 0.003$  e  $\Delta m^2 = 1.2$  eV<sup>2</sup> estrapolati dal miglior fit. I risultati furono interpretati come oscillazioni tra i neutrini "attivi" del MS, ma le ricerche successive scartarono questa possibilità, valutando l'esito dell'esperimento come evidenza del neutrino sterile.

### MiniBooNE [?, ?]

MiniBooNE, *Mini Booster Neutrino Experiment*, è un esperimento che entrò in azione al Fermilab di Chicago nel 2002 e continuò fino al 2019. Lo scopo principale era quello di proseguire la ricerca iniziata da LNSD, per cercare di comprendere e approfondire le anomalie emerse. Infatti anche in questo caso il campo di indagine per la differenza di massa  $\Delta m^2$  è centrato su  $\sim 1$  eV<sup>2</sup>, e lo studio venne fatto sulle transizioni  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  e  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ , dunque in modalità apparizione. L'esperimento, di tipo short baseline, utilizzava un fascio di protoni di 8 GeV sparati contro un bersaglio di berillio come sorgente di neutrini e antineutrini, ottenuti dal decadimento in volo di pioni e kaoni in uno spazio di  $\sim 50$  m, e conseguentemente dai muoni in quiete, arrestati da un apposito assorbitore. Il fascio che arrivava al detector, posto a 541 m di distanza, era composto da  $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\nu_e$  e  $\bar{\nu}_e$  in percentuali rispettivamente di 93.5%, 5.9%, 0.5% e 0.1% in modalità neutrini, e da 15.7%, 83.7%, 0.2% e 0.4% in modalità antineutrini. L'energia delle particelle rilevate va dai 200 ai 1500 MeV, con un picco sui 600-700 MeV per i neutrini e sui 400 MeV sugli antineutrini. Un intervallo così ampio di energia permette che si verifichino non solo i processi di Corrente Carica Quasi Elastici (CCQE), ma anche altri che hanno luogo ad energie più alte, come la produzione di risonanze e la diffusione profondamente anelastica.

I loro contributi sono rappresentati in 4.2. Solo eventi della prima tipologia sono presi in esame per lo studio delle oscillazioni, perché i più facilmente ricostruibili. Il rivelatore era costituito da una sfera di 12.2 metri di diametro riempita con 818 tonnellate di olio minerale puro  $\text{CH}_2$ , ovvero un rivelatore di luce Cherenkov. In questo caso i processi cui vanno incontro i neutrini e gli antineutrini elettronici e muonici sono

$$\begin{aligned}\nu_l + n &\rightarrow p + l^- \\ \bar{\nu}_l + p &\rightarrow n + l^+\end{aligned}$$

La rivelazione di queste interazioni avviene tramite l'identificazione del leptone carico uscente. Infatti il motivo per cui si contano solo neutrini con almeno 200 MeV è dovuto al fatto che è questo il valore di soglia per la produzione di un muone rivelabile per effetto Cherenkov.

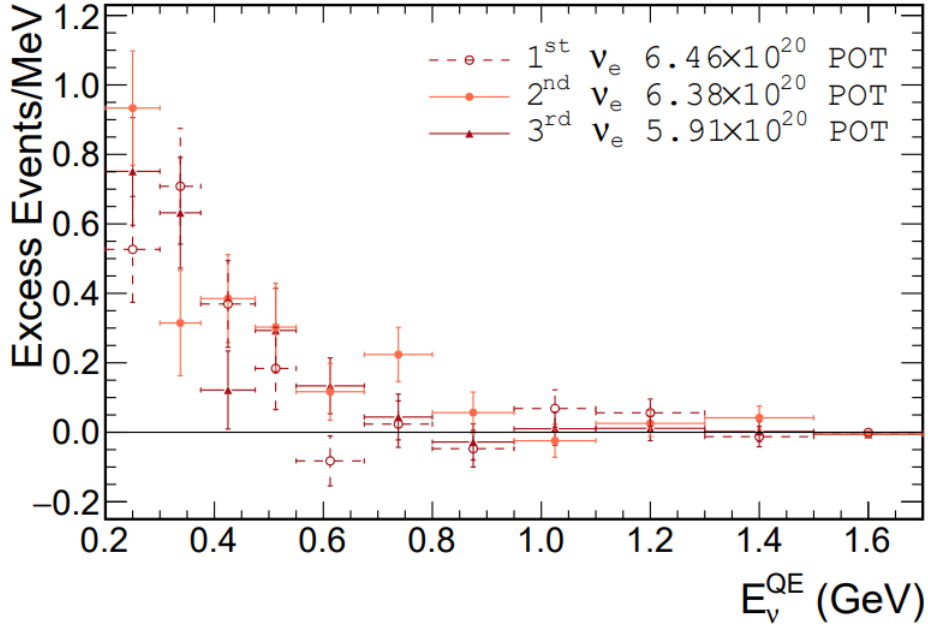
Nella modalità neutrini si osservarono 2870  $\nu_e$ , contro gli attesi  $2309.4 \pm 48.1(\text{stat.}) \pm 109.5(\text{sis.})$ , ovvero si ebbe un eccesso di  $560.6 \pm 119.6$  eventi rispetto all'ipotesi di assenza d'oscillazione, o un effetto a  $4.7\sigma$ . La stranezza del risultato riguarda la distribuzione dell'eccesso rispetto all'energia, visibile in 4.1: la discrepanza tra dati raccolti e attesi si ha per energie inferiori ai 475 MeV. Invece per energie superiori di 475 MeV, dove il rapporto  $L/E$  è simile a quello di LNSD, i valori ottenuti sono consistenti con l'ipotesi nulla.

I risultati ottenuti nella modalità antineutrini sono invece coerenti con quelli di LNSD, e consistenti con un eccesso di eventi rilevati per tutto l'intervallo di energie analizzato. In ogni caso il conto è di 476  $\bar{\nu}_e$  contro i  $399.6 \pm 20.0 \pm 20.3$  attesi, corrispondenti a un eccesso di  $78.4 \pm 28.5$  eventi.

Combinando i dati delle due tipologie di osservazione si giunge, in approssimazione di modello a due neutrini, a ottenere  $\Delta m^2 = 0.043 \text{ eV}^2$  e  $\sin^2 2\theta = 0.807$  come miglior fit, con una probabilità statistica del 12.3%. L'importante differenza tra le oscillazioni per neutrini e antineutrini può però portare a pensare che ci sia una violazione della simmetria CP, impossibile per un modello a due generazioni. È possibile infatti che considerando la presenza di più stati sterili si ottengano aderenze statistiche migliori ai dati raccolti: in una teoria con più neutrini sterili e con ulteriori  $\Delta m^2$  possono comparire fasi che permetterebbero la violazione della CP anche per questa tipologia di mescolamento.

### Anomalia dei Reattori Nucleari [?]

I reattori nucleari sono una sorgente pura di  $\bar{\nu}_e$ , e vengono utilizzati negli esperimenti a short baseline. La rivelazione degli antineutrini avviene sfruttando la solita reazione  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$  con un protone libero. Il flusso di particelle che attraversa il rivelatore si può calcolare perché si conoscono le reazioni di fissione con le conseguenti reazioni di decadimento che avvengono nel reattore, ma a volte è presente un ulteriore rivelatore posto in prossimità della sorgente per misurare il flusso anti-neutrinico prodotto. Da molteplici osservazioni si riscontra un'anomala riduzione del flusso di particelle rispetto a quello atteso, come si può vedere in (4.3), con una media di  $\bar{\nu}_{\text{oss}}/\bar{\nu}_{\text{att}} = 0.927 \pm 0.023$ . Una possibile spiegazione dell'anomalia risiede nello spettro e nel flusso di antineutrini prodotti, che negli ultimi anni hanno subito

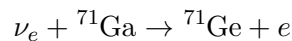


**Figura 4.1.** Eccessi di eventi in modalità neutrini in relazione alla loro energia. I dati sono riferiti a tre periodi distinti di attività di MiniBooNE: 2002 – 2007, 2015 – 2017, 2017 – 2019. L'immagine è presa da [?].

modifiche per studi più specifici su effetti come i deboli accoppiamenti magnetici e coulombiani e altri inizialmente trascurati [?]. Un notevole cambiamento si ebbe per esempio nel 2010 con una misura più precisa della vita media del neutrone, che aumentò le dimensioni dell'anomalia. Altro modo di spiegare l'incongruenza tra dati attesi e predetti è quella di introdurre il neutrino sterile. In questo caso, sempre nell'ipotesi di oscillazione a due neutrini, si otterrebbero  $\Delta m^2 = 0.5 \text{ eV}^2$  e  $\sin^2 2\theta \sim 0.14$  come parametri di oscillazione del miglior fit. La non oscillazione è esclusa al 99.8% ( $\sim 3\sigma$ ).

#### Esperimento al Gallio [?, ?]

Gli esperimenti GALLEX e SAGE sui neutrini solari usarono  $^{51}\text{Cr}$  e  $^{37}\text{Ar}$  come sorgenti per calibrare i rivelatori. Questi due atomi producono neutrini elettronici con determinate energie per cattura elettronica: 0.811 e 0.813 MeV per l'argon e 0.747, 0.752, 0.427 MeV per il cromo. Pertanto sono stati utilizzati per la ricerca di scomparsa nel canale  $\nu_e \rightarrow \nu_e$ . I neutrini prodotti sono poco energetici, perciò le sorgenti sono state ubicate direttamente all'interno dei rivelatori, di raggi  $R_{\text{GALLEX}} = 1.9 \text{ m}$  e  $R_{\text{SAGE}} = 5 \text{ m}$  e altezze  $H_{\text{GALLEX}} = 0.7 \text{ m}$  e  $H_{\text{SAGE}} = 1.5 \text{ m}$ . Con questa disposizione il rapporto  $L/E$  è dello stesso ordine di LNSD e MiniBooNE. Il nome dell'esperimento è dato dal fatto che la rivelazione dei neutrini avviene utilizzando il gallio, che va incontro alla reazione



Questo processo è ben noto quando la transizione avviene tra i due nuclei negli stati fondamentali, mentre presenta maggiori incertezze quando il germanio raggiunge il



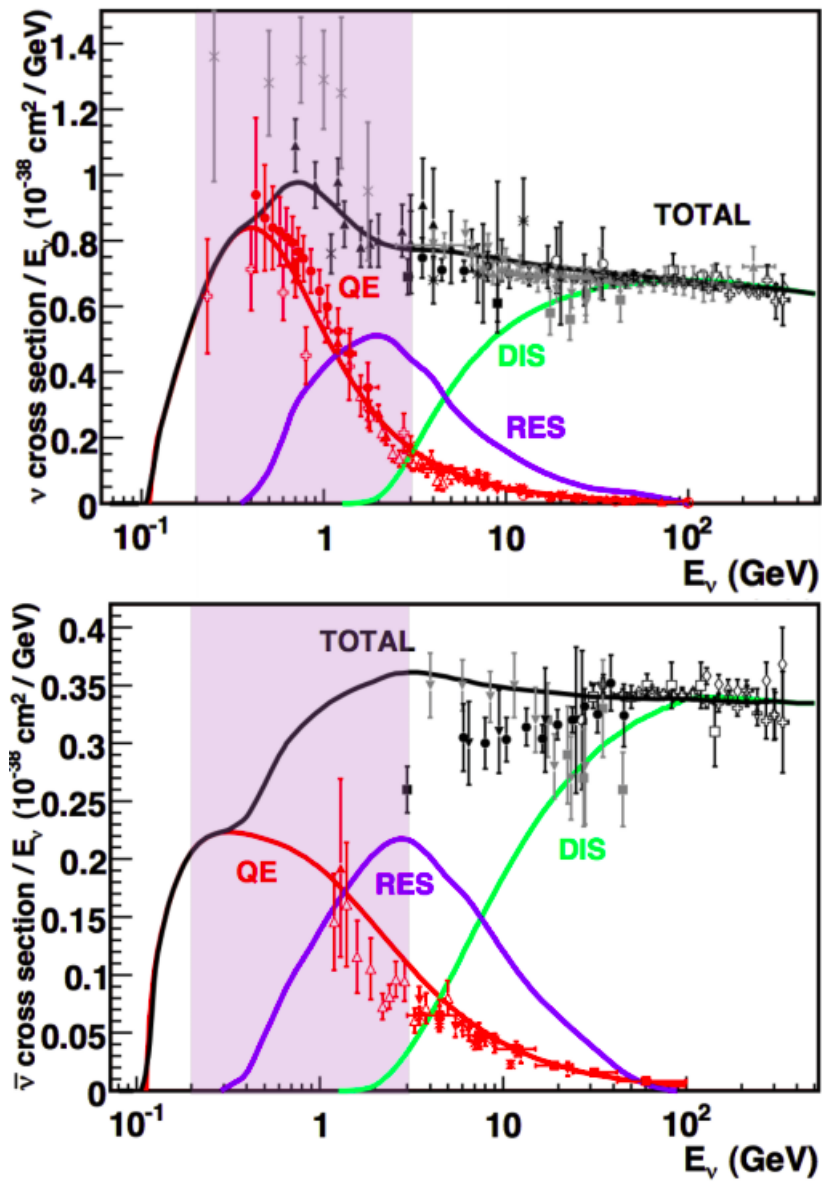
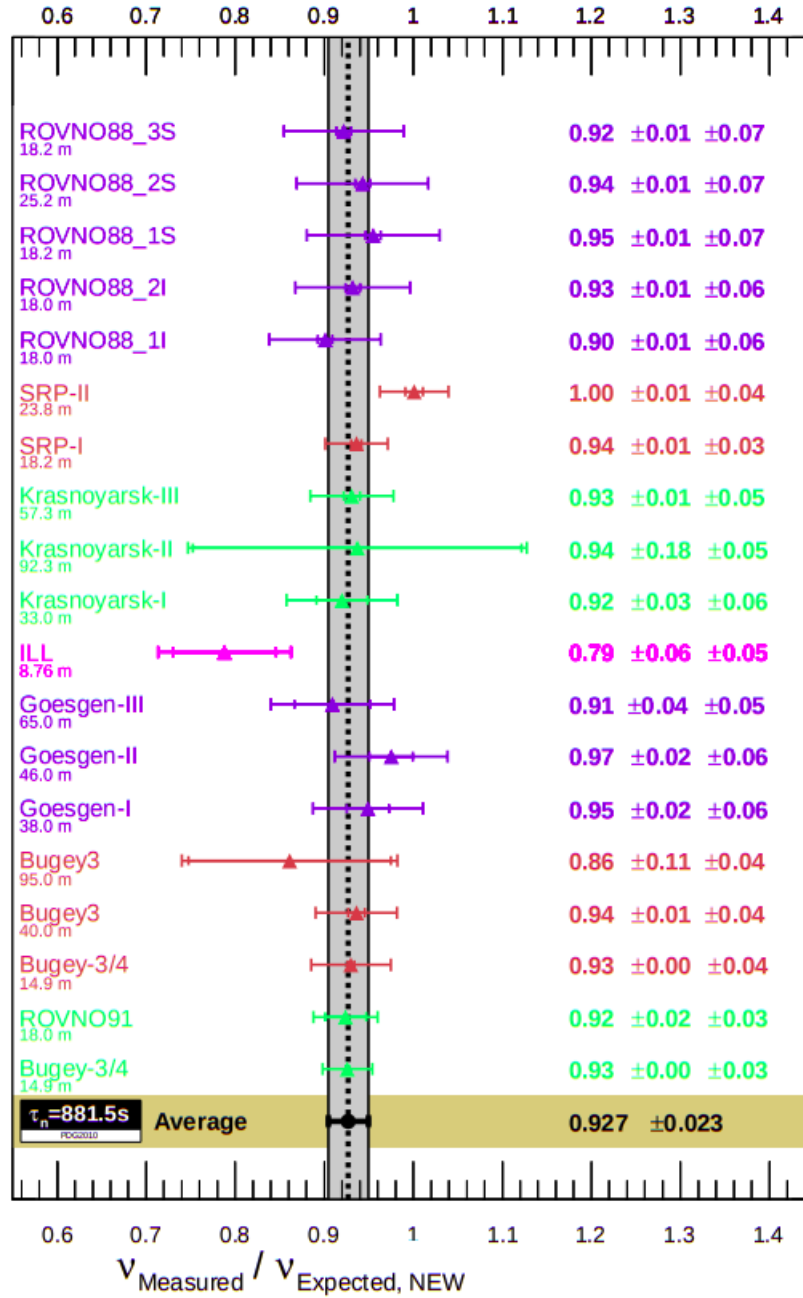


Figura 4.2. Sezione d'urto neutrini(antineutrino)-nucleone in base all'energia dei primi. In evidenza la regione rilevante per l'esperimento MiniBooNE. L'immagine è presa da [?].



**Figura 4.3.** Anomalia del flusso di antineutrini riscontrata in vari esperimenti short baseline di scomparsa. L'immagine è presa da [?].

primo e il secondo stato eccitato, cosa che avviene per un totale di  $\sim 5$  % dei casi. Nei risultati delle osservazioni emerge una netta mancanza di neutrini osservati: il rapporto tra conteggi effettuati e attesi è di  $R = 0.76_{-0.08}^{+0.09}$ , con una probabilità di risultare inferiore all'unità del 99.86 %. Nell'ipotesi di neutrino sterile, con modello a due neutrini, si ottengono come parametri di oscillazione  $\Delta m^2 = 2.24 \text{ eV}^2$  e  $\sin^2 2\theta = 0.50$  dal miglior fit, e in generale si ha che  $\Delta m^2 > 0.35 \text{ eV}^2$  e  $\sin^2 2\theta > 0.07$  al 99%.

## 4.2 Fenomenologia

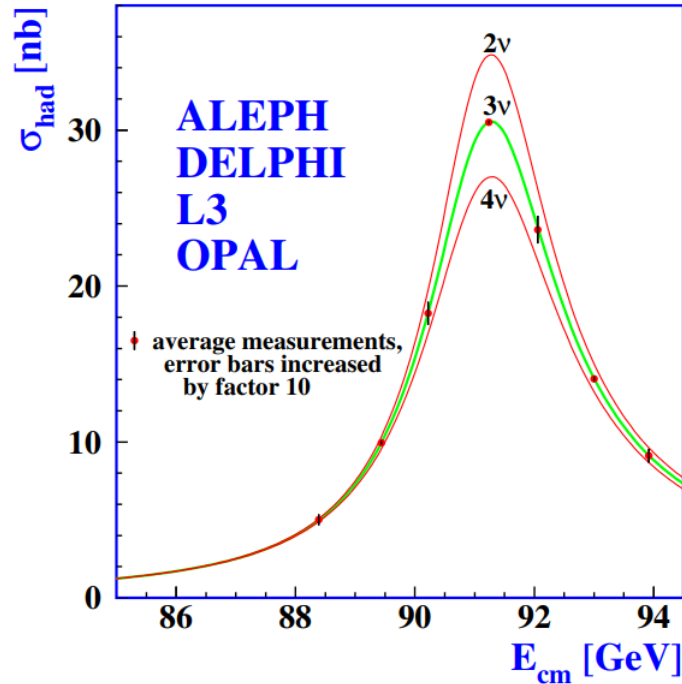
### 4.2.1 Perché *sterile*?

L'assenza dell'accoppiamento di questi tipi esotici di neutrino con i bosoni  $W$ ,  $W^\dagger$ ,  $Z$  è giustificata dai risultati ottenuti al Large Electron-Positron collider (LEP) [?], in funzione dal 1989 fino al 2000 al CERN. Facendo scontrare fasci di elettroni con fasci di positroni a energie sempre maggiori -fino a 209 GeV nel centro di massa durante l'ultimo anno- si ottennero moltissime informazioni sui bosoni di gauge mediatori dell'interazione debole, a supporto del Modello Standard. Lo studio dei decadimenti dello  $Z$  ha confermato, tramite i branching ratio, l'esistenza di tre famiglie leptoniche e di quark, e ha ricavato il numero di neutrini interagenti. Infatti lo  $Z$  ha tre canali di decadimento principali:

- $Z \rightarrow e^+ e^-$  con  $\Gamma_{Z \rightarrow e^+ e^-} = 3.363 \pm 0.004\%$
- $Z \rightarrow \mu^+ \mu^-$  con  $\Gamma_{Z \rightarrow \mu^+ \mu^-} = 3.366 \pm 0.006\%$
- $Z \rightarrow \tau^+ \tau^-$  con  $\Gamma_{Z \rightarrow \tau^+ \tau^-} = 3.370 \pm 0.008\%$
- $Z \rightarrow q \bar{q}$  con  $\Gamma_{Z \rightarrow q \bar{q}} = 69.91 \pm 0.06\%$
- $Z \rightarrow \nu \bar{\nu}$  con  $\Gamma_{Z \rightarrow \nu \bar{\nu}} = 20.00 \pm 0.06\%$

I valori dei branching ratio dei decadimenti in coppie  $l\bar{l}$  sono molto simili tra loro: questo conferma la *universalità debole per i leptoni*, ovvero che la costante di accoppiamento con il bosone  $Z$  è uguale per le tre famiglie leptoniche. Un risultato analogo si ha per i bosoni  $W$ . I detector presenti al LEP non rilevavano neutrini e antineutrini, ma era nota la vita media dello  $Z$ : per questo si quantificò un 20% di branching ratio mancante, dovuto a decadimenti invisibili, ovvero in neutrini e antineutrini. I valori ottenuti permettono anche una misura dell'angolo di Weinberg, in quanto la differenza di branching ratio tra leptoni e neutrini è proprio dovuta ai coefficienti diversi che compaiono nell'accoppiamento con la corrente neutra composta da queste particelle. Lo stesso discorso vale per i decadimenti in quark-antiquark, dove tra l'altro bisogna considerare che il decadimento nella coppia  $t\bar{t}$  non è energeticamente accessibile -il bosone  $Z$  ha massa  $m_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$ , mentre il quark top ha  $m_t = 173.1 \pm 1.3 \text{ GeV}$ .

Il numero di famiglie di neutrini, poiché appunto non si distinguono tra loro i vari decadimenti, è stato ricavato proprio dalla forma della risonanza dello  $Z$ , riportata in 4.4. Il valore ottenuto a partire dai dati presi al LEP e con correzioni fatte



**Figura 4.4.** Sezione d'urto  $\sigma(e^+ e^- \rightarrow Z \rightarrow f \bar{f})$  studiata al LEP in funzione dell'energia del centro di massa dei due fasci di elettroni e positroni.  $f$  e  $\bar{f}$  indicano fermioni e antifermioni rispettivamente. L'immagine è presa da [?].

successivamente sui dati [?] è di

$$N_\nu = 2.9963 \pm 0.0074$$

e conferma il fatto che esistano tre e tre famiglie soltanto di neutrini interagenti deboli. Ecco perché eventuali altri neutrini sono definiti *sterili*: non possono interagire debolmente, ma solo tramite la gravità.

#### 4.2.2 Mescolamento con il neutrino sterile

Dalla teoria non si hanno limitazioni nel numero di neutrini sterili che si possono aggiungere allo scenario. Abbiamo visto nella Sezione 2.4 che per spiegare la massa non nulla dei neutrini attivi è possibile introdurre dei campi fermionici destrorsi, appunto sterili, uno per ogni sapore. Questo però non deve essere un limite, nel senso che seguiremo un approccio più sperimentale, trattando i neutrini sterili come svincolati dall'essere necessariamente quelli destrorsi. Tra l'altro non ci sono restrizioni neanche sulla massa di questi, che può essere inferiore o superiore rispetto a quella dei neutrini attivi. I modelli vengono chiamati in modi diversi in base a queste caratteristiche. In generale esiste la convenzione per la quale un modello  $N^- + 3 + N$  consta, oltre ai tre neutrini attivi,  $N$  neutrini sterili di massa più grande e  $N^-$  meno massivi. In questa trattazione ci limitiamo a vedere i modelli con uno o due neutrini sterili più massivi, evidenziandone le proprietà che li caratterizzano.

Inoltre è facile generalizzare per gli altri modelli.

Da un punto di vista concettuale, i neutrini sterili non possono avere effetti importanti in molti fenomeni riguardanti i neutrini attivi, poiché questi sono già spiegati tramite modelli in buon accordo con i dati sperimentali. Un esempio è il modello solare, coerente con il numero di neutrini osservati considerando le oscillazioni tra neutrini attivi: l'introduzione di altri mescolamenti implica che il numero di neutrini solari osservati è minore di quello totale, creando tensione con il modello. Da qui la richiesta concreta che il mescolamento tra neutrini sterili e neutrini attivi sia piuttosto modesto, ovvero l'angolo di mescolamento deve essere piccolo.

### Il modello 3+1

Considerando la presenza di un neutrino sterile, è possibile generalizzare il discorso fatto per la costruzione della matrice di mescolamento per quattro sapori e quattro autostati della massa, ottenendo una matrice unitaria  $4 \times 4$  dipendente da 6 angoli e 3 fasi.

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} & U_{e4} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} & U_{\mu4} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} & U_{\tau4} \\ U_{s1} & U_{s2} & U_{s3} & U_{s4} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Il neutrino sterile è indicato con la lettera  $s$ , e si aggiunge l'autostato massivo  $\nu_4$ . Vediamo come si ottiene in questo caso la probabilità di ritrovare un neutrino nello stesso sapore iniziale, ad esempio muonico, dopo un tempo  $t$ .

$$\left| \langle \nu_\mu | \nu_\mu(t) \rangle \right|^2 = \left| \sum_i^4 |U_{\mu i}|^2 e^{-iE_i t} \right|^2 \quad (4.3)$$

### Il caso $m_s \gg m_i$

Dopo l'esperimento LSND gli esperimenti si concentrarono su possibili neutrini sterili con differenza di massa maggiore dell'elettronvolt rispetto a quelli attivi. In questo caso le masse dei neutrini attivi risultano molto più vicine tra loro rispetto a quella dello sterile, tanto da poter essere considerate approssimativamente uguali: i tre neutrini attivi diventano tre stati degeneri, e il modello 3+1 si descrive agilmente con le formule del modello a due neutrini, molto più semplici. Vediamo come si modifica il conto della probabilità di sopravvivenza del neutrino muonico (4.3).

$$\begin{aligned} \left| \langle \nu_\mu | \nu_\mu(t) \rangle \right|^2 &\simeq \left| \left( |U_{\mu 1}|^2 + |U_{\mu 2}|^2 + |U_{\mu 3}|^2 \right) e^{-iE_2 t} + |U_{\mu 4}|^2 e^{-iE_4 t} \right|^2 \\ &= \left| \left( 1 - |U_{\mu 4}|^2 \right) + |U_{\mu 4}|^2 e^{-i(E_4 - E_2)t} \right|^2 \\ &= \left( 1 - |U_{\mu 4}|^2 \right)^2 + |U_{\mu 4}|^4 + 2 \left( 1 - |U_{\mu 4}|^2 \right) |U_{\mu 4}|^2 \cos(E_4 - E_2)t \\ &= 1 - 4 \left( 1 - |U_{\mu 4}|^2 \right) |U_{\mu 4}|^2 \sin^2 \frac{\Delta E t}{2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

che equivale alla probabilità dell'equazione (3.9), dove definiamo

$$\sin^2 2\theta_{\mu\mu} := 4(1 - |U_{\mu 4}|^2)|U_{\mu 4}|^2 \quad (4.5)$$

Abbiamo usato  $\sum_i^4 |U_{\mu i}|^2 = 1$ , data dalla normalizzazione degli stati quantistici, e abbiamo approssimato  $E_1 \simeq E_2 \simeq E_3$ . A questo punto è possibile esprimere la probabilità ottenuta in funzione della differenza di massa tra gli stati, come fatto nella Sezione 3.1.1 nell'equazione (3.13).

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = 1 - \sin^2 2\theta_{\mu\mu} \sin^2 1.267 \Delta m^2 [\text{eV}^2] \frac{L[\text{m}]}{E[\text{MeV}]} \quad (4.6)$$

Analogamente si può calcolare la probabilità di trovare un neutrino di sapore elettronico a partire da uno muonico dopo un tempo  $t$ , che risulta essere

$$\left| \langle \nu_e | \nu_\mu(t) \rangle \right|^2 \simeq \sin^2 2\theta_{e\mu} \sin^2 \frac{\Delta E t}{2} \quad (4.7)$$

con

$$\sin^2 2\theta_{e\mu} := 4|U_{e4}|^2|U_{\mu 4}|^2 \quad (4.8)$$

Nel conto bisogna utilizzare la relazione di ortogonalità tra autostati del sapore diversi. Nello specifico vale infatti  $\sum_i^4 U_{ei}^* U_{\mu i} = 0$ .

In caso di degenerazione si perdono delle caratteristiche della matrice  $4 \times 4$ : nella teoria di Dirac vengono meno gli effetti della presenza di fasi, e dunque la possibilità di riscontrare violazioni della CP. Questo significa che il mescolamento con il neutrino sterile deve dare gli stessi effetti per neutrini e antineutrini. Nella teoria di Majorana invece nel mescolamento a due stati compare una fase, e dunque è possibile riscontrare violazioni di CP anche in questo scenario.

### Il modello 3+2

Questo modello prevede la presenza di due neutrini sterili massivi. La matrice che descrive il mescolamento in questo scenario è  $5 \times 5$ , e quindi è caratterizzata da 10 angoli e 6 fasi.

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} & U_{e4} & U_{e5} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} & U_{\mu 4} & U_{\mu 5} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} & U_{\tau 4} & U_{\tau 5} \\ U_{s11} & U_{s12} & U_{s13} & U_{s14} & U_{s15} \\ U_{s21} & U_{s22} & U_{s23} & U_{s24} & U_{s25} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Sono introdotti gli stati massivi  $\nu_4$  e  $\nu_5$ , mentre  $s_1$  e  $s_2$  sono gli stati corrispondenti ai due neutrini sterili. Anche in questo caso la probabilità di sopravvivenza di un neutrino con sapore definito si ottiene seguendo la (4.3), dove però la sommatoria corre su cinque stati anzichè quattro.

### Il caso $m_s \gg m_i$

Considerando i tre autostati della massa come degeneri, la trattazione si semplifica, in quanto il modello si può descrivere tramite le equazioni di un modello a tre neutrini. La grande differenza di questo scenario rispetto al precedente è la possibilità di avere un'asimmetria tra neutrini e antineutrini, dovuta alla presenza di una fase. Da qui la sua importanza.

**Il modello 3+3**

Per completezza menzioniamo anche il modello 3+3. Questo ha il vantaggio di avere un collegamento con il MS, nel meccanismo dell'altalena visto nella Sezione 2.4.3. Certo l'adozione di un modello del genere comporta l'aggiunta di numerosi termini ignoti, che lo rendono più difficile da affrontare dal punto di vista sperimentale.





## Capitolo 5

# Correnti Adroniche

Moltissimi processi di interazione tra particelle riguardano gli adroni. Questi non sono particelle elementari, come noto dalla QCD, bensì qualcosa di più complesso: un insieme di quark e gluoni scambiati tra questi. Si riscontrano dunque delle difficoltà teoriche a trattare un vertice di interazione che coinvolge adroni. È però possibile distinguere tre casistiche diverse in base alle energie in gioco nel processo. Consideriamo una collisione tra una particella e un adrone, mediata dal bosone relativo all'interazione che stiamo analizzando. Il bosone interagisce con l'adrone in maniera differente in base all'impulso trasferito. Infatti, per il dualismo onda-particella di De Broglie, al bosone mediatore è associata una lunghezza d'onda  $\lambda$ , dalla relazione

$$\lambda = \frac{h}{k} \quad (5.1)$$

dove  $h$  è la costante di Planck ( $6.626 \times 10^{-34} Js$ ) e  $k$  è l'impulso della particella. Poiché gli adroni hanno dimensione finita, possiamo confrontare la lunghezza d'onda  $\lambda$  con le dimensioni dell'adrone coinvolto o dei quark. Un adrone ha dimensione di circa  $10^{-15}m$ , mentre per i quark si stima una dimensione inferiore ai  $10^{-18}m$ .

### 5.1 Regimi di interazione

#### Adrone puntiforme

Quando il bosone mediatore è poco energetico, è possibile associargli una lunghezza d'onda molto maggiore delle dimensioni dell'adrone coinvolto. In questo caso l'adrone si comporterà come una particella puntiforme, e dunque è possibile trattarlo come una particella elementare. Ad esempio protoni e neutroni possono essere considerati come fermioni di Dirac a spin  $1/2$ , mentre i pioni come bosoni scalari di Klein-Gordon.

#### 5.1.1 Diffusione anelastica

Nei processi in cui l'adrone bersaglio raggiunge stati eccitati si parla di diffusione anelastica. Si possono distinguere due tipologie di processi che occorrono in questo caso, dalla diversa fenomenologia. Quando il bersaglio raggiunge uno stato eccitato, descrivibile come una singola particella, si parla di *produzione di risonanze* (RES). Ad energie maggiori invece il bosone mediatore può frammentare il bersaglio nelle

sue componenti elementari, dando origine al processo di diffusione profondamente anelastica, *deep inelastic scattering* (DIS): si ha il fenomeno di adronizzazione, nel quale lo stato finale del processo è costituito da più particelle adroniche.

Tale fenomenologia è spiegata nella teoria dell'interazione forte, descritta dalla QCD. In questo ambito si verifica che in generale l'interazione aumenta con la distanza, mentre si attenua a distanze molto ravvicinate, permettendo l'analisi perturbativa della teoria. Questa caratteristica è detta *libertà asintotica*. Tornando ai processi di diffusione, questo comportamento è estremamente importante nel caso in cui il bosone mediatore è tanto energetico da avere lunghezza d'onda associata inferiore alla dimensione degli adroni: è proprio in queste condizioni che interagisce con i quark eccitandoli, rendendo il processo anelastico. Lo scattering può essere analizzato utilizzando delle funzioni che descrivono il comportamento dell'adrone coinvolto. Queste funzioni dipendono dall'impulso spaziale  $\mathbf{q}$  e dall'energia trasferita  $w$  nel processo. In termini di invarianti relativistici si utilizzano  $q^2$  e  $pq$ , con  $q = (\omega, \mathbf{q})$  e  $p$  il quadrimpulso dell'adrone nello stato iniziale. È comodo introdurre una variabile adimensionale  $x$  che consente di discriminare se ci si trova a studiare un processo di scattering anelastico:

$$x = \frac{-q^2}{2Mw} \quad (5.2)$$

dove  $M$  è la massa dell'adrone coinvolto. Il segno  $-$  è necessario per ottenere una quantità positiva, in quanto  $q^2 < 0$ , perché  $q$  è un vettore di tipo spazio.

Se  $x = 1$  siamo nel caso elastico, mentre se è minore all'unità siamo nel caso di scattering anelastico. La variabile  $x$  è detta *variabile di scaling*, e lo *scaling di Bjorken* è il fenomeno per il quale a grandi valori di impulso trasferito, gli adroni coinvolti risultano descrivibili come funzioni di una sola delle due variabili dette in precedenza, dato che  $q$  e  $w$  non sono più indipendenti. Il processo è quindi interpretabile come scattering quasi elastico su una particella puntiforme, il quark appunto, e  $w = -q^2/2m$ , con  $m$  la massa del quark. I processi anelastici si possono trattare mediante il formalismo dei fattori di forma che sarà illustrato nella sezione successiva per processi elastici, solo con parametrizzazioni diverse da quelle riportate.

### 5.1.2 Diffusione elastica

Nel caso di diffusione elastica su un nucleone, in realtà quasi-elastica poiché coinvolge un nucleone in uno stato legato, lo stato finale adronico è un singolo nucleone libero. Poiché protoni e neutroni sono fermioni di spin  $1/2$ , la corrente adronica si scrive come generico quadrivettore di Dirac. Per la corrente compaiono il quadrimpulso della particella uscente  $p'$ , quello della particella entrante  $p$  e quello trasferito  $q := p' - p$ .

$$\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p) \quad \text{con } \Gamma^\mu \text{ generica matrice } 4 \times 4 \quad (5.3)$$

Vediamo quale è il modo più generale di scrivere il bilineare di Dirac  $\Gamma^\mu$ :

$$\Gamma^\mu = [A(q^2)q^\mu + B(q^2)(p + p')^\mu + C(q^2)\gamma^\mu + D(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + E(q^2)i\sigma^{\mu\nu}(p + p')_\nu] \quad (i)$$

$$+ [A'(q^2)q^\mu + B'(q^2)(p + p')^\mu + C'(q^2)\gamma^\mu]\gamma_5 \quad (ii)$$

La parte corrispondente a (i) è detta vettoriale, mentre quella di (ii) è detta assiale, ed è presente solo in caso di violazione della parità. Questa scrittura si può notevolmente

semplificare grazie alle identità di Gordon, che sono:

$$\begin{aligned}\bar{u}(p') \left[ i\sigma^{\mu\nu} q_\nu + (p + p')^\mu - 2m\gamma^\mu \right] u(p) &= 0 \\ \bar{u}(p') \left[ i\sigma^{\mu\nu} (p + p')_\nu + q^\mu \right] u(p) &= 0\end{aligned}\quad (5.4)$$

Nel caso in cui le masse degli adroni iniziale e finale siano distinte, queste sono ancora valide ma con qualche differenza:

$$\begin{aligned}\bar{u}(p') \left[ i\sigma^{\mu\nu} q_\nu + (p + p')^\mu - (m' + m)\gamma^\mu \right] u(p) &= 0 \\ \bar{u}(p') \left[ i\sigma^{\mu\nu} (p + p')_\nu + q^\mu - (m' - m)\gamma^\mu \right] u(p) &= 0\end{aligned}\quad (5.5)$$

dove  $m'$  e  $m$  sono le masse associate agli adroni di impulso  $p'$  e  $p$  rispettivamente. Si riesce quindi a scrivere tutto in funzione di  $q^\mu$  e  $\gamma^\mu$  e introducendo dei *fattori di forma*, funzioni dell'impulso trasferito da determinare sperimentalmente, ottenendo così la formula finale per la *corrente adronica*:

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p) &= \bar{u}(p') [A(q^2)\gamma^\mu + B(q^2)q^\mu + C(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(p) & (i) \\ &+ \bar{u}(p') [A'(q^2)\gamma^\mu + B'(q^2)q^\mu]\gamma_5 u(p) & (ii)\end{aligned}\quad (5.6)$$

dove  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $B'$  sono i fattori di forma.

## 5.2 Processi di diffusione quasi-elastica con corrente adronica

Ora consideriamo processi nei quali gli stati iniziali e finali sono solo i singoli nucleoni. Non stiamo quindi nella casistica di diffusione profondamente anelastica né nel canale di produzione di risonanze.

### 5.2.1 Scattering elettromagnetico

Vediamo come si modifica l'espressione della corrente adronica (5.6) nel caso in cui l'interazione in analisi sia di tipo elettromagnetico.

- Non vi è violazione della parità:  $(ii) = 0$
- La corrente si conserva:  $q_\mu J^\mu = 0$ , da cui  $B = 0$ . Da cui segue:

$$q_\mu J^\mu = \bar{u}(p') [A\not{q} + Bq^2 + Ci\sigma^{\mu\nu}q_\mu q_\nu]u(p) = 0$$

Il termine con  $C$  si annulla perché è una contrazione di un tensore antisimmetrico con una quantità simmetrica, mentre  $A$  si annulla utilizzando il fatto che

$$\bar{u}(p')\not{p}' = m\bar{u}(p') \quad \not{p}u(p) = mu(p)$$

Dunque si ricava che

$$Bq^2 = 0 \rightarrow B = 0$$

La corrente adronica nel caso elettromagnetico risulta essere:

$$\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[ F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{\kappa}{2m}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] u(p) \quad (5.7)$$

dove

$$A = F_1 \quad C = F_2\frac{\kappa}{2m}$$

Vediamo il significato che hanno questi contributi analizzando il caso di corrente con particelle puntiformi, utilizzando sempre le identità di Gordon (5.4).

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p') \left[ (p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu \right] u(p) \quad (5.8)$$

Il termine vettoriale  $(p' + p)^\mu$  è il contributo di interazione dovuto alla carica elettrica, mentre quello tensoriale  $i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu$  descrive l'interazione di spin per il momento magnetico ad esso associato. Quindi l'interazione di spin è già presente nel prodotto spinoriale con  $\gamma^\mu$ , e  $F_2(q^2)\kappa$  è un ulteriore termine di spin causato dal fatto che stiamo trattando particelle composte. Per questo  $\kappa$  è detto *momento magnetico anomalo*.

### 5.2.2 Scattering elettrodebole

L'espressione della corrente adronica (5.6) nel caso in cui l'interazione in analisi sia di tipo elettrodebole risulta essere più complessa di quella del caso elettromagnetico, in quanto si ha violazione della parità e non si ha l'invarianza di gauge, che comporta la non conservazione della corrente.

- Vi è violazione della parità:  $(ii) \neq 0$
- La corrente vettoriale si conserva (ipotesi CVC):  $B = 0$

Per capire meglio la seconda condizione è necessario introdurre il formalismo di isospin debole per i nucleoni.

#### Formalismo di isospin dei nucleoni

Dallo studio dei nuclei, soprattutto quelli con stesso numero di massa ma diverso numero atomico (isobari), e delle interazioni nucleari è emerso che tendenzialmente i legami nucleone-nucleone non dipendono dal numero dei protoni e neutroni, ma dal numero dei nucleoni -a meno di fattori di correzione coulombiani-. Assumendo che i legami nucleari tra nucleoni siano uguali per neutroni e protoni, e che questi abbiano stessa massa -hanno rispettivamente una massa di 939.56 MeV e 938.27 MeV- si può pensare a queste particelle distinte come a una sola particella, il nucleone, che si presenta in due autostati dell'operatore di *isospin*. Questa caratteristica sembra quindi essere espressione di una nuova simmetria della teoria, SU(2), detta simmetria di isospin. È una simmetria nello spazio vettoriale a due dimensioni, i cui generatori sono le matrici di Pauli, che comporta la conservazione di una quantità, l'isospin. Definiamo quindi il doppietto di isospin:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

dove quindi il protone e il neutrone si possono scrivere in notazione di Dirac come  $|p\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$  e  $|n\rangle = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$ , con isospin  $\frac{1}{2}$  e proiezione di isospin sulla componente  $z$   $\pm\frac{1}{2}$ .

Per capire come si collega l'isospinore  $\Psi$  con gli spinori si considera la corrente elettromagnetica associata al protone e al neutrone in approssimazione di particella puntiforme e la si scrive in forma isospinoriale:

$$J_p^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p = \bar{\Psi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu \Psi \quad (5.10)$$

$$J_n^\mu = \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n = \bar{\Psi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^\mu \Psi \quad (5.11)$$

Le matrici  $2 \times 2$  che compaiono nelle due espressioni sono in termini dei generatori di SU(2), ovvero delle matrici di Pauli e dell'identità:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathbb{1} + \sigma_3}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathbb{1} - \sigma_3}{2}$$

Le tre correnti di isospin conservate per la SU(2) e la corrente isoscalare sono:

$$J_i^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \sigma_i \Psi \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.12)$$

$$J_s^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (5.13)$$

Quindi abbiamo le seguenti relazioni tra correnti di isospin:

$$\begin{aligned} J_p^\mu &= J_s^\mu + J_3^\mu \\ J_n^\mu &= J_s^\mu - J_3^\mu \end{aligned} \quad (5.14)$$

dalle quali si definiscono due importanti quantità:

$$J_3^\mu = \frac{1}{2} (J_p^\mu - J_n^\mu) \quad (5.15)$$

$$J_s^\mu = \frac{1}{2} (J_p^\mu + J_n^\mu) \quad (5.16)$$

che sono rispettivamente la *componente isovettoriale* e *isoscalare* della corrente elettromagnetica dei nucleoni.

### L'ipotesi di corrente vettoriale conservata CVC

L'ipotesi di Conserved Vector Current (CVC) consiste nel considerare i nucleoni come campi isospinoriali, ovvero nel considerare esatta la simmetria SU(2) di isospin. Di conseguenza sono conservate le tre correnti  $J_i^\mu$  definite in (5.12). In particolare è quindi conservata la componente isovettoriale della corrente elettromagnetica

associata ai nucleoni. Tale ipotesi non è affatto peregrina in quanto fino ad ora non si sono osservati processi in cui non si avesse la conservazione di queste correnti nucleari isovettoriali.

Le conseguenze di questa legge di conservazione sono notevoli. Permette infatti di semplificare l'espressione generale della corrente adronica associata ai nucleoni, e di creare un importante legame tra i fattori di forma della componente isovettoriale e i fattori di forma elettromagnetici del protone e del neutrone. Questi ultimi, a differenza dei primi, sono molto conosciuti tramite lo studio dello scattering elettromagnetico di leptoni carichi su nucleoni. Nel dettaglio possiamo rivedere il formalismo di isospin precedentemente introdotto non più in approssimazione di particelle puntiformi, bensì utilizzando la struttura dei fattori di forma. Per le correnti protoniche e neutroniche:

$$J_{p/n}^\mu = \bar{u}_{p/n} \left[ F_{1p/n}(q^2) \gamma^\mu + F_{2p/n}(q^2) \frac{\kappa_{p/n}}{2m_{p/n}} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u_{p/n} \quad (5.17)$$

dove  $q$  è sempre il quadrimpulso trasferito. Invece per la componente isovettoriale della corrente elettromagnetica si ha:

$$J_3^\mu = \bar{u} \left[ F_1^{(3)}(q^2) \gamma^\mu + F_2^{(3)}(q^2) \frac{\kappa^{(3)}}{2m} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u \quad (5.18)$$

dove questa volta  $\bar{u}$  e  $u$  sono isospinori, come i fattori di forma sono nel formalismo isospinoriale. Quindi gli elementi di matrice  $\langle p | J_3^\mu | p \rangle$  e  $\langle n | J_3^\mu | n \rangle$  si scrivono utilizzando le espressioni (5.17) delle correnti rispettivamente protoniche e neutroniche.

I fattori di forma della corrente isovettoriale sono connessi con quelli elettromagnetici di neutrone e protone. Per vedere questa relazione è necessario introdurre e utilizzare l'algebra della simmetria SU(2). Ricordiamo l'algebra di Lie soddisfatta dai generatori  $\sigma_i$ :

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk} \sigma_k$$

e le definizioni di:

$$\begin{aligned} \sigma_\pm &= \sigma_1 \pm i\sigma_2 & J_\pm^\mu &= J_1^\mu \pm iJ_2^\mu \\ \text{con} \quad \sigma_+ & \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle & &= \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned} [\sigma_+, J_3^\mu] &= [\sigma_1, J_3^\mu] + i[\sigma_2, J_3^\mu] = -iJ_2^\mu - J_1^\mu = -J_+^\mu \\ [J_3^\mu, \sigma_+] &= J_+^\mu \end{aligned} \quad (5.19)$$

Nei processi elettrodeboli si osserva che l'adrone in entrata è diverso da quello di uscita, e nel caso più semplice di diffusione quasi elastica, questi riguardano protoni e neutroni. Dunque gli elementi di matrice che compaiono nel calcolo della sezione d'urto del processo sono del tipo  $\langle p | J^\mu | n \rangle$ , dove  $J^\mu = J_V^\mu - J_A^\mu$ , esplicitando la componente vettoriale e assiale. Nello specifico siamo interessati a studiare il termine  $\langle p | J_V^\mu | n \rangle$ , con  $J_V^\mu = J_+^\mu$ .

$$\begin{aligned} \langle p | J_+^\mu | n \rangle &= \langle p | [J_3^\mu, \sigma_+] | n \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| J_3^\mu \sigma_+ - \sigma_+ J_3^\mu \right| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| J_3^\mu \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| J_3^\mu \right| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Ovvero

$$\langle p|J_+^\mu|n\rangle = \langle p|J_3^\mu|p\rangle - \langle n|J_3^\mu|n\rangle \quad (5.20)$$

Da questa relazione si ricava che:

$$F_1^+(q^2) = F_{1p} - F_{1n} \quad F_2^+(q^2)\frac{\kappa}{2m} = F_{2p}\frac{\kappa_p}{2m_p} - F_{2n}\frac{\kappa_n}{2m_n}$$

dove gli apici + indicano che le quantità si riferiscono alla corrente  $J_+^\mu$ .

### 5.2.3 Parametrizzazione dei fattori di forma

#### Fattori di forma elettromagnetici

I fattori di forma elettromagnetici convenzionalmente si parametrizzano con l'introduzione di fattori elettrici e magnetici  $G_e$ ,  $G_m$ :

$$F_{1_{p/n}}(q^2) = \left( G_{e_{p/n}} - \frac{q^2}{4m_{p/n}^2} G_{m_{p/n}} \right) \left( 1 - \frac{q^2}{4m_{p/n}^2} \right)^{-1} \quad (5.21)$$

$$F_{2_{p/n}}(q^2) = \left( G_{m_{p/n}} - G_{e_{p/n}} \right) \left( 1 - \frac{q^2}{4m_{p/n}^2} \right)^{-1} \quad (5.22)$$

I fattori  $G_e$ ,  $G_m$  sono determinati sperimentalmente tramite lo studio di diffusione elettronica sui nucleoni. Spesso si scrivono nella forma di dipolo

$$G_{e_{p/n}} = \left( 1 - \frac{q^2}{M_V^2} \right)^{-2} \quad (5.23)$$

$$G_{m_{p/n}} = \mu_{p/n} \left( 1 - \frac{q^2}{M_V^2} \right)^{-2} \quad (5.24)$$

$\mu_{p/n}$  sono i momenti magnetici di protone e neutrone rispettivamente<sup>1</sup>, con  $\mu_p = 2.79278$  e  $\mu_n = -1.91315$  [?]. Il parametro  $M_V$  è determinato sperimentalmente, ed è detto *massa vettoriale*, il cui valore misurato è  $M_V^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$ .

In realtà negli ultimi anni sono emerse deviazioni dalla struttura dipolare ad alti  $Q^2$  dei fattori di forma vettoriali, che hanno portato all'adozione di altre parametrizzazioni. In questa trattazione abbiamo utilizzato quella proposta in [?].

#### Fattori di forma assiali

Per la parte assiale della corrente adronica non si possono utilizzare gli esperimenti di diffusione elettronica, ma si giunge comunque ad una parametrizzazione sperimentale

<sup>1</sup>Riferendoci al momento magnetico anomalo  $\kappa$ , introdotto nel Paragrafo 5.2.1, valgono le seguenti relazioni.

$$\mu_p = 1 + \kappa_p \quad \mu_n = \kappa_n$$

Studio	Bersaglio	$M_A$ [GeV]	Referenza
Esperimenti vari	Deuterio	$1.032 \pm 0.02$	[?]
K2K	$^{12}\text{C}$	$1.144 \pm 0.077_{-0.072}^{+0.078}(\text{sis})$	[?]
K2K	$^{16}\text{O}$	$1.20 \pm 0.12$	[?]
MiniBooNE	$^{12}\text{C}$	$1.35 \pm 0.17$	[?]
QCD su lattice		$1.39 \pm 0.09$	[?]

**Tabella 5.1.** Alcuni valori della massa assiale ottenuti sperimentalmente e da studi teorici.

dei fattori di forma.

$$F_A(q^2) = g_A \left(1 - \frac{q^2}{M_A^2}\right)^{-2} \quad (5.25)$$

$$F_P(q^2) = \frac{2m^2}{m_\pi^2 - q^2} F_A(q^2) \quad (5.26)$$

dove abbiamo definito, facendo riferimento a (5.6):

$$A' = F_A \quad B' = \frac{F_P}{m}$$

Il fattore di forma pseudoscalare viene associato al contributo del polo del pione, coinvolto nelle interazioni tra nucleoni. Inoltre si utilizza l'ipotesi di *corrente vettoriale parzialmente conservata* (PCAC), che lega  $F_P$  a  $F_A$ .  $M_A$  è un parametro determinato sperimentalmente, detto *massa assiale*. Dagli studi di diffusione di neutrini su deuterio si ottiene  $M_A = 1.032 \pm 0.036$  GeV.  $g_A$  è la costante di accoppiamento assiale, che si ottiene dal decadimento  $\beta$  del neutrone. Vale  $g_A = -1.2723$ , da [?].

In realtà vi sono diverse problematiche annesse con la parametrizzazione del fattore  $F_A$ . Infatti i valori sperimentali ottenuti da diversi studi sono discordanti: significativo è il caso di MiniBooNE, descritto in [?], dove si ottengono  $M_A = 1.60$  GeV dall'analisi della sezione d'urto differenziale in energia cinetica del leptone uscente e rispetto all'angolo polare del leptone uscente separatamente, e  $M_A = 1.35$  GeV dallo studio della sezione d'urto totale in funzione dell'energia dei neutrini incidenti. Questo suggerisce fortemente la necessità di trovare delle parametrizzazioni più efficienti del fattore di forma assiale. La particolarità della tematica è anche dovuta al fatto che gli studi su deuterio hanno permesso lo sviluppo di parametrizzazioni dei fattori elettromagnetici che invece consentono un'ottima ricostruzione dei dati sperimentali. Tale differenza può forse nascondere aspetti che sono trascurati, come per esempio la possibilità di includere processi con correnti a due corpi [?] per ottenere una migliore aderenza statistica rispetto ai dati delle simulazioni, senza dover ricorrere ad importanti modifiche del fattore  $M_A$ . Per completezza riportiamo i valori della massa assiale ottenuta in alcuni studi nella tabella 5.1, anche se il panorama è estremamente più vario di quello presentato.



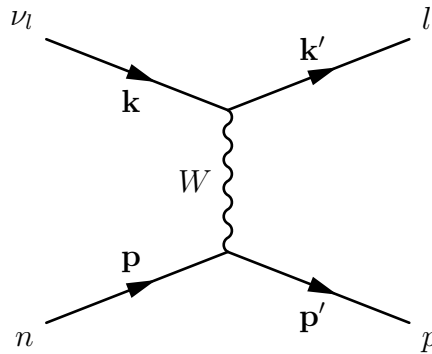
## Capitolo 6

# Diffusione $\nu_l - n$ con Corrente Carica Quasi Elastica (CCQE)

Ora vogliamo studiare nel dettaglio un processo elettrodebole come la diffusione di neutrini su un neutrone, nell'approssimazione di urto quasi-elastico. Questo significa che si utilizza il formalismo dei fattori di forma discusso precedentemente, senza considerare i canali di produzione delle risonanze e di scattering fortemente anelastico. Quindi il processo in analisi è

$$\nu_l + n \rightarrow p + l$$

con relativo diagramma di Feynman:



**Figura 6.1.** Grafico di Feynman dello scattering  $\nu_l + n \rightarrow l + p$ . L'asse temporale è orizzontale e orientato verso destra.  $q$  è il momento associato al bosone mediatore  $W$ .

Le correnti che compaiono nel diagramma sono quella leptonica  $J_l^\mu$  e quella adronica  $J_h^\mu$ , mentre  $q$  è l'impulso trasferito.

$$q := p' - p = k - k'$$

$$J_l^\mu := \bar{u}_l(k') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_\nu(k) \quad (6.1)$$

$$J_h^\mu := \bar{u}_p(p') \left[ F_1 \gamma^\mu + \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\mu\nu} q_\nu + F_A \gamma^\mu \gamma_5 + \frac{1}{m} F_P q^\mu \gamma_5 \right] u_n(p) \quad (6.2)$$

Abbiamo omesso la dipendenza da  $q^2$  nei fattori di forma, e lo faremo per tutta la sezione per facilitare la lettura.

Il propagatore del bosone mediatore è quello ottenuto dalla Lagrangiana di Proca, che descrive bosoni massivi:

$$D_W^{\mu\nu} = \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2} \simeq \frac{g^{\mu\nu}}{M_W^2} \text{ se } M_W^2 \gg q^2 \quad (6.3)$$

L'ampiezza di Feynman associata al diagramma è quindi

$$\mathcal{M} = \frac{-ig}{2\sqrt{2}} J_l^\mu iD_{W\mu\nu} \frac{-ig}{2\sqrt{2}} J_h^\nu$$

dove  $g$  è la costante di accoppiamento dei leptoni con il bosone carico  $W$ . Vale inoltre  $G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8M_W^2}$  la relazione con la costante di accoppiamento di Fermi.

Nell'approssimazione  $M_W^2 \gg q^2$  abbiamo dunque:

$$\mathcal{M} = -\frac{iG_F}{\sqrt{2}} J_l^\mu J_{h\mu} \quad (6.4)$$

Nel calcolo della sezione d'urto associata al processo in esame compare il modulo quadro dell'ampiezza di Feynman. Andiamo quindi a valutare questa quantità.

## 6.1 Ampiezza di Feynman

Facendo il modulo quadro dell'ampiezza di Feynman si esegue la sommatoria sulle possibili polarizzazioni delle particelle coinvolte, e si media sulle polarizzazioni iniziali. Nella parte leptonica l'operazione di media non è necessaria in quanto solo le componenti a chiralità definita sono coinvolte, e i neutrini hanno una sola polarizzazione possibile. Per gli adroni invece compare il fattore  $\frac{1}{2}$  di media sulle polarizzazioni. Definiamo due importanti quantità associate alle correnti in gioco nel processo: il *tensore leptónico* ed il *tensore adronico*.

$$L^{\mu\nu} := \sum_{r,r'} \left[ \bar{u}_{r'}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_r(k) \left( \bar{u}_{r'}(k') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_r(k) \right)^\dagger \right] \quad (6.5)$$

$$W^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \left[ \bar{u}_{s'}(p') \Gamma^\mu u_s(p) \left( \bar{u}_{s'}(p') \Gamma^\nu u_s(p) \right)^\dagger \right] \quad (6.6)$$

$\Gamma^\mu$  indica il generico bilineare di Dirac che compare in  $J_h^\mu$ .

### 6.1.1 Tensore leptónico

Calcoliamo l'hermitiano coniugato della quantità che compare nella definizione di  $L^{\mu\nu}$ , utilizzando il fatto che  $\gamma_5, \gamma^0$  sono hermitiane, unitarie e anticommutano tra loro e che  $\gamma^0 \gamma^\mu \dagger \gamma^0 = \gamma^\mu$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \bar{u}_{r'}(k') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_r(k) \right]^\dagger = u_r(k)^\dagger (1 - \gamma_5) \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 u_{r'}(k') = \\ & = u_r(k)^\dagger (1 - \gamma_5) \gamma^0 \gamma^\nu u_{r'}(k') = u_r(k)^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma_5) \gamma^\nu u_{r'}(k') = \bar{u}_r(k) (1 + \gamma_5) \gamma^\nu u_{r'}(k') \end{aligned}$$

Quindi

$$L^{\mu\nu} = \sum_{r,r'} \left[ \bar{u}_{r'}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_r(k) \bar{u}_r(k) (1 + \gamma_5) \gamma^\nu u_{r'}(k') \right]$$

Il termine  $\sum_r u_r \bar{u}_r(k)$  è un proiettore sugli autostati dell'energia, e vale

$$\sum_r u_r \bar{u}_r(k) = \frac{\not{k} + m}{2m}$$

con  $m$  la massa della particella, quindi in questo caso  $m \rightarrow m_\nu$ .

Usiamo poi le relazioni tra le matrici  $\gamma$

$$\begin{aligned} \not{k}(1 + \gamma_5) &= (1 - \gamma_5)\not{k}, & (1 - \gamma_5)^2 &= 2(1 - \gamma_5) \\ (1 - \gamma_5) \frac{m_\nu}{2m_\nu} (1 + \gamma_5) &= 0 \end{aligned}$$

Ora facciamo un ragionamento analogo per i leptoni, e otteniamo un altro proiettore sugli autostati di energia, giungendo a

$$L^{\mu\nu} = \left( \frac{\not{k}' + m_l}{2m_l} \right)^{\beta\alpha} \cdot \left[ \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \frac{\not{k}}{m_\nu} \gamma^\nu \right]_{\alpha\beta} \quad (6.7)$$

che è una traccia. Le uniche tracce non nulle in (6.7) sono due, e sono:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( \not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \right) &= 4 \left( k'^\mu k^\nu - k' k g^{\mu\nu} + k'^\nu k^\mu \right) \\ \text{Tr} \left( \not{k}' \gamma^\mu \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \right) &= -4i k'_\alpha k_\beta \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \end{aligned}$$

e il tensore leptonic risulta:

$$L^{\mu\nu} = \frac{2}{m_l m_\nu} \left( k'^\mu k^\nu - k' k g^{\mu\nu} + k'^\nu k^\mu + i k'_\alpha k_\beta \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \right) \quad (6.8)$$

### 6.1.2 Tensore adronico

Abbiamo visto in precedenza come scrivere la corrente adronica utilizzando i fattori di forma. Quindi il bilineare di Dirac  $\Gamma^\mu$  che compare nel tensore adronico è

$$\Gamma^\mu = F_1 \gamma^\mu + \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\mu\nu} q_\nu + F_A \gamma^\mu \gamma_5 + \frac{1}{m} F_P q^\mu \gamma_5$$

Poiché nel tensore adronico abbiamo un termine di cui bisogna fare l'hermitiano coniugato, studiamo nello specifico questo conto:

$$\begin{aligned} & \left( \bar{u}_{s'}(p') \left[ F_1 \gamma^\nu + \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\nu\beta} q_\beta + F_A \gamma^\nu \gamma_5 + \frac{1}{m} F_P q^\nu \gamma_5 \right] u_s(p) \right)^\dagger \\ &= u_s^\dagger(p) \left[ F_1 \gamma^{\nu\dagger} - \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\nu\beta\dagger} q_\beta + F_A \gamma_5 \gamma^{\nu\dagger} + \frac{1}{m} F_P q^\nu \gamma_5 \right] \gamma^0 u_{s'}(p') \end{aligned}$$

ora usiamo le proprietà di anticommutazione delle matrici  $\gamma$  e che

$$i \sigma^{\mu\nu\dagger} \gamma^0 = +i \gamma^0 \sigma^{\mu\nu}$$

per ottenere

$$= u_s^\dagger(p)\gamma^0 \left[ F_1\gamma^\nu - \frac{\kappa}{2m}F_2i\sigma^{\nu\beta}q_\beta - F_A\gamma_5\gamma^\nu - \frac{1}{m}F_Pq^\nu\gamma_5 \right] u_{s'}(p')$$

ovvero

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \left( \bar{u}_{s'}(p') \left[ F_1\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2m}F_2i\sigma^{\mu\alpha}q_\alpha + F_A\gamma^\mu\gamma_5 + F_Pq^\mu\gamma_5 \right] u_s(p) \right. \\ \left. \bar{u}_s(p) \left[ F_1\gamma^\nu - \frac{\kappa}{2m}F_2i\sigma^{\nu\beta}q_\beta - F_A\gamma_5\gamma^\nu - F_Pq^\nu\gamma_5 \right] u_{s'}(p') \right) \quad (6.9)$$

Il conto è riportato interamente nell'Appendice C. Il tensore adronico ottenuto è

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4m_n m_p} \left[ W_1 g^{\mu\nu} + W_2 p^\mu p^\nu + W_3 i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} p_\alpha q_\beta + W_4 q^\mu q^\nu + W_5 (q^\nu p^\mu + q^\mu p^\nu) \right] \quad (6.10)$$

dove i fattori  $W_i$  sono definiti nell'appendice, come funzioni dei fattori di forma. Si può ottenere questa formulazione del tensore adronico anche scrivendo un tensore a due indici covariante di Lorentz nella maniera più generale possibile, con dipendenza da  $p, q$ , contenente solo termini ammessi dal Modello Standard<sup>1</sup>.

### 6.1.3 Calcolo di $L^{\mu\nu}W_{\mu\nu}$

Torniamo finalmente al calcolo del modulo quadro dell'ampiezza di Feynman  $|\mathcal{M}|^2$ , utilizzando le formule (6.8)(6.10). Nel conto si considera anche il mescolamento tra i quark up e down, espresso in termini della matrice CKM  $V$  [?], che emerge nella corrente adronica. Dunque definiamo  $G^2 := G_F^2 |V_{ud}|^2$ .

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{G^2}{2} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = \frac{1}{4m_n m_p} \frac{2}{m_l m_\nu} \frac{G^2}{2} \cdot \left\{ -2kk'W_1 \right. \\ \left. + (2pk'pk - kk'p^2)W_2 + 2k'_\alpha k_\beta p^{\alpha'} q^{\beta'} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha'\beta'\mu\nu} W_3 \right. \\ \left. + (2qk'qk - kk'q^2)W_4 + 2(pk'qk + qk'pk - kk'qp)W_5 \right\} \quad (6.11)$$

e lo scriviamo in funzione di  $k, p, q$  utilizzando  $q = k - k'$ :

- $k' = k - q$
- $kk' = m_\nu^2 - kq$
- $qk' = kq - q^2$
- $pk' = pk - pq$

vale inoltre

<sup>1</sup>Infatti si può scrivere anche un termine

$$\sim q^\nu p^\mu - q^\mu p^\nu$$

che non compare in quanto non ammesso dal MS

$$\bullet \quad \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha'\beta'\mu\nu} = -2 \left( \delta_{\alpha'}^{\alpha} \delta_{\beta'}^{\beta} - \delta_{\beta'}^{\alpha} \delta_{\alpha'}^{\beta} \right)$$

Quindi

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{G^2}{4} \frac{1}{m_n m_p} \frac{1}{m_l m_\nu} \cdot \left\{ 2(pk - m_\nu^2) W_1 + [2(pk)^2 - pk pq + m_n^2(kq - m_\nu^2)] W_2 + 4(kq pq - q^2 pk) W_3 + [2(kq)^2 - m_\nu^2 q^2 - q^2 kq] W_4 + 2(2pk kq - q^2 pk - m_\nu^2 pq) W_5 \right\} \quad (6.12)$$

Infine definiamo per comodità la parte tra le parentesi graffe di  $|\mathcal{M}|^2$  come  $LW$ , di modo che valga

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{G^2}{4} \frac{1}{m_n m_p} \frac{1}{m_l m_\nu} LW \quad (6.13)$$

## 6.2 Sezione d'urto

Ora rivolghiamo la nostra attenzione al calcolo della sezione d'urto  $d\sigma$  [?]. In un processo di scattering la formula generica è

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum p_f - \sum p_i \right) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{\text{rel}}} \left( \prod_l 2m_l \right) \left( \prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) |\mathcal{M}|^2$$

$v_{\text{rel}}$  è la velocità relativa delle particelle iniziali, i pedici  $f$  e  $i$  indicano che le quantità sono riferite alle particelle iniziali e finali rispettivamente. La produttoria  $\prod_l$  è su tutti i fermioni delle linee esterne, e  $\prod_f$  su tutte le particelle uscenti. Nel processo in esame la sezione d'urto diventa:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4 \left( p + k - p' - k' \right) \frac{m_l m_\nu m_n m_p}{E_p E_k v_{\text{rel}}} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 E_{p'}} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 E_{k'}} |\mathcal{M}|^2 \quad (6.14)$$

Integrando la  $\delta$  rispetto all'impulso del protone uscente  $p'$  si ottiene:

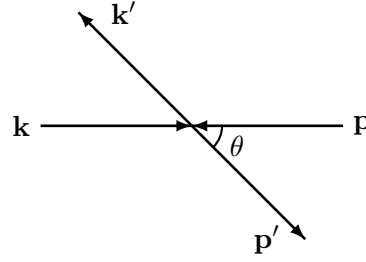
$$\delta^4 \left( p + k - p' - k' \right) dp' = \delta(E_p + E_k - E_{p'} - E_{k'}) \quad \text{con } \mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}'$$

Dunque, utilizzando la definizione di  $|\mathcal{M}|^2$  data in (6.13) abbiamo la sezione d'urto differenziale in funzione dell'energia e dell'angolo solido del leptone uscente, molto utilizzata negli esperimenti.

$$\begin{aligned} d\mathbf{k}' &= d\Omega_{k'} |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| = d\Omega_{k'} |\mathbf{k}'| E_{k'} dE_{k'} \\ \frac{d\sigma}{dE_{k'} d\Omega_{k'}} &= \frac{G^2}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{v_{\text{rel}}} \frac{1}{E_p E_k E_{p'}} \delta(E_p + E_k - E_{p'} - E_{k'}) \end{aligned} \quad (6.15)$$

### Centro di massa

Per continuare il conto è possibile mettersi nel sistema di riferimento del centro di massa per avere qualche semplificazione. In questo caso la situazione è descritta nell'immagine 6.2, e si ha che  $\mathbf{k} + \mathbf{p} = 0$  e  $\mathbf{k}' + \mathbf{p}' = 0$ , e di conseguenza  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{p}|$ ,  $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{p}'|$ . Valutiamo dunque alcune quantità, tornando alla sezione d'urto in funzione di  $\mathbf{k}'$ :



**Figura 6.2.** Dinamica del processo nel sistema di riferimento del centro di massa

- $v_{\text{rel}} = \frac{|\mathbf{p}|}{E_p} + \frac{|\mathbf{k}|}{E_k} = |\mathbf{k}| \frac{E_p + E_k}{E_p E_k}$
- $\delta(E_p + E_k - E_{p'} - E_{k'}) |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| \cdot d\Omega_{k'} = |\mathbf{k}'|^2 d\Omega_{k'} \left( \frac{\partial(E_{p'} + E_{k'})}{\partial|\mathbf{k}'|} \right)^{-1}$   
 $= |\mathbf{k}'|^2 d\Omega_{k'} \left( \frac{\partial(\sqrt{m_p^2 + |\mathbf{k}'|^2} + \sqrt{m_l^2 + |\mathbf{k}'|^2})}{\partial|\mathbf{k}'|} \right)^{-1} = |\mathbf{k}'| d\Omega_{k'} \frac{E_{p'} E_{k'}}{E_p + E_k}$

Nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che  $E_p + E_k = E_{p'} + E_{k'}$  per la conservazione dell'energia garantita dalla  $\delta$  di Dirac.

$$d\sigma = \frac{G^2}{16\pi^2 (E_p + E_k)^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} LW d\Omega_{k'} \quad (6.16)$$

Ora resta da esplicitare la dipendenza angolare e quella dai moduli dei momenti del termine  $LW$ . Prima però è conveniente utilizzare un'approssimazione per avere un'ulteriore semplificazione del problema.

### Approssimazione di $m_\nu$

Consideriamo nulla la massa del neutrino coinvolto. Questa non rappresenta un'approssimazione grossolana in quanto i valori stimati di tali masse sono molto piccoli. In particolare lo sono in confronto alle incertezze inevitabilmente associate alle quantità misurabili in un qualsiasi processo che riguardi i neutrini. In ogni caso porre a zero la massa del neutrino comporta che  $k^2 = 0$  e che  $E_k = |\mathbf{k}|$ .

Studiamo le quantità che compaiono nella formula di  $d\sigma$ , in particolare in  $LW$ . Ricordiamo che  $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{k}'|$ .

- $kk' = E_k E_{k'} - |\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta \rightarrow E_k E_{k'} \left( 1 - \frac{|\mathbf{p}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right)$
- $q^2 = (k - k')^2 = m_l^2 + m_\nu^2 - 2kk' \rightarrow m_l^2 - 2E_k E_{k'} \left( 1 - \frac{|\mathbf{p}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right)$
- $kp = E_k E_p + |\mathbf{k}||\mathbf{p}| \rightarrow E_k (E_k + E_p)$
- $kq = k^2 - kk' \rightarrow -E_k E_{k'} \left( 1 - \frac{|\mathbf{p}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right)$
- $pp' = E_p E_{p'} - |\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos \theta$

$$\bullet \quad pq = pp' - p^2 = E_p E_{p'} - |\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos \theta - m_n^2$$

Quindi  $LW$  risulta, suddivisa per comodità per fattori  $W_i$ :

$$\begin{aligned} \bullet \quad & 2(kq - m_\nu^2)W_1 \quad \rightarrow \quad 2W_1 E_k E_{k'} \left( \frac{|\mathbf{p}'|}{E_{k'}} \cos \theta - 1 \right) \\ \bullet \quad & \left[ 2(pk)^2 - pk pq + m_n^2(kq - m_\nu^2) \right] W_2 \quad \rightarrow \quad W_2 \left\{ 2E_k(E_k + E_p) \left[ E_k^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + E_k E_p + E_p^2 - E_p E_{k'} - |\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos \theta - m_n^2 \right] + m_n^2 E_k E_{k'} \left( 1 - \frac{|\mathbf{p}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) \right\} \\ \bullet \quad & 4(kq pq - q^2 pk) W_3 \quad \rightarrow \quad 4W_3 \left\{ E_k E_{k'} \left( 1 - \frac{|\mathbf{p}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) \left[ |\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos \theta \right. \right. \\ & \left. \left. + m_n^2 + E_k^2 + E_p E_{k'} - E_p^2 \right] - m_l^2 E_k (E_k + E_p) \right\} \\ \bullet \quad & \left[ 2(kq)^2 - m_\nu^2 q^2 - q^2 kq \right] W_4 \quad \rightarrow \quad W_4 m_l^2 E_k E_{k'} \left( 1 - \frac{|\mathbf{p}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) \\ \bullet \quad & 2(2pk kq - q^2 pk - m_\nu^2 pq) W_5 \quad \rightarrow \quad -2W_5 E_k m_l^2 (E_k + E_p) \end{aligned}$$

dove si è utilizzato  $E_{p'} = E_k + E_p - E_{k'}$  per il termine corrispondente a  $W_2$ , e  $2kq - q^2 = -m_l^2$  per gli ultimi due.

Da qui si ha l'espressione di  $LW$  in funzione di  $\theta$ ,  $|\mathbf{k}'|$  e  $|\mathbf{k}|$ . Ricordiamo però che questa dipendenza avviene non solo esplicitamente, ma anche attraverso i fattori  $W_i$ , in quanto funzioni di  $q^2 = q^2(\theta, |\mathbf{k}'|, |\mathbf{k}|)$ .

### 6.2.1 Scattering con antineutrini incidenti

Nel caso in cui il flusso di particelle incidenti è formato da antineutrini, con protoni come bersagli, il processo a corrente carica in regime quasi elastico cui vanno incontro è

$$\bar{\nu}_l + p = l^+ + n \quad (6.17)$$

Il grafico di Feynman associato al processo e il procedimento per il calcolo della sezione d'urto è pressoché identico a quello illustrato nel caso di neutrini incidenti. Le uniche differenze riguardano il segno del termine antisimmetrico del tensore leptonic,  $-ik'_\alpha k_\beta \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}$ , che acquista un segno  $-$ . Le conseguenze nella sezione d'urto totale riguardano solo il termine proporzionale al fattore adronico  $W_3$ . Nel tensore adronico le differenze sono lievi, e riguardano semplicemente le masse dei nucleoni, in quanto  $m_p$  è associata allo stato iniziale mentre  $m_n$  a quello finale.





## Capitolo 7

# Modelli Nucleari

In moltissimi esperimenti di diffusione vengono utilizzati i nuclei atomici come bersagli di particelle incidenti, che possono essere adroni, leptoni, neutrini o fotoni. Nelle sezioni precedenti si sono considerati processi che coinvolgono solo i singoli nucleoni, ma se questi si trovano all'interno di un nucleo atomico, la trattazione diviene molto più complessa in quanto non si tratta più di particelle libere. Si rende dunque necessaria la creazione di un modello del nucleo come stato legato di più componenti -tra l'altro non elementari- che descriva la dinamica dei nucleoni. Nell'intera sezione si è utilizzato come riferimento [?].

### 7.1 Forze Nucleari

I nuclei atomici sono composti da  $A$  nucleoni:  $N$  neutroni e  $Z$  protoni. Questi sono fermioni di spin  $1/2$ , tenuti insieme dall'interazione forte. Nei nuclei è però presente anche l'interazione elettromagnetica tra i protoni. Essa è di tipo repulsivo, e risulta essere meno intensa delle forze nucleari, altrimenti non esisterebbero i nuclei. Tuttavia con l'aumentare del numero di massa  $A$ , la repulsione coulombiana mina la stabilità di questi, che infatti non esistono per valori di  $Z$  maggiori di 120. Per descrivere questo stato legato di più particelle è importante notare che i nucleoni sono trattabili individualmente, in quanto la loro distanza media,  $\sim 1.5$  fm, è maggiore delle loro dimensioni. Sperimentalmente si osserva che parte della massa dei nucleoni viene messa in gioco per formare il nucleo, e pertanto la massa di un nucleo è inferiore alla somma delle masse dei nucleoni. Da questa caratteristica si definisce appunto l'energia di legame  $B_E$ , data dalla semplice formula

$$B_E = Zm_p + Nm_n - M_A$$

dove  $M_A$  è la massa del nucleo misurata tramite spettrometro. L'energia di legame per nucleone, definita banalmente come  $B_E/A$ , ha un andamento particolare in funzione del numero di massa, riportato nella figura 7.1. Dopo una fase in cui l'energia di legame per nucleone aumenta con il numero di massa  $A$ , si può notare che per  $A > 20$  questa si stabilizza intorno ad un valore di circa 8 MeV. Pertanto l'interazione nucleone-nucleone ha un raggio di azione inferiore a quello del nucleo, e coinvolge solo una parte dei protoni e neutroni presenti. La presenza di picchi invece rivela l'esistenza di configurazioni particolarmente stabili, la cui interpretazione è

data da un approccio quantistico. Altra importante tematica emerge dallo studio dei nuclei speculari, o isobari, con stesso numero di massa ma diverso numero atomico, e che in particolare differiscano solo di un protone e un neutrone: hanno comportamenti estremamente simili in termini degli spettri energetici, non identici praticamente solo per effetti coulombiani. Questa "simmetria" è evidentemente figlia dell'indipendenza delle forze nucleari dalla carica elettrica, e dunque supporta la validità del formalismo di isospin, che tratta neutrone e protone come due autostati diversi dell'isospin di una unica particella, il nucleone.

Le proprietà elettromagnetiche dei nuclei sono descritte dalla densità di carica  $\rho(\mathbf{r}, t)$  e dalla densità corrente elettrica  $j(\mathbf{r}, t)$ . Queste hanno come asse di simmetria la direzione dello spin nucleare. Per ottenere informazioni su di esse si utilizza la diffusione elettronica. Dunque i nuclei oltre a possedere una carica elettrica hanno anche un momento magnetico, dovuto alla carica dei protoni e ai momenti magnetici intrinseci dei singoli nucleoni, e un momento di quadrupolo elettrico, per la possibile distribuzione di carica non a simmetria sferica. Non hanno invece momento di dipolo elettrico, in quanto questo non è invariante sotto parità, mentre i nuclei hanno parità definita, data dal prodotto della parità dei nucleoni. In particolare la densità di carica è legata ai fattori di forma utilizzati per i processi con correnti adroniche del Capitolo 5: in approssimazione non relativistica sono infatti la trasformata di Fourier di  $\rho(\mathbf{r})$ .

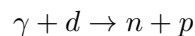
$$\rho(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} F(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

Dallo studio della diffusione di un elettrone sui nuclei si determinano i fattori di forma e quindi la distribuzione di carica nucleare. Quello che si osserva è che nel centro del nucleo  $\rho$  è quasi costante, e indipendente da  $A$ . Il raggio nucleare invece è proporzionale a  $A^{1/3}$ . Questo peculiare andamento indica che le forze tra i nucleoni diventano fortemente repulsive a piccole distanze.

Lo studio dei nuclei parte dall'atomo più semplice, composto da un protone e un neutrone: il deuterio, un isotopo dell'idrogeno.

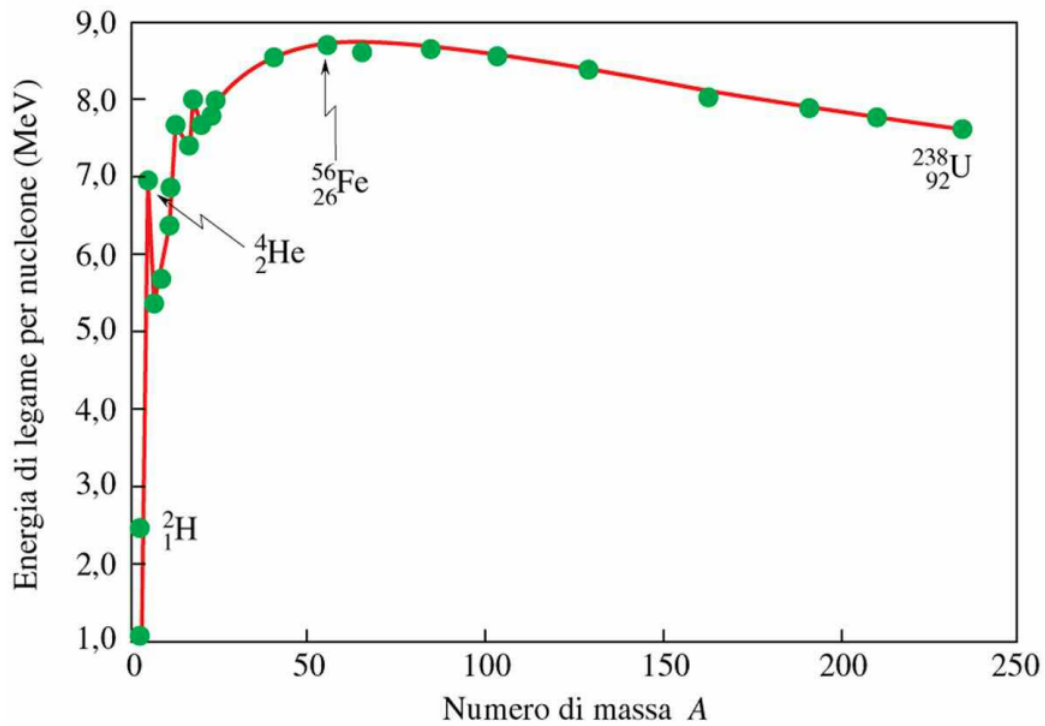
## Il deuterio

Il deuterio è uno stato legato di un protone e un neutrone. Dallo studio del processo di fotodisintegrazione, ovvero



si è stabilito che l'energia di legame del deuterio è piuttosto bassa, circa 2.225 MeV per un rapporto  $B_E/M \sim 0.001$ , contro  $\sim 0.08$  per i nuclei più pesanti. Data la natura fermionica dei nucleoni, la funzione d'onda che descrive il nucleo di deuterio deve risultare dispari per scambio. I numeri quantici che descrivono le particelle sono il momento angolare  $L$ , lo spin  $S$  e l'isospin  $I$ . Spin e momento angolare si compongono nel momento angolare totale  $J$ , secondo le regole della tavola di Clebsch-Gordan. Dalle osservazioni sperimentali si ha che il deuterio è uno stato a parità positiva con momento angolare totale  $J^+ = 1^+$  (il + indica parità positiva). Dunque dalla combinazione di  $L$  e  $S$  si hanno le seguenti possibilità:

- $S = 0, L = 1$



**Figura 7.1.** Energia di legame per nucleone in funzione del numero di massa. Si possono notare i picchi corrispondenti all'elio, e di altri elementi leggeri come il carbonio  ${}^{12}\text{C}$  e l'ossigeno  ${}^{16}\text{O}$ . Il valore massimo di energia di legame per nucleone viene raggiunto nell'atomo di ferro.

- $S = 1, L = 0, 1, 2$

La parità è data  $P = (-1)^L$ , e dunque le uniche combinazioni possibili sono  $S = 1$  e  $L = 0, 2$ . Poiché il tripletto di spin con  $S = 1$  e gli stati con  $L$  pari sono simmetrici per scambio, si ha che la funzione che descrive i due nucleoni nello spazio dell'isospin deve essere antisimmetrica, ovvero devono formare un singoletto di isospin  $I = 0$ . Il deuterio ha però momento di quadrupolo elettrico non nullo: questo implica che il momento angolare non può essere nullo. In realtà lo stato fondamentale del deuterio è una sovrapposizione di stati a  $L = 0$  e  $L = 2$ : la funzione d'onda si può scrivere, utilizzando la notazione spettroscopica  ${}^{2S+1}L_J$ , come  $|\psi_d\rangle = a_S |{}^3S_1\rangle + a_D |{}^3D_1\rangle$ , con  $a_S^2 + a_D^2 = 1$ . Sperimentalmente  $a_D^2 = 0.04$ , ovvero il contributo della componente  $L = 2$  è molto modesto, ma la presenza di una degenerazione per il momento angolare conferma che il sistema non è a simmetria sferica. L'assenza di stati a due nucleoni con  $S \neq 1$  è sintomo del fatto che le forze nucleari tra due nucleoni sono fortemente influenzate dallo spin, e sono più attrattive per gli stati di tripletto.

### Il potenziale a scambio di pioni in regime non relativistico

Le interazioni tra nucleoni sono di natura forte, ma non sono descrivibili tramite la teoria della QCD per via delle basse energie in gioco che rendono impraticabile la teoria delle perturbazioni. Tramite osservazioni sperimentali quali le dimensioni del nucleo e le energie di legame, Yukawa negli anni '30 propose una prima interpretazione delle interazioni tra nucleoni basata sulla teoria dei campi quantistici [?]. La sua idea principalmente consisteva nel fatto che una forza con effetti così a corto raggio potesse essere mediata da un bosone massivo: in questo modo il potenziale avvertito a distanza  $r$  con bosone di massa  $m$  è  $\sim \frac{e^{-mr}}{r}$ . Conoscendo il raggio di interazione  $r \sim 1$  fm, stimò che la massa del bosone mediatore fosse  $\sim 200$  MeV. In realtà la particella di Yukawa fu scoperta nel 1947, ed è il pione  $\pi$ , di massa  $m_\pi \simeq 140$  MeV. Sperimentalmente il pione risulta una particella pseudoscalare con parità negativa, ovvero con  $J^+ = 0^-$ , che si presenta in tre stati di carica:  $\pi^0, \pi^+, \pi^-$ . Le masse dei pioni sono estremamente vicine tra loro, e questo suggerisce che siano un tripletto di isospin, in analogia con quanto detto per il protone e il neutrone. Ora proviamo a scrivere un termine di interazione tra gli isospinori dei nucleoni  $\Psi$  con i pioni. Assumiamo che la Lagrangiana libera dei nucleoni sia quella di Dirac, ovvero  $\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi$ , con  $m$  massa del nucleone. Poiché l'interazione nucleare è invariante sotto parità e i pioni sono pseudoscalari, nel termine di accoppiamento la corrente fermionica conterrà la  $\gamma_5$ . Inoltre soddisfacendo l'invarianza sotto Lorentz e sotto SU(2) di isospin, si ha che il termine più semplice è un accoppiamento scalare:

$$\mathcal{L} = -ig\bar{\Psi}\gamma_5 \tau_i\Psi\pi_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.1)$$

In questo contesto  $g$  è la costante pseudoscalare di accoppiamento forte, e le matrici  $\tau_i$  sono le matrici di Pauli agenti nello spazio di isospin, mentre la denominazione  $\sigma_i$  viene riservata alle usuali matrici nello spazio dello spin. I campi pionici  $\pi^i$  sono

definiti con lo stesso formalismo utilizzato per  $W^-, W^+$ :

$$\begin{aligned}\pi^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^+ + \pi^-) \\ \pi^2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\pi^+ - \pi^-) \\ \pi^3 &= \pi^0\end{aligned}$$

Per fare emergere un possibile potenziale di interazione, si calcola l'ampiezza del processo di scambio di un pione tra due nucleoni. È necessario però considerare i nucleoni come fermioni dotati di spin e isospin, sui quali agisce l'operatore  $\boldsymbol{\tau}$ . In regime non relativistico si ottiene

$$V_\pi(\mathbf{q}) = -\frac{g^2}{4m^2}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} \quad (7.2)$$

I pedici numerici si riferiscono ai due nucleoni, mentre  $q$  è il quadrimpulso del bosone mediatore. Nello spazio delle coordinate il potenziale si ottiene mediante l'antitrasformata di Fourier, e si ha

$$V_\pi(\mathbf{r}) = -\frac{g^2}{4\pi m^2}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \quad (7.3)$$

Tramite alcune manipolazioni è possibile far emergere più chiaramente alcune caratteristiche. Per comodità sia  $y(r) := e^{-m_\pi r}/r$ . Il laplaciano si può valutare facilmente utilizzando l'equazione di Klein-Gordon

$$(-\nabla^2 + m_\pi^2)y(r) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$$

Ora aggiungiamo e sottraiamo un termine alla quantità  $(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla})y(r)$ , così da separare il contributo divergente della  $\delta$  dal resto.

$$\left[ (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}) - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\nabla^2 \right] y(r) + \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\nabla^2 y(r)$$

Ora riscriviamo ambo le parti, nella prima valutando il laplaciano e i gradienti, nella seconda utilizzando l'equazione di Klein-Gordon:

$$\frac{1}{3}S_{12}(\mathbf{r}) \left( m_\pi^2 + \frac{3m_\pi}{r} + \frac{3}{r^2} \right) y(r) + \frac{1}{3}[4\pi\delta(\mathbf{r}) - m_\pi^2 y(r)](\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

dove abbiamo definito la quantità  $S_{12}(\mathbf{r}) := 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$ , che ricorda l'operatore che descrive l'interazione tra due dipoli magnetici, a sottolineare che il potenziale che stiamo trattando non è a simmetria sferica.

$$\begin{aligned}V_\pi(\mathbf{r}) = -\frac{g^2}{12\pi m^2}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \left[ S_{12}(\mathbf{r}) \left( m_\pi^2 + \frac{3m_\pi}{r} + \frac{3}{r^2} \right) y(r) \right. \\ \left. + \left( m_\pi^2 y(r) - 4\pi\delta(\mathbf{r}) \right) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \right] \quad (7.4)\end{aligned}$$

Il potenziale così ottenuto descrive discretamente l'interazione tra nucleoni a distanze maggiori di  $\sim 1.5$  fm, mentre è necessario introdurre meccanismi diversi per distanze

piccole e medie [?]. Tali termini aggiuntivi si possono ottenere dalla fenomenologia, attraverso lo studio degli sfasamenti delle funzioni d'onda in processi di diffusione nucleone-nucleone a basse energie del fascio incidente, per evitare la produzione di pioni e altri mesoni. Ne risulta un potenziale  $v_{ij}$  non centrale, fortemente dipendente da spin e isospin e repulsivo a distanze sotto il femtometro, che permette una buona descrizione del deutone.

Il problema però sorge non appena si prova a trattare un nucleo a tre nucleoni, come l'elio  ${}^3\text{He}$ . Infatti poiché i suoi costituenti non sono particelle elementari, le interazioni possono coinvolgere tre [?] o più nucleoni contemporaneamente. È quindi possibile esprimere il potenziale come costituito da due termini:

$$V = \sum_{i < j} v_{ij} + \sum_{i < j < k} v_{ijk} \quad (7.5)$$

da cui l'Hamiltoniana non relativistica

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} v_{ij} + \sum_{i < j < k} v_{ijk} \quad (7.6)$$

In questo modo si trattano i nuclei come composti da più particelle, e pertanto i modelli nucleari che si rifanno a questa Hamiltoniana non relativistica sono detti a molti corpi, *Nuclear Many-Body Theory*, appunto NMBT. La risoluzione dell'equazione di Schrödinger associata a questa Hamiltoniana è però molto complicata. Gli autostati in energia si riescono a calcolare fino a  $A \leq 12$ , riproducendo discretamente gli spettri energetici dei nuclei soprattutto a bassi  $A$ . La trattazione però è in regime non relativistico, ed è valida quindi per descrivere un processo di diffusione per valori di impulso trasferito  $|\mathbf{q}| \lesssim 0.5 \text{ GeV}$ . Per avere una descrizione degli atomi più pesanti, o anche semplicemente di interazioni da trattare in regime relativistico, occorre fare delle approssimazioni. Così prendono corpo i modelli nucleari, che adottano una teoria che riproduca, almeno in parte, la fenomenologia.

## 7.2 Modelli empirici

Un possibile approccio alla trattazione dei nuclei consiste nel partire dalle osservazioni fenomenologiche, e trarre delle relazioni tra le osservabili quali energia e densità e caratteristici comportamenti dei nuclei.

### 7.2.1 Il modello a goccia di liquido

La densità nucleare si può considerare con buona approssimazione costante, soprattutto nella zona più interna. Questo come detto implica la presenza di una forza repulsiva a corto raggio. Ovviamente per tenere il nucleo unito esistono forze a corto-medio raggio attrattive. Tali caratteristiche sono peculiari delle molecole di un liquido incomprimibile, come ad esempio l'acqua. Nel caso dell'acqua l'energia di una sfera di liquido è data da un contributo negativo, e quindi attrattivo, dalle interazioni a corto-medio raggio tra le molecole, e da uno positivo dovuto alla tensione superficiale della goccia. In formule:

$$E = -\alpha N + 4\pi R^2 T \quad (7.7)$$

con  $N$  il numero delle molecole, e  $R$  il raggio della goccia, che per la densità costante risulta legato al numero di molecole:  $R \propto N^{1/3}$ . Quindi per un insieme di nucleoni possiamo scrivere una relazione di proporzionalità con l'energia, ricordando che il numero di nucleoni è  $A$ :

$$E = -\alpha A + \beta A^{2/3} \quad (7.8)$$

Consideriamo ora la presenza di  $Z$  protoni nel nucleo, e dunque di carica elettrica confinata in un volume  $V$ , che assumiamo sferico: risulta un'energia elettrostatica associata pari a

$$E_{el} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R} \quad (7.9)$$

che aumenta l'energia del sistema, e dunque

$$E = -\alpha A + \beta A^{2/3} + \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (7.10)$$

A questo punto insorgono le correzioni quantistiche dovute al principio di esclusione di Pauli: neutroni e protoni sono fermioni di spin  $1/2$ , quindi ci si aspetta che le configurazioni più stabili siano quelle con un numero pari di individui delle due specie. Dalle osservazioni questo è confermato, e addirittura amplificato, in quanto emerge una interazione di appaiamento che aumenta ulteriormente la stabilità: 135 nuclei con un numero pari di protoni e neutroni sono stabili, contro solo 4 che hanno un numero dispari di entrambi gli adroni. Dunque nel conto dell'energia si può aggiungere un termine che tenga conto di questo andamento:

$$E_{pauli} = \delta \frac{\kappa}{A^{1/2}} \quad \kappa = \begin{cases} 1 & N, Z \text{ dispari} \\ 0 & N \cdot Z \text{ dispari} \\ -1 & N, Z \text{ pari} \end{cases} \quad (7.11)$$

La dipendenza da  $A^{1/2}$  è determinata sperimentalmente.

Infine un ultimo contributo è dato dall'asimmetria tra le componenti del nucleo. A causa della repulsione coulombiana generata dai protoni nelle configurazioni stabili, al crescere del numero di massa aumenta di più il numero di neutroni rispetto a quello dei protoni. Infatti pensando che questi si dispongano, per specie, su livelli via via più alti in energia, i neutroni in eccesso si trovano sui livelli più alti, contribuendo maggiormente all'energia del sistema. Da notare che se parliamo di livelli, stiamo utilizzando un approccio quantistico, quindi teorico. In formule, si ha  $E_{as} \propto (N - Z)^2 \Delta$ , dove  $\Delta$  è la distanza in energia tra i livelli, che assumiamo costante. Questa si può approssimativamente considerare inversamente proporzionale al numero di nucleoni  $A$ , e quindi si può scrivere

$$E_{as} = \epsilon \frac{(N - Z)^2}{A} = \epsilon \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

In conclusione unendo tutti i contributi si ottiene l'energia del nucleo

$$E = -\alpha A + \beta A^{2/3} + \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \delta \frac{1}{A^{1/2}} - \epsilon \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (7.12)$$

Cambiando di segno e dividendo per il numero di massa, si ricava anche l'energia di legame per nucleone:

$$B_E = \alpha - \beta \frac{1}{A^{1/3}} - \gamma \frac{Z^2}{A^{4/3}} - \delta \frac{1}{A^{3/2}} - \epsilon \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} \quad (7.13)$$

Le equazioni ottenute sono dette *semiempiriche*, perché contengono termini, come gli ultimi due, derivanti da una trattazione quantistica. Tutti i parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  sono invece determinati sperimentalmente. Le formule hanno un'ottima aderenza ai dati sperimentali per i nuclei più pesanti, diciamo con  $A \leq 20$ , ma presenta grandi deviazioni in concomitanza con specifici valori di  $Z$  o del numero di neutroni. La spiegazione di questi necessita infatti una trattazione completamente quantistica.

### 7.3 Modelli a particelle indipendenti

I modelli a particelle indipendenti riprendono il problema a molti corpi, e lo semplificano notevolmente adottando un potenziale a campo medio. Riprendendo l'espressione (7.6) dell'Hamiltoniana non relativistica, aggiungiamo e sottraiamo un termine di potenziale di campo medio:

$$H = \left[ \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_i V_0(i) \right] + \left[ \sum_{i<j} v_{ij} + \sum_{i<j<k} v_{ijk} - \sum_i V_0(i) \right] = H_0 + V \quad (7.14)$$

In questo modo l'energia legata al potenziale  $V$  è sufficientemente piccola da poter essere trascurata in prima analisi, mentre si utilizza il modello a campo medio che risolve l'equazione di Schrödinger per  $H_0$ , data dalla somma di Hamiltoniane di singola particella.

$$H = \sum_i h(i) = \sum_i \left[ \frac{p_i^2}{2m} + V_0(i) \right] \quad (7.15)$$

L'Hamiltoniana  $h(i)$  genera dunque una base ortonormale di autostati di singola particella. In più l'autostato di  $H_0$  sarà un determinante di Slater delle funzioni d'onda di singola particella per garantirne l'antisimmetria per scambio di particelle.

#### 7.3.1 Gas di Fermi

Il modello a gas di Fermi, o Relativistic Fermi-Gas Model (RFGM), descrive il nucleo come un sistema infinito di nucleoni non interagenti tra loro. L'approccio è quasi più empirico che teorico: il modello si basa sull'osservazione che i nucleoni sono confinati in uno spazio ristretto, senza descrivere il potenziale dell'Hamiltoniana. Esso comunque deve esserci, in quanto l'energia dei singoli nucleoni deve risultare negativa, affinché esista il nucleo come sistema legato. Il potenziale è pensato come una buca quadrata. Inoltre viene trascurata completamente l'interazione coulombiana. Partire da un sistema infinito conferisce l'invarianza traslazionale, permettendo una trattazione mediante onde piane. Dunque le funzioni d'onda per le singole particelle sono

$$\phi_a(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}} \chi_{s_a} \chi_{t_a} \quad (7.16)$$



dove  $p_a$  è l'impulso della particella  $a$  e le  $\chi$  rappresentano gli usuali spinori di Pauli, mentre i pedici  $s$  e  $t$  indicano rispettivamente la terza componente dello spin e dell'isospin. Ora consideriamo il nucleo come una sfera di raggio  $R$  a densità costante. Assumiamo valida la relazione empirica  $R = r_0 A^{1/3}$ , con  $r_0 = 1.12$  fm. Quindi la densità risulta

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3}{4\pi r_0^3} = 0.17 \pm 0.02 \text{ fm}^{-3} \quad (7.17)$$

La densità del sistema si può ricavare anche utilizzando le funzioni d'onda di singola particella, infatti vale:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a^A |\phi_a(\mathbf{r})|^2 \quad (7.18)$$

Poiché stiamo trattando fermioni di spin 1/2, vale il principio di esclusione di Pauli. Inoltre solo l'impulso  $p$  distingue le singole particelle. Dunque risulta che saranno occupati tutti gli stati a energie più basse, fino a un certo valore di energia, detto *di Fermi*. A questa energia massima corrisponde l'impulso di Fermi  $p_F$ , caratteristico dei nucleoni più energetici. Tale energia permette di quantificare la profondità della buca di potenziale che caratterizza il nucleo: la somma tra i valori assoluti dell'energia di legame per nucleone e di quella di Fermi ne dà un'ottima stima. La densità risulta essere

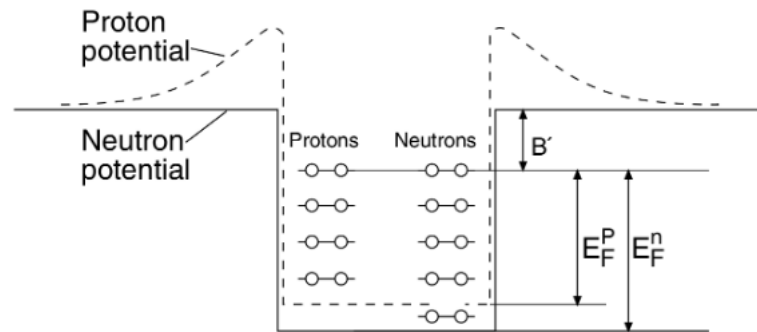
$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \sum_{|p_a| \leq |p_F|}^A |\phi_a(\mathbf{r})|^2 = \int_0^{p_F} d\mathbf{p}_a \frac{e^{-i\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s_a} \chi_{s_a}^\dagger \chi_{s_a} \sum_{t_a} \chi_{t_a}^\dagger \chi_{t_a} \\ &= \frac{4 \cdot 4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} p_a^2 dp_a = \frac{2}{3\pi^2} p_F^3 \end{aligned} \quad (7.19)$$

dove si è utilizzato il fatto che le sommatorie sulle componenti  $z$  degli spinori portano un fattore 2 ciascuna, e in più nella seconda riga si è passati alle coordinate polari. Da qui combinando le (7.17) e (7.19) otteniamo il valore dell'impulso e dell'energia di Fermi

$$p_F = \left( \frac{3\pi^2 \rho}{2} \right)^{1/3} = \left( \frac{9\pi}{8r_0^3} \right)^{1/3} = 1.36 \text{ fm}^{-1} = 250 \text{ MeV} \quad (7.20)$$

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = 38.35 \text{ MeV} \quad (7.21)$$

Da notare che l'impulso di Fermi non dipende dal numero di massa del nucleo. Questo modello è comodo perché a una semplicità di conti affianca dei risultati soddisfacenti per quanto riguarda alcune caratteristiche: descrive bene il comportamento dei nuclei in esperimenti di diffusione elettronica in regime quasi elastico intorno al picco della sezione d'urto, e dà una stima dell'impulso di Fermi, una quantità importante per la descrizione del nucleo. D'altra parte trascura completamente le interazioni tra i nucleoni, senza le quali alcuni aspetti dei nuclei non sono spiegabili.



**Figura 7.2.** Schematizzazione della buca di potenziale di un nucleo a 8 protoni e 10 neutroni. La differenza tra  $N$  e  $Z$  comporta che vi siano due diverse energie di Fermi, una per i protoni e una per i neutroni. L'immagine è presa da [?]

### Crisi del modello per nuclei leggeri

L'approssimazione di densità costante è parzialmente consistente per nuclei pesanti, come ad esempio il piombo, dove la regione interna nucleare è grande. Per nuclei leggeri invece l'ipotesi non è più valida, e dunque si ricorre ad un altro approccio per ottenere informazioni. Infatti non si passa attraverso la densità: tramite studi di diffusione sui nuclei si ricava l'impulso di Fermi, perché corrisponde alla massima o minima energia nel centro di massa a seconda della direzione del moto del nucleone. Ad esempio per il carbonio  $^{12}\text{C}$  si ottiene  $p_F = 225$  MeV. Studiando invece processi nei quali si estrae un nucleone dal nucleo si ricava l'energia di legame,  $-B_E = 7.4185$  MeV, e dalla somma dei moduli dell'energia di Fermi e di quella di legame per nucleone si ottiene  $U \simeq 35$  MeV, la profondità della buca di potenziale. Il sistema è schematizzato in Figura 7.2.

#### 7.3.2 Il modello a strati

Nello studio dei nuclei, come detto in precedenza, si incontrano configurazioni particolari che conferiscono caratteristiche specifiche. Queste si presentano in corrispondenza di alcuni valori specifici del numero di protoni, di neutroni, o di entrambi. Questi valori sono detti *numeri magici*. I nuclei che hanno tali configurazioni sono anch'essi detti *magici* o *doppiamente magici* se sia il numero dei neutroni che quello dei protoni rientra nei valori specifici menzionati prima. I numeri magici sono:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

Le caratteristiche particolari consistono, tra le altre, in:

- alta energia di legame per nucleone
- abbondanza di isotopi, pertanto maggiore stabilità
- assenza di quadrupolo elettrico, quindi simmetria sferica
- grande distanza in energia tra lo stato fondamentale del nucleo e il primo eccitato

L'idea di fondo è quella di introdurre un campo medio a simmetria sferica, che rappresenti l'interazione tra il singolo nucleone e tutti gli altri. Tentativi di descrivere questo potenziale sono stati fatti tramite modelli a buca quadrata di potenziale e a oscillatore armonico. Risultati migliori si hanno mescolando questi due approcci, ottenendo un potenziale centrale intermedio tra oscillatore armonico e buca. Un altro modello valido è il potenziale proposto da Wooden e Saxon negli anni '50:

$$V_{WS}(r) = -\frac{U_0}{1 + e^{\frac{1}{a}(r-R)}} \quad (7.22)$$

dove i due parametri introdotti sono ottenuti sperimentalmente, con valori tipici

$$U_0 \sim 50 \text{ MeV} \quad a \sim 0.5 \text{ fm}$$

Tale potenziale risulta più aderente alla realtà in quanto tiene conto di alcune caratteristiche importanti dei nucleoni nel nucleo: essi sono praticamente liberi, dunque il potenziale deve essere quasi costante, mentre deve essere attrattivo sulla superficie. In più deve prevedere il continuo, per la possibilità di emissione di nucleoni.

In ogni caso solo l'introduzione di un termine di interazione spin-orbita riesce a ottenere la fenomenologia dei numeri magici:

$$-\alpha \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

Nel caso del potenziale Wooden-Saxon vale

$$\alpha = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} U_{WS}(r)$$

L'operatore momento angolare è un buon operatore, nel senso che poiché il potenziale è centrale, le autofunzioni  $\phi$  dell'Hamiltoniana sono anche autofunzioni di  $\mathbf{L}^2$ , e, scegliendo  $z$  come asse di quantizzazione, di  $L_z$ . In più devono essere autofunzioni dello spin e dell'isospin, e delle loro componenti  $z$ . Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 |\phi(r, l, s)\rangle &= \hbar^2 l(l+1) |\phi(r, l, s)\rangle \\ \mathbf{S}^2 |\phi(r, l, s)\rangle &= \hbar^2 \frac{3}{4} |\phi(r, l, s)\rangle \end{aligned}$$

dove nella seconda equazione si è usato il fatto che si stanno trattando fermioni di spin 1/2.

Il prodotto tra operatori  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  si scrive più comodamente usando il momento angolare totale  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . Quindi si usa

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)$$

Passando agli autovalori, in unità naturali, si ottiene

$$\frac{1}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]$$

Dunque il termine di spin-orbita rimuove la degenerazione su  $l$ , e introduce la dipendenza da  $j$ : a un dato valore di  $l$  corrispondono due livelli in energia, corrispondenti ai valori di  $j = l \pm 1/2$ . Resta invece la degenerazione sull'isospin.

L'energia dovuta all'interazione spin-orbita si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} V_{LS} |\phi\rangle &= -\frac{l}{2} \alpha |\phi\rangle & j = l + \frac{1}{2} \\ V_{LS} |\phi\rangle &= \frac{l+1}{2} \alpha |\phi\rangle & j = l - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi gli stati a spin e momento angolare paralleli sono favoriti rispetto al caso in cui sono antiparalleli. Utilizzando il potenziale intermedio tra buca finita e oscillatore armonico con l'aggiunta del termine di spin-orbita, si ottiene uno schema di livelli energetici che riproduce le sequenze dei numeri magici. Le corrispondenti configurazioni stabili sono date non dal riempimento di uno strato, ma piuttosto dal riempimento di un gruppo di livelli energeticamente vicini.

La validità e i limiti del modello a strati sono stati largamente studiati tramite esperimenti di scattering con elettroni. Gli studi da una parte confermano che il modello ha un'accuratezza di circa l'80%, dall'altra che ci sono importanti deviazioni dovute a effetti di correlazione tra due o più nucleoni, trascurati nell'approssimazione di campo medio. L'esempio più eclatante è l'assenza dell'interazione di appaiamento, inserita precedentemente nella formula semi-empirica del modello a goccia di liquido, che favorisce stati con un numero pari di protoni e neutroni. Essa spiega infatti il momento angolare dei nuclei: nullo quando si hanno due numeri pari delle popolazioni, uguale alla composizione dei nucleoni non appaiati altrimenti. È evidente però che un'interazione del genere viene perduta nell'ipotesi di particelle indipendenti.

## Capitolo 8

# Diffusione di neutrini su un nucleo

Nella quasi totalità degli esperimenti che riguardano i neutrini il bersaglio è rappresentato da un nucleo, non un neutrone o protone libero. Questo comporta delle complicazioni nella descrizione del processo e nel calcolo della sezione d'urto, poiché subentrano gli effetti del legame nucleare e della fisica dei nuclei. Per questo si introducono alcune approssimazioni che semplificano la trattazione dell'interazione neutrino-nucleo. Essa è descritta a partire dai modelli nucleari illustrati precedentemente. Nello specifico utilizzeremo i modelli a particelle indipendenti, mettendoli a confronto.

Consideriamo il processo di diffusione

$$\nu_l + A \rightarrow l^- + X$$

dove il neutrino  $\nu_l$  di quadrimpulso  $k^\mu = (E, \mathbf{k})$  interagisce con un nucleo  $A$  di massa  $M_A$  per ottenere un leptone  $l^-$  di impulso  $k'^\mu = (E', \mathbf{k}')$  e uno stato  $X$ , caratterizzato dal quadrimpulso  $P_X^\mu = (E_X, \mathbf{P}_X)$ . La sezione d'urto differenziale del processo risulta simile a quella calcolata in precedenza nello scattering CCQE neutrino-neutrone, ma con una differenza nel tensore adronico. Per ottenerla ripartiamo dalla definizione generica di  $d\sigma$ , nel sistema di riferimento nel quale il nucleo bersaglio è fermo.

$$d\sigma = (2\pi)^4 \frac{1}{E_k v_{\text{rel}}} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 E_{k'}} \cdot |\tilde{\mathcal{M}}|^2 \quad (8.1)$$

La velocità relativa nel sistema di riferimento scelto è la velocità dei neutrini incidenti, che consideriamo a massa nulla, da cui  $v_{\text{rel}} = 1$ . Infine cambiamo la variabile di integrazione sull'impulso leptónico, passando all'energia di questo, utilizzando

$$E_{k'}^2 = m_l^2 + |\mathbf{k}'|^2 \rightarrow E_{k'} dE_{k'} = |\mathbf{k}'| d|\mathbf{k}'|$$

Dunque

$$d\mathbf{k}' = d\Omega_{k'} |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| = d\Omega_{k'} |\mathbf{k}'| E_{k'} dE_{k'}$$

In questo caso l'ampiezza di Feynman  $|\tilde{\mathcal{M}}|^2$  è definita come

$$|\tilde{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G^2}{8} L_{\mu\nu} W_A^{\mu\nu} \quad (8.2)$$

Il tensore adronico nucleare  $W_A$  tiene conto di tutti i possibili stati finali  $X$ , e include tutti i fattori di normalizzazione degli stati fisici che coinvolge. Questo perchè non sappiamo a priori come trattare la parte nucleare. Il fattore di normalizzazione  $E_{k'}$  legato al leptone uscente infatti emerge dal formalismo relativistico utilizzato nella corrente leptonica e nello stato finale del leptone. Inoltre  $W_A$  contiene in sé la  $\delta$  di Dirac della conservazione del quadri-impulso,  $\delta^4(M_A + k - P_X - k')$ . La sezione d'urto differenziale risulta quindi

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_{k'} dE_{k'}} = \frac{\pi G^2}{4} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} L_{\mu\nu} W_A^{\mu\nu} \quad (8.3)$$

con

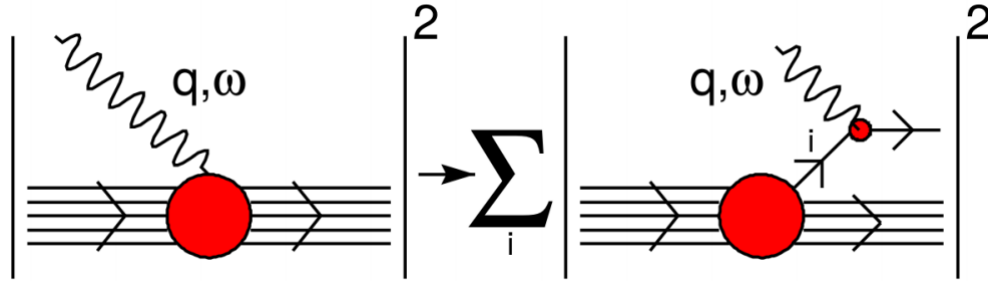
$$L^{\mu\nu} = 8 \left( k'^{\mu} k^{\nu} - k' k g^{\mu\nu} + k'^{\nu} k^{\mu} + i k'_{\alpha} k_{\beta} \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \right)$$

il tensore leptonic ripreso da (6.8) senza i termini delle masse e senza il fattore quattro a denominatore, mentre  $W_A^{\mu\nu}$  contiene tutte le informazioni sulla dinamica nucleare:

$$W_A^{\mu\nu} := \sum_X \langle A | (J_A^{\mu})^{\dagger} | X \rangle \langle X | J_A^{\nu} | A \rangle \delta^4(M_A + q - P_X) \quad (8.4)$$

La sommatoria comprende tutti i possibili stati finali adronici  $|X\rangle$  del processo, mentre  $|A\rangle$  è lo stato iniziale del nucleo bersaglio.  $J_A$  indica la corrente adronica associata al nucleo, la *corrente nucleare*. La normalizzazione utilizzata è quella non relativistica.  $q = (\omega, \mathbf{q})$  è il quadriimpulso trasferito, che vale  $q := k' - k$ .

## 8.1 Approssimazione Impulsiva



**Figura 8.1.** Schema rappresentativo dell'approssimazione impulsiva. L'immagine è presa da [?].

La descrizione della dinamica nucleare tramite NMBT è possibile solo in regime non relativistico, e per nuclei leggeri. Quando la trattazione non relativistica non è più valida o si considerano nuclei pesanti, la descrizione dei processi di interazione necessita di approssimazioni. L'approssimazione impulsiva (IA) [?] consiste nell'assumere le seguenti ipotesi:

- il nucleo bersaglio è schematizzabile come un insieme di nucleoni distinti, dunque l'interazione avviene con uno solo di essi;
- le particelle adroniche prodotte dall'interazione e il nucleo che rincula non interagiscono tra loro.

Non sono quindi compresi l'antisimmetrizzazione dello stato che descrive il nucleone emesso e le interazioni nello stato finale, che sono discusse successivamente.

L'approssimazione impulsiva si basa sulla risoluzione spaziale del bosone mediatore del processo debole. Infatti se la lunghezza d'onda associatagli  $\lambda \sim 1/|\mathbf{q}|$  è inferiore o comunque paragonabile alla distanza media tra i nucleoni del bersaglio, l'interazione coinvolge prevalentemente il singolo nucleone, mentre gli altri hanno solo il ruolo di spettatori. Ciò avviene per valori di  $-q^2 \gtrsim 0.4$  GeV. Il risultato è la descrizione del processo di diffusione sui nuclei tramite somma incoerente di processi elementari con i singoli costituenti nucleari, con la complicazione che non sono particelle libere, bensì disposte in stati legati. Così la corrente nucleare è data semplicemente dalla somma delle correnti dei singoli nucleoni, mentre lo stato finale  $X$  è il prodotto diretto tra lo stato adronico  $x$  creato nel vertice debole, con impulso  $\mathbf{p}_x$ , ad esempio il protone uscente nello scattering CCQE neutrino-nucleo, e  $R$  il nucleo privato di un nucleone, che rincula con momento  $\mathbf{p}_R$ .

$$J_A^\mu = \sum_i^A j_i^\mu \quad (8.5)$$

$$|X, \mathbf{P}_X\rangle = |x, \mathbf{p}_x\rangle \otimes |R, \mathbf{p}_R\rangle = |x, \mathbf{p}_x; R, \mathbf{p}_R\rangle \quad (8.6)$$

La somma sugli stati finali si fattorizza, diventando

$$\sum_X |X\rangle \langle X| = \sum_x \int \frac{d\mathbf{p}_x}{(2\pi)^3} |x, \mathbf{p}_x\rangle \langle x, \mathbf{p}_x| \sum_R \int \frac{d\mathbf{p}_R}{(2\pi)^3} |R, \mathbf{p}_R\rangle \langle R, \mathbf{p}_R| \quad (8.7)$$

I fattori  $(2\pi)^3$  compaiono dalla quantizzazione dello spazio a volume finito degli impulsi accessibili. Omettiamo tutti i termini di volume  $V$  che dovrebbero apparire in quanto la sezione d'urto, dopo semplificazioni, non vi dipende. Inserendo questa espressione nella formula del tensore nucleare (8.4), valutiamo i termini che lo compongono, scrivendo le correnti dei singoli nucleoni al posto di  $J_A^\mu$ :

$$\langle A | J_A^\mu | X \rangle = \sum_i \langle A | j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x; R, \mathbf{p}_R \rangle \quad (8.8)$$

A questo punto notiamo che le correnti  $j_i$  non agiscono sui nuclei  $R$  e  $A$ , perciò introduciamo un insieme completo di funzioni d'onda dei singoli nucleoni in normalizzazione non relativistica,  $|N, \mathbf{p}\rangle$ , per le quali vale la relazione di completezza<sup>1</sup>, ottenendo:

$$\sum_i \int d\mathbf{p} \langle A | N, \mathbf{p}; R, \mathbf{p}_R \rangle \sqrt{\frac{m m_x}{E_{\mathbf{p}} E_x}} \langle N, \mathbf{p} | j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x \rangle$$

Così i singoli nucleoni rappresentano degli stati virtuali intermedi nel processo. Notiamo inoltre la comparsa di termini di normalizzazione  $\sqrt{m/E}$ , dovuti al fatto che richiediamo che l'operatore associato alla corrente del nucleone sia espresso nel formalismo relativistico, pertanto facciamo lo stesso con gli stati adronici  $|N\rangle$ ,  $|x\rangle$ .  $m_x$  e  $E_x$  sono la massa e l'energia associate allo stato finale  $x$ , mentre  $m$  e  $E_{\mathbf{p}}$  al nucleone  $N$ .

L'integrazione sui possibili  $\mathbf{p}$  comporta la sostituzione di  $\mathbf{p}$  in  $-\mathbf{p}_R$ . Il primo braket

<sup>1</sup>  $\int d\mathbf{p} |N, \mathbf{p}\rangle \langle N, \mathbf{p}| = 1$

produce un  $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{p}_R)$  per la conservazione dell'impulso, in quanto il nucleo  $A$  è in quiete.

$$\langle A | J_A^\mu | X \rangle = (2\pi)^3 \langle A | N, -\mathbf{p}_R; R, \mathbf{p}_R \rangle \sum_i \sqrt{\frac{m_x}{E_x}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \langle N, -\mathbf{p}_R | j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x \rangle \quad (8.9)$$

Dunque l'intero tensore nucleare si può riscrivere come

$$\begin{aligned} W_A^{\mu\nu} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{x,R} \int d\mathbf{p}_x d\mathbf{p}_R |\langle A | N, -\mathbf{p}_R; R, \mathbf{p}_R \rangle|^2 \\ &\quad \cdot \sum_i \sqrt{\frac{m_x}{E_x}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \langle N, -\mathbf{p}_R | j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x \rangle \langle x, \mathbf{p}_x | j_i^\nu | N, -\mathbf{p}_R \rangle \\ &\quad \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_x - \mathbf{p}_R) \delta(M_A + \omega - E_x - E_R) \end{aligned} \quad (8.10)$$

dove si è separata la  $\delta^4$  per comodità.  $E_R$  è l'energia associata al nucleo privato di un nucleone che rincula, mentre  $E_x$  è l'energia dello stato finale adronico  $x$ .

Usando l'identità

$$\delta(M_A + \omega - E_x - E_R) = \int dE \delta(E - m + M_A - E_R) \delta(\omega - E + m - E_x)$$

possiamo definire la *funzione spettrale* del nucleo bersaglio  $P$ , e dove usiamo l'uguaglianza  $\mathbf{p} = -\mathbf{p}_R$

$$P(\mathbf{p}, E) = \sum_R |\langle A | N, \mathbf{p}; R, -\mathbf{p} \rangle|^2 \delta(E - m + M_A - E_R) \quad (8.11)$$

Questa rappresenta la distribuzione di probabilità di trovare un nucleone con impulso  $\mathbf{p}$  ed energia  $E$  all'interno del nucleo. In realtà l'energia  $E$  che compare nella funzione spettrale è l'*energia di rimozione* del nucleone, ovvero quella necessaria per estrarlo dal nucleo.

Inoltre emerge la definizione del tensore adronico  $W^{\mu\nu}$  utilizzata per lo scattering neutrino-neutrone, anche se inclusiva di tutti i possibili stati finali. Anche qui vale  $\mathbf{p} = -\mathbf{p}_R$ . Eseguiamo l'integrazione su  $\mathbf{p}_x$ , che grazie alla  $\delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_x - \mathbf{p}_R)$  ha solo l'effetto di sostituire a  $\mathbf{p}_x$  la quantità  $\mathbf{q} + \mathbf{p}$ .

$$W_i^{\mu\nu} = \sum_x \frac{m m_x}{E_{\mathbf{p}} E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}} \langle N, \mathbf{p} | j_i^\mu | x, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle \langle x, \mathbf{p} + \mathbf{q} | j_i^\nu | N, \mathbf{p} \rangle \delta(\tilde{\omega} + E_{\mathbf{p}} - E_{|\mathbf{q}+\mathbf{p}|}) \quad (8.12)$$

con  $E_{|\mathbf{q}+\mathbf{p}|} := E_x$ . Il pedice  $i$  indica il nucleone coinvolto, e abbiamo introdotto la nuova quantità  $\tilde{\omega}$ , definita come

$$\tilde{\omega} = \omega + m - E - E_{\mathbf{p}}$$

In questi passaggi si vede nel dettaglio cosa comporta l'approssimazione impulsiva. Infatti il tensore adronico  $W_i^{\mu\nu}$  così calcolato descrive un processo che coinvolge solo l' $i$ -esimo nucleone del nucleo, trattandolo come libero, con impulso associato  $p = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ . Invece l'energia scambiata risulta essere  $\tilde{\omega}$ , e non  $\omega$ : questa differenza tiene conto del fatto che una parte dell'energia che il neutrino incidente scambia con il bersaglio va ad eccitare il nucleo. È particolarmente evidente se si valuta



$\tilde{\omega}$  in approssimazione non relativistica, quando  $E_{\mathbf{p}} \simeq m$ . Si ha che  $\tilde{\omega} \simeq \omega - E$ , ovvero l'energia assorbita dal nucleo corrisponde all'energia di rimozione del nucleone.

Tornando al tensore nucleare, possiamo riscriverlo in questo modo:

$$W_A^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_i \int d\mathbf{p} dEP(E, \mathbf{p}) \frac{1}{4E_{\mathbf{p}}E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}} W_i^{\mu\nu}(p, \tilde{q}) \quad (8.13)$$

con  $\tilde{q} := (\tilde{\omega}, \mathbf{q})$ .

Nella definizione di  $W_A^{\mu\nu}$  appena scritta abbiamo fatto emergere la definizione del tensore adronico data in precedenza in (6.10), ma senza la quantità a denominatore, come fatto per  $L^{\mu\nu}$ . Ciò comporta la semplificazione dei termini delle masse e la comparsa di un fattore 4 a denominatore.  $W_i^{\mu\nu}$  è dunque

$$W_i^{\mu\nu}(p, \tilde{q}) = \left[ W_1(\tilde{q}^2) g^{\mu\nu} + W_2(\tilde{q}^2) p^\mu p^\nu + W_3(\tilde{q}^2) i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} p_\alpha \tilde{q}_\beta \right. \\ \left. + W_4(\tilde{q}^2) \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu + W_5(\tilde{q}^2) (\tilde{q}^\nu p^\mu + \tilde{q}^\mu p^\nu) \right] \quad (8.14)$$

Sottolineamo il fatto che i fattori  $W_i$  che compaiono in questa espressione non sono necessariamente quelli definiti nel Capitolo 6, ma possono anche descrivere processi con produzione di risonanze o di scattering profondamente anelastico. Da qui in avanti però analizziamo solo il canale quasi elastico.

Infine esprimiamo la sezione d'urto differenziale per l'interazione neutrino-nucleo come:

$$\frac{d^2\sigma_{\text{IA}}}{d\Omega_{k'} dE_{k'}} = \frac{G^2}{32\pi^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \int d\mathbf{p} dEP(E, \mathbf{p}) \frac{1}{4E_{\mathbf{p}}E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}} \sum_i L_{\mu\nu} W_i^{\mu\nu} \quad (8.15)$$

È possibile esprimere questa sezione d'urto in funzione della sezione d'urto elementare  $\sigma_i$  corrispondente all'interazione neutrino-nucleone libero, calcolata in precedenza<sup>2</sup> (6.14), meglio conosciuta.

$$\frac{d^2\sigma_{\text{IA}}}{d\Omega_{k'} dE_{k'}} = \int d\mathbf{p} dEP(E, \mathbf{p}) \sum_i \frac{d^2\sigma_i}{d\Omega_{k'} dE_{k'}} \delta(\omega - E + m - E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}) \quad (8.16)$$

La sommatoria che compare in (8.16) tiene conto del fatto che in un nucleo ci sono più potenziali bersagli per il protettile. Nel caso di interazione CCQE di un neutrino con il nucleo, il numero di bersagli è il numero di neutroni. Per esempio nel carbonio  $^{12}\text{C}$  ci sono sei neutroni, e quindi nella formula la sommatoria comporterà la comparsa di un fattore moltiplicativo pari a sei.

Di seguito esplicitiamo la sezione d'urto per nucleone presente nella (8.16), definita senza la funzione  $\delta$  della conservazione dell'energia e senza il fattore del flusso.

$$\frac{d^2\sigma_{\text{nucleone}}}{d\Omega_{k'} dE_{k'}} = \frac{G^2}{32\pi^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \frac{1}{4E_{\mathbf{p}}E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (8.17)$$

<sup>2</sup>In realtà si hanno delle differenze dovute alla definizione dei tensori adronici, che hanno un complessivo fattore sedici di differenza.

L'assenza del termine del flusso, cioè la velocità relativa tra le due particelle interagenti è motivata nelle righe che seguono. Nella sezione d'urto nucleare iniziale questa riguarda i neutrini e il nucleo in quiete, e risulta quindi pari alla velocità della luce, cioè uno in unità naturali. Nella sezione d'urto elementare in cui consideriamo l'interazione neutrino-nucleone, quest'ultimo non è in quiete e di conseguenza la velocità relativa richiede il conto esplicito. Fortunatamente questo termine si elimina con il rapporto tra il flusso del nucleo e quello del singolo nucleone che andrebbe nella sezione d'urto nucleare, e quindi viene omissa direttamente.

## 8.2 Funzione spettrale nucleare

Analizziamo la funzione spettrale nucleare che compare nel calcolo della sezione d'urto. Essa descrive la distribuzione dell'impulso e dell'energia di un nucleone nel nucleo. Pertanto dipende dal modello che si usa per descrivere il nucleo. Vediamo cosa succede prendendo il gas di Fermi e un modello inclusivo della correlazione dinamica basato sul modello a strati [?]. Poiché saranno più volte nominati, da qui in avanti si farà loro riferimento con le sigle RFGM, *Relativistic Fermi Gas Model*, e SFM, *Spectral Function Model*.

### 8.2.1 Gas di Fermi (RFGM)

In questo modello i nucleoni sono all'interno di una buca di potenziale, e occupano tutti gli stati con energia inferiore all'energia di Fermi, corrispondente all'impulso di Fermi. La distribuzione è uniforme: tutti i valori dell'impulso sono equiprobabili fino al valore limite di Fermi, mentre l'energia è vincolata dall'impulso e dalla profondità della buca di potenziale  $U$ . Ricordiamo inoltre che la  $E$  della funzione spettrale è l'energia di rimozione, dunque ha segno invertito rispetto all'energia totale (cinetica e potenziale) del nucleone. In formule:

$$P(E, \mathbf{p}) = \frac{3}{4\pi p_F^3} \Theta(p_F - |\mathbf{p}|) \delta(E_{\mathbf{p}} - U + E) \quad (8.18)$$

dove  $\Theta$  è la funzione gradino di Heaviside. Questa funzione annulla la funzione spettrale per valori dell'impulso maggiori di quello di Fermi. Dall'analisi dello scattering di elettroni sui nuclei si è osservato che per effetti di correlazione dinamica tra i singoli nucleoni alcuni di essi possono eccitarsi e raggiungere stati virtuali anche nel continuo, e in generale ad impulsi maggiori di  $p_F$ . Questo purchè siano conservati i numeri quantici del nucleo, come ad esempio l'impulso e il momento angolare. Una prova di ciò è che questi stati virtuali sono almeno di due nucleoni, perchè se l'eccitazione coinvolgesse un solo nucleone si avrebbe un impulso o un momento angolare totale differente.

### 8.2.2 Modello a Strati con Correlazione Dinamica (SFM)

Il modello a strati non impone vincoli sull'impulso, ma non include comunque effetti di correlazione tra i singoli nucleoni. Considerando ad esempio il potenziale di campo

medio Woods-Saxon, è possibile determinare le autofunzioni dell'Hamiltoniana. Di conseguenza la funzione spettrale si può calcolare come

$$P(E, \mathbf{p}) = \sum_n |\phi_n(\mathbf{p})|^2 \delta(E - E_n) \quad (8.19)$$

dove  $\phi_n(\mathbf{p})$  è la funzione d'onda Woods-Saxon di singola particella nello spazio dei momenti, corrispondente al livello  $n$ -esimo con energia associata  $E_n$ . In questo caso la presenza di nucleoni con impulso maggiore di quello di Fermi è fortemente sfavorita.

È possibile ampliare il modello in modo che tenga conto anche di effetti che il campo medio non può descrivere. L'approccio dell'*approssimazione di densità locale*, LDA, si basa sul modello a strati con l'aggiunta di effetti di correlazione. Tale approccio prevede che la funzione spettrale nucleare abbia come contributo principale quello derivante dal modello a strati, che ricopre circa l'80% del totale, secondo la formula:

$$P_{\text{SM}}(E, \mathbf{p}) = \sum_n Z_n |\phi_n(\mathbf{p})|^2 F_n(E - E_n) \quad (8.20)$$

dove  $Z_n$  è la costante di normalizzazione, detta fattore spettroscopico, e  $F_n(E - E_n)$  è una lorentziana che descrive l'ampiezza in energia. Invece gli effetti di correlazione portano a

$$P_{\text{corr}}(E, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) P_{\text{corr}}^{NM}(E, \mathbf{p}; \rho = \rho(\mathbf{r})) \quad (8.21)$$

contributo calcolato in [?]. Come si può vedere dalla formula si tiene conto della non uniformità della materia nucleare in quanto la densità  $\rho$  è esplicitamente dipendente dalla posizione, e  $P_{\text{corr}}^{NM}$  è il termine di correlazione della funzione spettrale che si avrebbe con densità costante  $\rho$ . Questa modellizzazione della correlazione dinamica si basa sull'ipotesi che gli effetti di superficie e degli strati del nucleo non influenzino la dinamica nucleare a corto raggio. Tale assunzione è consolidata dalla distribuzione dei momenti dei nucleoni, ottenuta dalla marginalizzazione della funzione spettrale  $P(E, \mathbf{p})$  sull'energia  $E$  [?], visibile in figura 8.2

La funzione di distribuzione complessiva ottenuta dal modello LDA è dunque data dalla somma dei due contributi

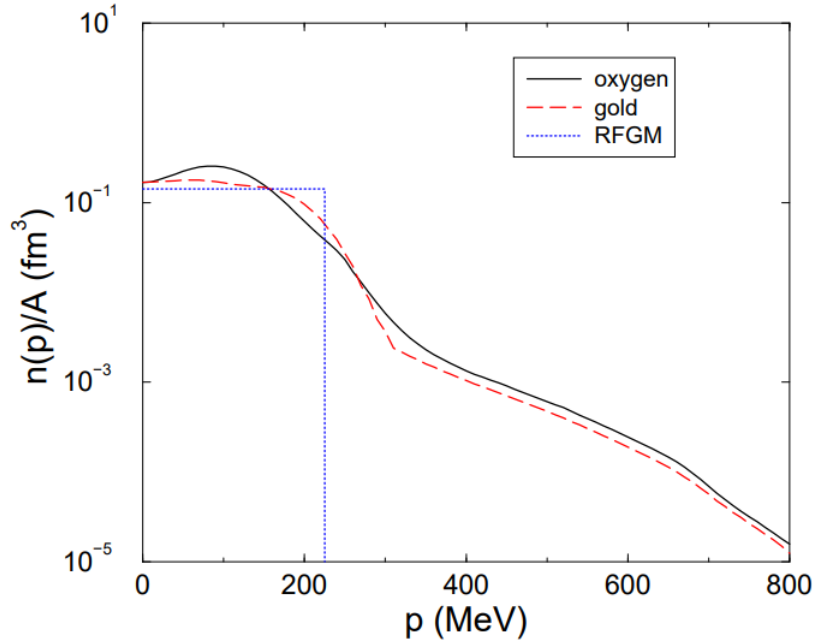
$$P_{\text{LDA}}(E, \mathbf{p}) = P_{\text{SM}}(E, \mathbf{p}) + P_{\text{corr}}(E, \mathbf{p}) \quad (8.22)$$

Il fattore spettroscopico  $Z$  assume valori tali da garantire la normalizzazione della funzione di distribuzione, in modo che integrata su tutti i possibili impulsi ed energie dia probabilità unitaria.

È da notare che il contributo dal modello a strati è importante soprattutto a impulsi inferiori a quello di Fermi e diventa praticamente nullo oltre, poiché in questa regione domina la correlazione dinamica.

### Confronto RFGM e SFM

Confronti tra il RFGM e il SFM sono stati fatti da [?], studiando la capacità di questi modelli per descrivere l'interazione di leptoni sui nuclei di carbonio, e da [?],



**Figura 8.2.** Distribuzione degli impulsi calcolata con il RFGM (linea tratteggiata a punti) e con la SFM per l'oro (linea tratteggiata),  $A = 197$ , e l'ossigeno (linea continua),  $A = 16$ . Ad alti valori dell'impulso  $n(p)/A$  risulta pressoché indipendente dal numero di massa  $A$ . L'immagine è presa da [?].

sulla stessa tipologia di processi ma su bersagli di ossigeno, e hanno mostrato come il RFGM sia inadatto allo scopo. Ciononostante è ancora largamente utilizzato per la descrizione della dinamica dei nucleoni in moltissime analisi dei dati sperimentali.

### 8.2.3 Pauli Blocking

Dal modello del nucleo come gas di Fermi si ottiene facilmente un'idea del perchè l'impulso di Fermi è legato ad un fenomeno importante, il cosiddetto *Pauli blocking*, PB. Infatti quando un nucleone è bersaglio di un qualsiasi proiettile, se non raggiunge un impulso superiore all'impulso di Fermi, l'interazione non avviene. Questo perchè il nucleone nello stato finale andrebbe a occupare un livello energetico che è già occupato nel nucleo, evento che non può accadere per il principio di esclusione di Pauli. Tale fenomeno va tenuto in considerazione in tutti i modelli adottati. Basta introdurre una  $\Theta$  di Heaviside che impone questa condizione sull'impulso finale

$$P(E, \mathbf{p}) \rightarrow P(E, \mathbf{p})\Theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - \bar{p}_F) \quad (8.23)$$

con  $\bar{p}_F$  l'impulso di Fermi mediato sul nucleo. Gli effetti del Pauli blocking sono importanti soprattutto a bassi valori dell'impulso scambiato, in quanto l'impulso del nucleone uscente può risultare inferiore a  $\bar{p}_F$ . Infatti il Pauli blocking sopprime la sezione d'urto a basse energie trasferite, mentre è del tutto ininfluenza per alti valori dell'energia trasferita. Nello specifico, non dà alcun contributo quando  $|\mathbf{q}| > 2\bar{p}_F$ .

### 8.2.4 Interazioni nello Stato Finale

Le interazioni nello stato finale, *Final State Interactions* (FSI), sono espressamente trascurate nell'approssimazione impulsiva. Esse descrivono le interazioni che intercorrono tra lo stato adronico creato nel vertice di interazione debole e il nucleo di provenienza. Infatti possono andare incontro a fenomeni di scattering multiplo con i nucleoni del nucleo residuo. Le FSI comportano un abbassamento e uno spostamento a energie inferiori, di  $\sim 10$  MeV, del picco quasi elastico della sezione d'urto, rispettivamente per gli effetti dello scattering e del campo medio del nucleo. Nel complesso queste correzioni sono importanti solo per basse energie trasferite. Per trattare le FSI si può ricorrere ad un approccio [?, ?] basato sulla teoria del nucleo a molti corpi, assumendo che il nucleone uscente dal vertice elettrodebole si muova con velocità costante lungo una traiettoria dritta, mentre gli altri nucleoni sono "congelati", così da poter essere considerati come centri fissi di scattering. In questo modo si possono aggiungere gli effetti delle interazioni nello stato finale alla sezione d'urto impulsiva espressa in funzione dell'energia trasferita  $\omega$ :

$$\frac{d^2\sigma_{IA}}{d\Omega_{k'} d\omega} = \int d\omega' f_{\mathbf{q}}(\omega - \omega') \frac{d^2\sigma_{IA}}{d\Omega_{k'} d\omega'} \quad (8.24)$$

dove  $f_{\mathbf{q}}$  è una funzione che tiene conto dello scattering del nucleone estratto sui nucleoni spettatori, connessa alla funzione spettrale. Le FSI non modificano la normalizzazione della sezione d'urto, ma solo lo spettro dell'energia del nucleone uscente. Inoltre hanno effetti ridotti nella sezione d'urto inclusiva, poiché questa si basa sull'osservazione del leptone uscente, la cui cinematica non è influenzata da ciò che accade al nucleone prodotto nel vertice debole. Per questo le FSI sono trascurate nei conti successivi. Esse in ogni caso possono essere incluse come correzioni estendendo il formalismo della funzione spettrale, come illustrato.



## Capitolo 9

# Dipendenza dai modelli nucleari nella ricerca dei neutrini sterili

In questo capitolo entriamo più nel vivo della ricerca del neutrino sterile. Gli esperimenti nominati in precedenza e i molti altri che sono impegnati in questo settore della fisica, utilizzano i dati raccolti sulla sezione d'urto totale dei processi CCQE  $\nu - {}^{12}\text{C}$ ,  $\bar{\nu} - {}^{12}\text{C}$  e su altri valori più specifici, come la distribuzione del  $Q^2$  o della sezione d'urto in funzione dell'energia. Questo perché la presenza del neutrino sterile può influire in maniera più o meno significativa in queste quantità.

In particolare ci soffermiamo sui possibili effetti del neutrino sterile nella diminuzione del flusso di neutrini o antineutrini utilizzato negli esperimenti. Sono presi in esame il flusso e i dati ottenuti da MINER $\nu$ A [?, ?] come base per le simulazioni. L'idea di base è di discutere le conseguenze della scelta di uno dei due modelli di interazione con i nuclei del neutrino e dell'antineutrino, in quanto possono amplificare o nascondere gli effetti delle oscillazioni dei neutrini attivi in quello sterile.

Poiché abbiamo utilizzato il flusso di neutrini utilizzati nell'esperimento MINER $\nu$ A, discutiamo brevemente le sue caratteristiche.

### MINER $\nu$ A

MINER $\nu$ A [?], *Main INjector Experiment  $\nu$ -A*, è un esperimento cominciato nel marzo del 2010 al Fermi National Accelerator Laboratory (FNAL), ed è tuttora in corso. Il Neutrino Main Injector (NuMI) è un acceleratore che genera un fascio di protoni a 120 GeV. Questi colpiscono un bersaglio di grafite, producendo pioni e kaoni, i quali sono focalizzati da un sistema di due corni magnetici che dirottano i mesoni desiderati in un canale di decadimento di 675 m. Dopo il canale le particelle attraversano un totale di 240 m di roccia, per eliminare i muoni presenti nel fascio e lasciare solo i neutrini. La distanza totale percorsa dai neutrini prima di giungere a MINER $\nu$ A è di 1040 metri. Il sistema dei corni magnetici è manipolabile per permettere la focalizzazione di particelle positive e negative, così da produrre un fascio rispettivamente di neutrini e antineutrini. Inoltre l'acceleratore NuMI è piuttosto versatile, ed è stato utilizzato per produrre fasci di neutrini con picco in energia a  $\sim 3$  GeV e  $\sim 3.5$  GeV.

Il rivelatore MINER $\nu$ A è uno scintillatore composto da moduli traccianti, calorimetri elettromagnetici ed adronici e nuclei come bersagli passivi. Quindi permette una

caratterizzazione esauriente della cinematica delle interazioni. Al suo interno i neutrini interagiscono con una miscela di  $\text{CH}_2$ .

Per completezza menzioniamo anche MINOS, un calorimetro tracciante che sfrutta anche il campo magnetico per identificare la carica delle particelle. Esso è posto in modo tale da ricevere il flusso di muoni che esce da MINER $\nu$ A, per rivelarne l'impulso.

## 9.1 Procedimento

Descriviamo la procedura seguita per effettuare l'analisi sui modelli nucleari in rapporto alla loro incidenza nello scenario dei neutrini sterili. Si sono utilizzati più codici scritti nel linguaggio FORTRAN, per ottenere dati rilevanti alla trattazione. La sezione d'urto dei processi elettrodeboli trattati è stata calcolata rispetto al quadrato del quadrimpulso scambiato, come si riporta di seguito.

### 9.1.1 Sezione d'urto in $Q^2$

Il quadrimpulso trasferito  $q = (\omega, |\mathbf{q}|)$  è una grandezza importante, poiché contribuisce a determinare il tipo di processo cui va incontro il nucleone coinvolto. Il quadrivettore  $q$  definito nel processo CCQE è di tipo spazio, dunque vale  $q^2 < 0$ . Per questo è conveniente esprimere la sezione d'urto in funzione di questa quantità:  $Q^2 := -q^2$ .

$$q^2 = k'^2 + k^2 - 2kk' = m_l^2 - 2E_{k'}E_k + 2|\mathbf{k}'||\mathbf{k}| \cos \theta$$

$$Q^2 = 2E_{k'}E_k \left( 1 - \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) - m_l^2 \quad (9.1)$$

dove ricordiamo  $k'$  è il quadrimpulso associato al leptone uscente, e  $m_l$  la sua massa, mentre  $k$  è il quadrimpulso del neutrino(antineutrino) entrante.

Partiamo dall'espressione della sezione d'urto differenziale del processo CCQE neutrino(antineutrino)-nucleone (6.15). Essa è espressa in funzione dell'angolo solido e dell'energia del leptone uscente, ma la prendiamo già integrata rispetto all'angolo azimutale: rimangono le dipendenze rispetto all'energia e al coseno dell'angolo polare  $\theta$ . Per giungere ad una formulazione che contenga il quadrimpulso trasferito  $Q^2$ , è necessario giungere ad una equazione come

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \int dE_l d\cos \theta \frac{d^2\sigma}{dE_l d\cos \theta} \delta(\cos \theta - \overline{\cos \theta}) \quad (9.2)$$

dove le quantità con il pedice  $l$  si riferiscono al leptone uscente. La  $\delta$  di Dirac introdotta permette di eseguire l'integrazione sulla parte angolare polare e di passare da una dipendenza dal  $\cos \theta$  a una dal  $Q^2$ . Infatti definiamo  $\overline{\cos \theta}$  usando la (9.1)

$$\overline{\cos \theta} := \frac{2E_\nu E_l - Q^2 - m_l^2}{2E_\nu |\mathbf{k}'_l|} \quad (9.3)$$

Ora scriviamo la sezione d'urto differenziale in funzione di  $Q^2$ , ovvero  $\frac{d^2\sigma}{dE_l d\cos \theta}$  facendo un cambio di variabile:

$$d\cos \theta = dQ^2 \left| \frac{\partial \cos \theta}{\partial Q^2} \right|$$



con

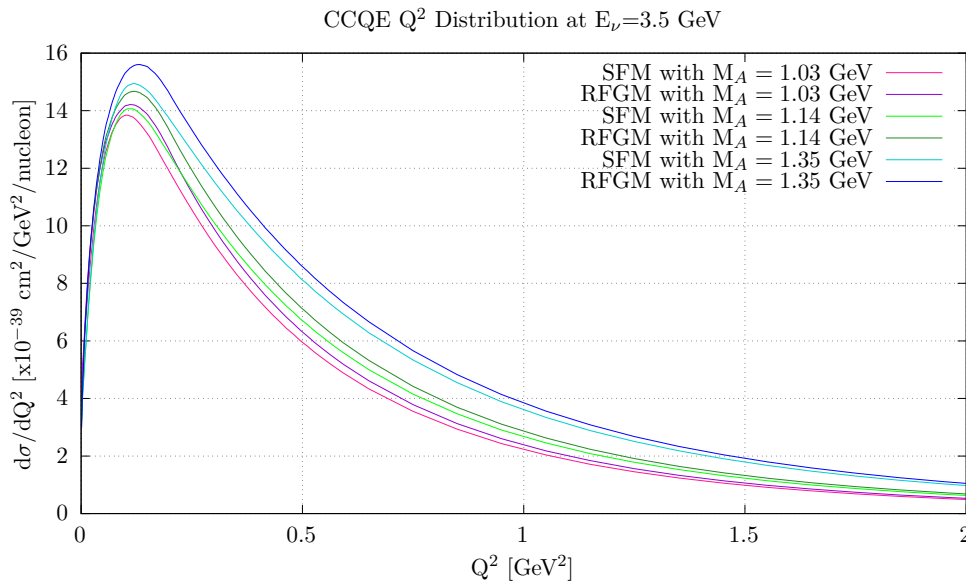
$$\left| \frac{\partial \cos \theta}{\partial Q^2} \right| = \frac{1}{2E_\nu |\mathbf{k}'_l|}$$

che è lo Jacobiano della trasformazione. In questo modo, eseguendo l'integrazione sul coseno dell'angolo polare, si sostituisce a  $\cos \theta$  la quantità  $\overline{\cos \theta}$  in  $\frac{d^2\sigma}{dE_l dQ^2}$ , per avere tutto in funzione di  $Q^2$  e  $E_l$ . Dunque la sezione d'urto voluta è la seguente:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \int dE_l \frac{d^2\sigma}{dE_l dQ^2} \frac{1}{2E_\nu |\mathbf{k}'_l|} \quad (9.4)$$

### Massa assiale

La parametrizzazione del fattore di forma assiale  $F_A$  in forma dipolare dipende fortemente dal valore della massa assiale  $M_A$ , come introdotto nella Sezione 5.2.3 delle correnti adroniche. Nell'approcciare ai dati raccolti da MINER $\nu$ A abbiamo deciso di utilizzare il valore ottenuto da K2K sul carbonio,  $M_A = 1.144$  GeV. In ogni caso modificare la massa assiale cambia la forma della distribuzione in  $Q^2$ . Questo perché influenza i fattori di forma  $F_A$  e  $F_P$ , presenti nella definizione dei termini del tensore adronico, connessi ai termini proporzionali all'impulso del nucleone coinvolto nel processo debole. Nella figura 9.1 riportiamo la distribuzione del  $Q^2$  ottenuta da un neutrino incidente con energia di  $E = 3.5$  GeV, il picco del flusso di MINER $\nu$ A, con valori diversi del parametro  $M_A$ . Sono riportati gli andamenti per i valori della massa assiale ottenuta dagli studi sul deuterio,  $M_A = 1.03$  GeV, da K2K e dall'esperimento MiniBooNE,  $M_A = 1.35$  GeV.



**Figura 9.1.** Distribuzione del  $Q^2$  per la diffusione CCQE con neutrini a 3.5 GeV, corrispondente al picco del flusso di neutrini incidenti. La distribuzione è stata valutata utilizzando diversi valori di massa assiale.

Gli effetti della massa assiale sono evidenti e svariati: aumentandone il valori si amplifica la distanza tra gli andamenti ottenuti con i due distinti modelli nucleari e

si incrementa la distribuzione  $Q^2$ , soprattutto per valori di quest'ultimo compresi tra 0.1, subito prima del picco, a  $e \sim 1 \text{ GeV}^2$ . Pertanto si ha anche un aumento della sezione d'urto totale.

### Integrazioni

Le operazioni matematiche per ottenere la sezione d'urto totale, sono state effettuate in modi differenti. In tutti i casi ne abbiamo verificato l'accuratezza, che si attesta all'ordine del  $\sim 1\%$ .

- Integrazione rispetto al  $Q^2$

L'integrazione è realizzata con il metodo dei rettangoli: si è diviso l'intervallo di integrazione in tanti intervalli più minuti, e si costruiscono dei rettangoli che hanno per base gli intervalli, e per altezza la funzione integranda della (9.2) valutata nel punto medio di questi. In realtà poiché non è noto l'estremo superiore di integrazione, si è fissata la dimensione degli intervalli, e si sono considerati solo valori per i quali la funzione risultasse maggiore di un certo valore di soglia,  $10^{-4}$ .

- Integrazione sull'energia del leptone uscente

Questo calcolo è stato fatto utilizzando la quadratura gaussiana. Ciò significa che l'integrale definito lo si calcola come

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n K(x_i)w_i$$

La funzione  $f$  è quella che si vuole integrare, e si devono conoscere i valori  $f(x_i)$  per i punti  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , detti *nodali*.  $K(x)$  è un polinomio di grado  $2n + 1$  tale che  $K(x_i) = f(x_i)$  per  $i = 0, 1, \dots, n$ , e che valga  $K(x) - f(x) = P_{n+1}g_n(x)$ . Questa ultima condizione implica che il polinomio  $K$  differisce dalla funzione da integrare  $f$  per una quantità esprimibile come prodotto di un polinomio  $P$  di grado  $n + 1$  e un'altra funzione  $g_n$ . Invece il termine  $w_i$ , detto *peso*, è una quantità ottenuta dalla funzione peso  $w(x)$ , ortogonale in  $[a, b]$  rispetto al polinomio  $P_{n+1}$ . I  $w_i$  risultano indipendenti dalla funzione  $f$ , poiché dipendono solo dal numero di punti nodali scelti e dall'intervallo di integrazione. Nel nostro caso si è utilizzata la base di polinomi ortogonali di Legendre, molto comoda perché definita nell'intervallo  $[-1, 1]$  rispetto alla distribuzione uniforme. Per adattare gli  $x_i$  e i pesi all'intervallo di integrazione  $[a, b]$ , sono stati moltiplicati per un  $\frac{b-a}{2}$ , e, solo i primi, aumentati di  $\frac{b-a}{2}$ . Si è operato con un numero di punti nodali pari a 128, dividendo l'intervallo di integrazione in due parti per aumentare la precisione. Poiché la variabile di integrazione è l'energia del leptone, indichiamo i valori massimi e minimi che essa può avere:

$$E_{min} = m_l \qquad E_{max} = E_\nu - m_l$$

con  $m_l$  la massa del leptone e  $E_\nu$  l'energia del neutrino o antineutrino incidente sul nucleo. La funzione da valutare nei punti nodali è l'integrando della (9.4).

- Integrazione sugli impulsi e sulle energie del nucleone  
Questo conto compare nell'espressione della sezione d'urto nucleare doppiamente differenziale, descritto nella (8.16). Qui però non includiamo la sommatoria, poiché calcoleremo la sezione d'urto differenziale *per nucleone*. L'integrazione è eseguita tramite il metodo Monte Carlo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{\text{IA}}}{d\Omega_l dE_l} &= \int d\mathbf{p} dEP(E, \mathbf{p}) \frac{d^2\sigma_n}{d\Omega_l dE_l} \delta(\omega - E + m - E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}) \\ &= \int 2\pi p^2 dp d\cos\theta_p dEP(E, p, \cos\theta_p) F(E, p, \cos\theta_p) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F(\{E, p, \cos\theta_p\}_n) \end{aligned}$$

Si è passati in coordinate polari, pertanto  $\cos\theta_p$  è l'angolo che specifica la direzione dell'impulso  $p$ . Abbiamo assunto che la funzione spettrale non dipende dagli angoli, così abbiamo potuto rimuovere la dipendenza dall'angolo azimutale.

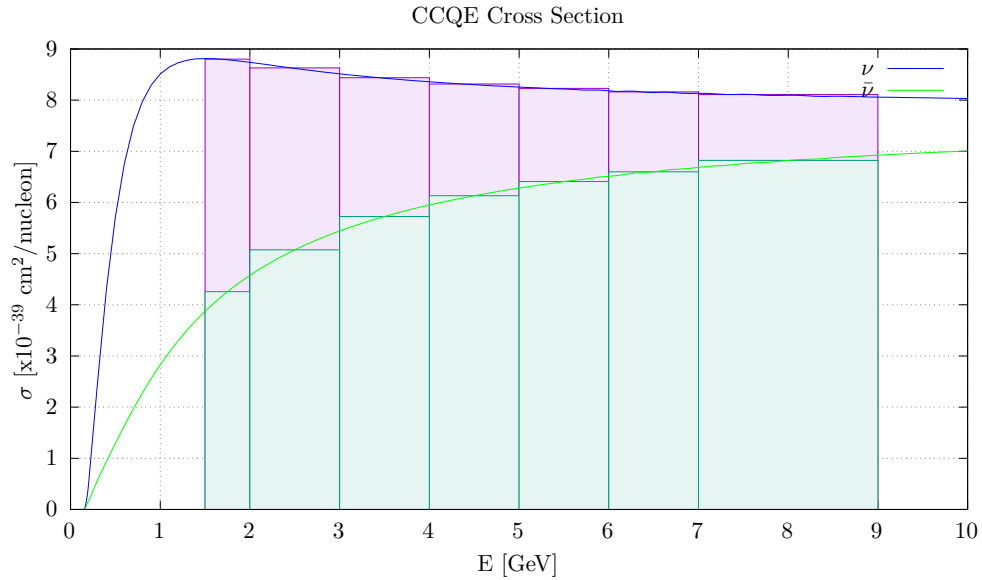
Nel conto abbiamo utilizzato  $N = 25000$  possibili configurazioni  $\{E, p, \cos\theta_p\}$  pesate secondo la distribuzione di probabilità data dalla funzione spettrale. Il coseno dell'angolo polare assume tutti i valori compresi tra -1 e 1 con eguale probabilità. L'angolo azimutale invece non viene estratto in quanto non serve ai fini del conto. Infatti la sua distribuzione è uniforme, e l'integrazione lungo quest'angolo è calcolata analiticamente. Il campionamento dei valori dell'energia di rimozione  $E$  e dell'impulso  $p$  avviene in maniera differente a seconda del modello scelto. Per il modello a gas di Fermi si fa riferimento alla (8.18). I valori della profondità della buca di potenziale  $U$  e di  $p_F$  sono determinati sperimentalmente. Sono stati utilizzati i valori di

$$p_F = 225 \text{ MeV} \quad U = 35 \text{ MeV}$$

Le configurazioni dei nucleoni derivanti dal modello nucleare dinamico SFM sono stati ottenuti seguendo lo stesso procedimento illustrato per il Fermi gas, ma seguendo la funzione spettrale descritta in (8.22) [?]. In entrambi i modelli si tiene conto del Pauli blocking, che interviene in questa fase del calcolo, sempre con  $p_F = 225 \text{ MeV}$ , mentre si trascurano le interazioni degli stati finali (FSI).

### 9.1.2 Sezione d'urto

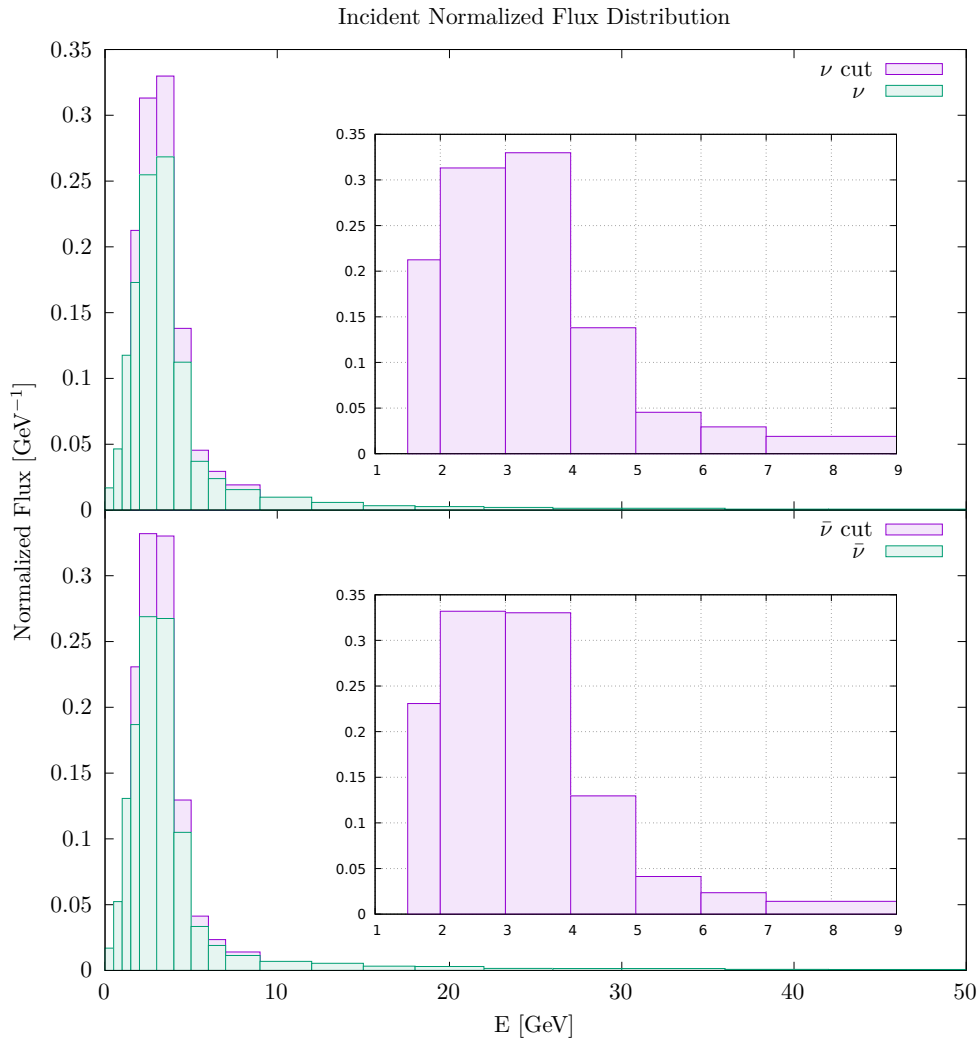
Con il procedimento appena descritto si ottiene il valore della sezione d'urto totale, ovvero integrata su tutto l'intervallo del  $Q^2$ , per valori fissati di energia delle particelle incidenti. In figura 9.2 è riportato l'andamento di questa quantità per neutrini e antineutrini incidenti.



**Figura 9.2.** Le linee continue indicano la sezione d'urto per neutrini e antineutrini, mentre i rettangoli rappresentano il binning utilizzato per l'integrazione sul flusso di MINER $\nu$ A.

## 9.2 Integrazione sul flusso di particelle incidenti

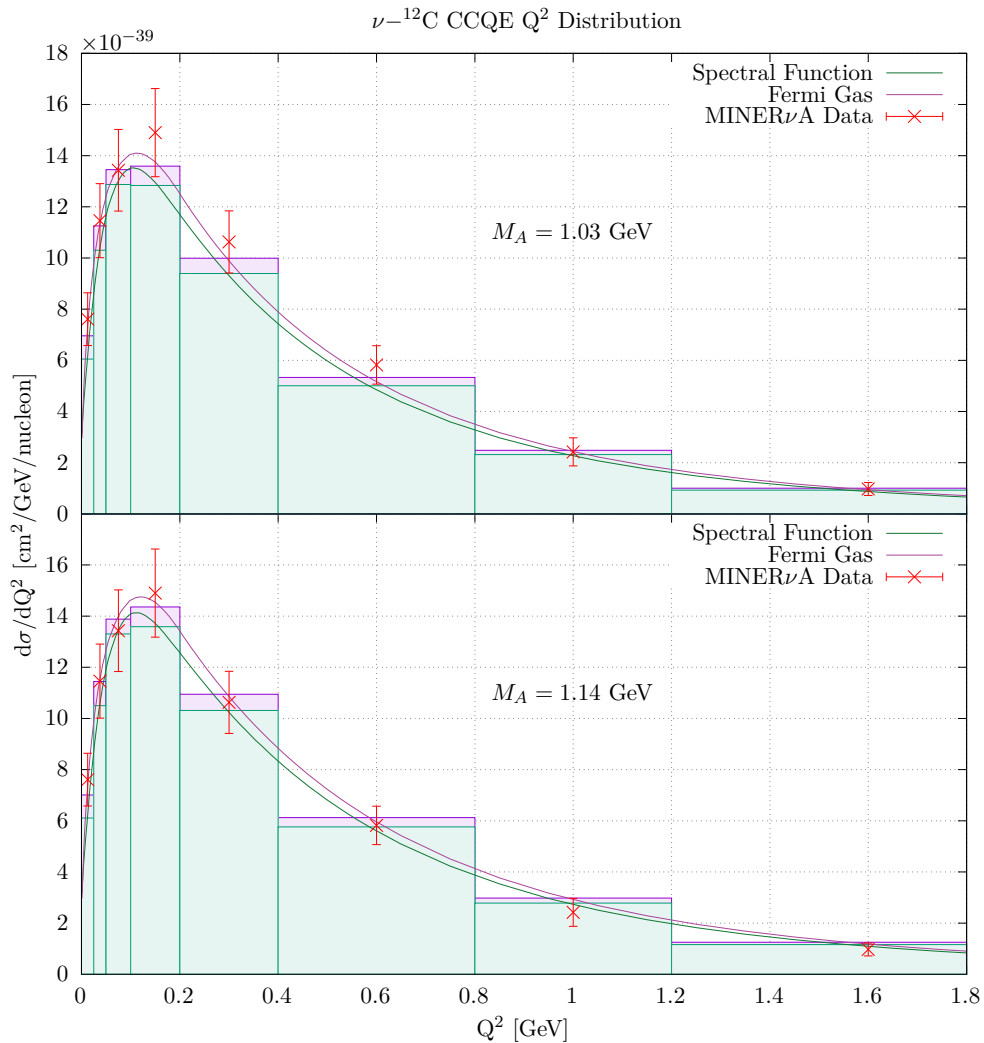
Il flusso di particelle incidenti non è monoenergetico, ma ha una sua distribuzione in energia. La sezione d'urto totale e la distribuzione del  $Q^2$  del processo sono quindi integrate rispetto a questa quantità. In figura 9.3 sono riportati i flussi incidenti su MINER $\nu$ A. Come si vede sono divisi in intervalli, poi utilizzati per l'integrazione. I valori riportati sono normalizzati.



**Figura 9.3.** Flussi di neutrini (in alto) e di antineutrini (in basso) utilizzati nell'esperimento MINER $\nu$ A. L'intervallo in energia è molto ampio (0–46 GeV), ma per avere un riscontro con i dati ottenuti da MINER $\nu$ A sulla distribuzione del  $Q^2$  per il processo CCQE abbiamo ristretto l'intervallo a 1.5 – 9 GeV, nuovamente rinormalizzato, detto "cut" nell'immagine. È rappresentato nel dettaglio nei riquadri. Evidenti i picchi a  $\sim 3.5$  GeV e  $\sim 2.5$  GeV per neutrini e antineutrini rispettivamente.

Una volta definito il flusso per intervalli, abbiamo ricavato la distribuzione in  $Q^2$  integrata. Riportiamo di seguito i risultati ottenuti per due valori diversi di massa

assiale, insieme ai dati sperimentali di MINER $\nu$ A. Nel confronto tra questi e i risultati delle simulazioni numeriche bisogna menzionare il fatto che la ricostruzione della distribuzione in  $Q^2$  introduce incertezze sistematiche: la ricostruzione dell'energia del neutrino o antineutrino incidente a seguito del processo di interazione debole dipende dagli impulsi del protone del neutrone coinvolto, e dunque dal modello nucleare adottato. La questione è affrontata più nello specifico in [?].



**Figura 9.4.** Distribuzione in  $Q^2$  dei neutrini ottenuta con i modelli nucleari del Fermi gas e SFM, con valori di  $M_A$  pari a 1.03 (sopra) e 1.144 GeV (sotto). Sono riportati anche i dati di MINER $\nu$ A. La distribuzione ottenuta è stata rappresentata anche mediante istogramma utilizzando gli stessi intervalli dei dati dell'esperimento.

Nella figura 9.4 confrontiamo la distribuzione in  $Q^2$  CCQE nel caso di neutrini incidenti, con  $M_A$  pari a 1.03 GeV e 1.144 GeV. Vi sono alcune caratteristiche comuni ai due casi: l'utilizzo del RFGM comporta un innalzamento della distribuzione rispetto al SFM, soprattutto sul picco, che risulta anche spostato verso  $Q^2$  maggiori, e a bassi  $Q^2$ . In generale i risultati ottenuti riproducono i dati sperimentali di

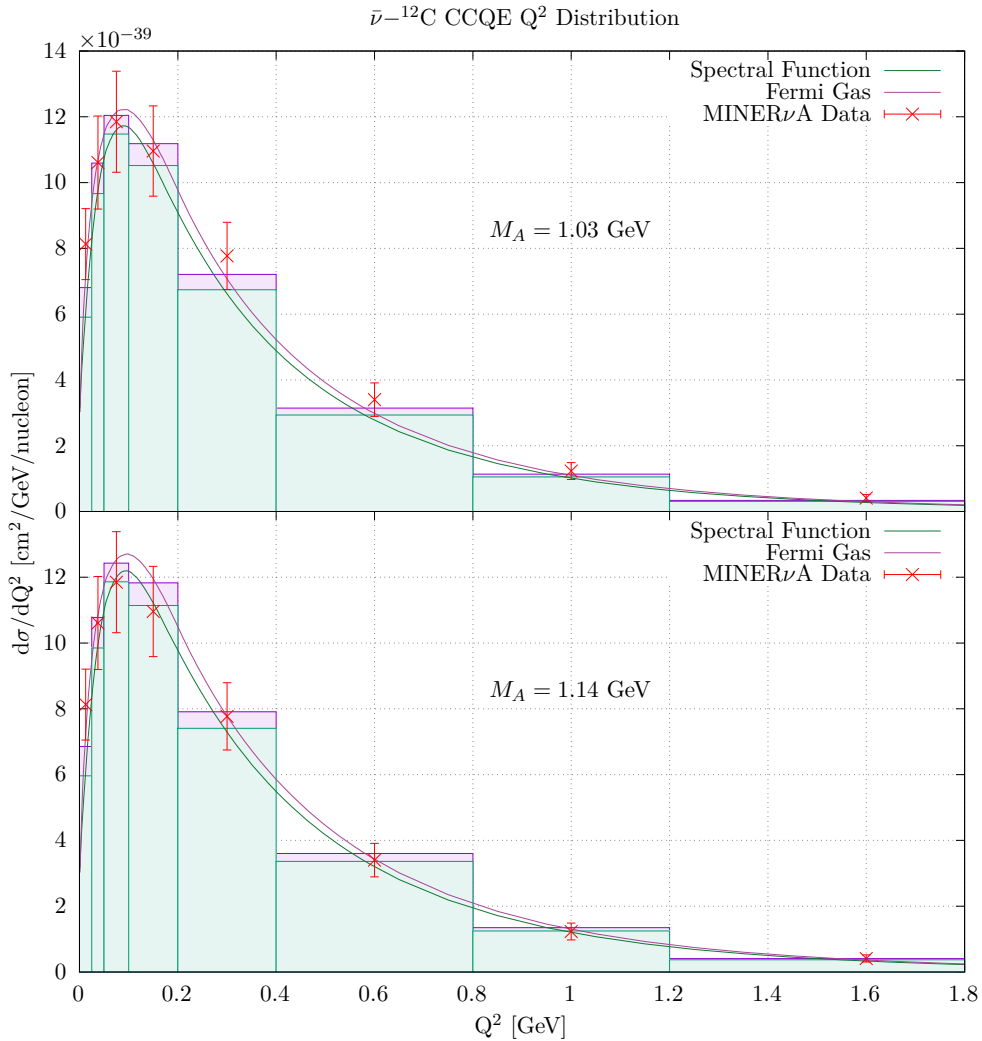
MINER $\nu$ A, ma con alcune importanti distinzioni: utilizzando la massa assiale più piccola, le distribuzioni sono tendenzialmente più in basso rispetto ai dati sperimentali, eccezion fatta per valori di  $Q^2 > 0.8 \text{ GeV}^2$ . Specialmente nell'intervallo centrato in  $Q^2 = 0.75 \text{ GeV}^2$  e in quello con i valori più bassi possibili di  $Q^2$ . Tale distanza si riduce notevolmente nel caso di  $M_A = 1.144 \text{ GeV}$ , anche se peggiora leggermente l'aderenza ai dati per gli intervalli  $Q^2 = 1, 1.6 \text{ GeV}^2$ , e lascia invariati quelli corrispondenti a  $Q^2 < 0.025 \text{ GeV}^2$ . Un altro effetto evidente della massa assiale più elevata è sul picco: a  $M_A = 1.03 \text{ GeV}$  i contributi degli intervalli centrati in  $Q^2 = 0.75, 0.375 \text{ GeV}^2$  sono pressoché uguali, mentre aumentando la massa efficace domina il primo tra i due. Tenuto conto di questi andamenti, da un punto di vista qualitativo il modello RFGM con  $M_A = 1.144$  è quello che riproduce meglio i dati di MINER $\nu$ A. Si è anche calcolato il  $\chi^2$  per valutare statisticamente l'aderenza alle osservazioni sperimentali considerando esclusivamente l'errore di queste, basandosi sugli intervalli di  $Q^2$ . Riportiamo i valori del  $\chi^2$  e del  $\chi^2$  ridotto, indicato con  $\chi_{\text{rid}}^2$ , nella tabella 9.1, con un numero di gradi di libertà pari a  $n = 8$ , poiché otto sono gli intervalli analizzati, e i dati e le simulazioni numeriche sono valutati indipendenti. Il  $\chi^2$  è stato ottenuto mediante la formula:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left( \frac{C - E}{\sigma_E} \right)^2 \quad (9.5)$$

con  $N$  il numero degli intervalli,  $C$  l'altezza dei bin calcolata e  $E$ ,  $\sigma_E$  il valore atteso di questa e la sua incertezza, interpretati come i dati di MINER $\nu$ A.

Modello Nucleare	$M_A$ [GeV]	$\chi^2$	$\chi_{\text{rid}}^2$	LC
RFGM $\nu$	1.03	1.73	0.216	1 – 5%
RFGM $\nu$	1.14	2.66	0.333	1 – 5%
SFM $\nu$	1.03	6.75	0.844	10 – 50%
SFM $\nu$	1.14	4.23	0.529	5 – 10%
RFGM $\bar{\nu}$	1.03	2.70	0.338	5%
RFGM $\bar{\nu}$	1.14	2.16	0.270	1 – 5%
SFM $\bar{\nu}$	1.03	8.07	1.01	50 – 90%
SFM $\bar{\nu}$	1.14	4.61	0.576	10 – 50%

**Tabella 9.1.** Valutazione dell'aderenza statistica delle simulazioni numeriche rispetto ai dati sperimentali tramite utilizzo della variabile  $\chi^2$ . LC sta per Livello di Confidenza. Valori così bassi sono figli delle grande incertezze associate ai dati sperimentali.



**Figura 9.5.** Distribuzione in  $Q^2$  degli antineutrini ottenuta con i modelli nucleari RFGM e SFM, con valori di  $M_A$  pari a 1.03 (sopra) e 1.144 GeV (sotto). Sono riportati anche i dati di MINERνA. La distribuzione ottenuta è stata rappresentata anche mediante istogramma utilizzando gli stessi intervalli dei dati dell'esperienza.

In figura 9.5 sono riportate le distribuzioni in  $Q^2$  CCQE con antineutrini come particelle incidenti. Anche in questo caso si esegue un confronto sia tra i modelli nucleari RFGM e SFM, sia tra i due valori di massa assiale precedentemente discussi. In questa configurazione i dati sperimentali sono riprodotti meglio rispetto al caso di neutrini incidenti sul picco e su grandi  $Q^2$ , mentre per valori molto bassi di quadrimpulso trasferito emergono differenze importanti. Anche qui valgono le considerazioni fatte in precedenza, ma è da notare come il modello SFM riproduca con estrema precisione i dati di MINERνA nel caso di massa assiale 1.144 GeV, senza aumentare eccessivamente i contributi a grandi impulsi trasferiti.

Dai risultati ottenuti dalla distribuzione integrata in  $Q^2$ , confrontata con i dati sperimentali, emergono due importanti osservazioni. La prima riguarda lo studio sulle oscillazioni dei neutrini in stati sterili: queste comportano un abbassamento



della distribuzione, pertanto l'analisi del fenomeno è possibile solo se questa non ha valori inferiori alle osservazioni, come avviene nel caso di massa assiale 1.03 GeV. L'altra osservazione è sui deficit rispetto ai dati di MINER $\nu$ A nella distribuzione ottenuta per bassi valori dell'impulso trasferito. Questo può essere motivato dal fatto che l'approssimazione impulsiva utilizzata nel calcolo è valida per  $\mathbf{q} > 0.8$  GeV, come spiegato nel Paragrafo 8.1 dedicatogli, tuttavia descrive bene i processi di diffusione in limiti meno stringenti [?],  $\mathbf{q} \gtrsim 0.4$  GeV. Dunque per valori<sup>1</sup> di  $Q^2 \sim 0.1545$  GeV<sup>2</sup> l'adozione dell'IA non riesce a descrivere appieno i processi di diffusione sui nuclei: infatti trascura effetti di coerenza nei quali il quadrimpulso trasferito viene distribuito a più nucleoni.

### 9.2.1 Oscillazioni del flusso

Le particelle percorrono una distanza  $L$  prima di interagire con i bersagli, e poiché sono soggette al fenomeno delle oscillazioni di sapore, dobbiamo tenerne conto nel calcolo del flusso. Infatti se l'esperimento è sensibile ai neutrini muonici, la presenza delle oscillazioni in altri sapori ne comporta una diminuzione.

$$\sigma = \int dE \mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(E) \sigma(E) \Phi(E) \quad (9.6)$$

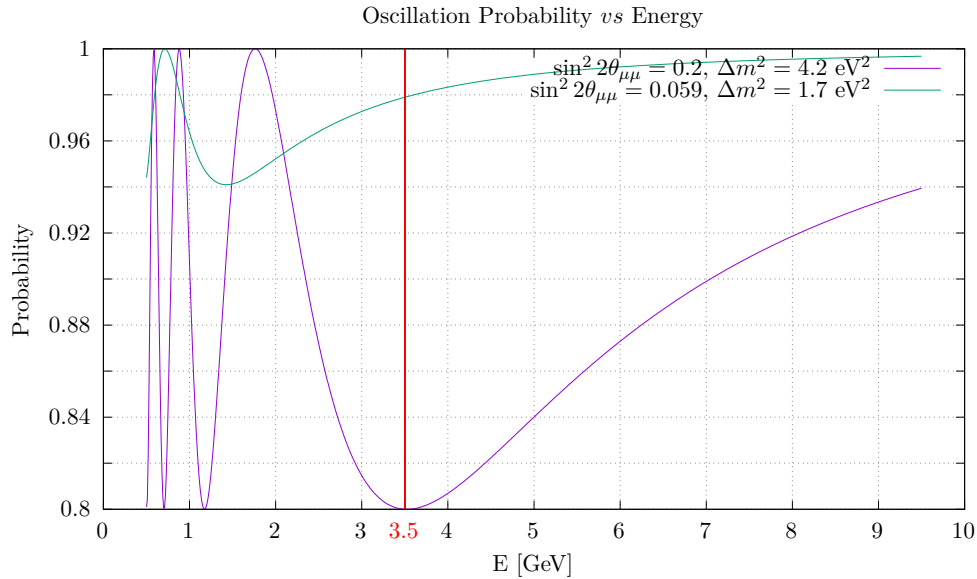
Lo stesso vale per la sezione d'urto differenziale rispetto al  $Q^2$ .  $\Phi(E)$  è il flusso in funzione dell'energia  $E$  delle particelle incidenti.

Se la distanza  $L$  è troppo piccola per avere oscillazioni verso altri sapori attivi, queste sono trascurabili.

Assumiamo però che ci sia un mescolamento con il neutrino sterile: allora il fenomeno può avere effetti importanti a causa della grande differenza di massa  $\Delta m^2$ . Utilizziamo quindi l'approssimazione descritta nella Sezione 4.2.2 dedicato alla fenomenologia del neutrino sterile, per ottenere la probabilità che un neutrino muonico resti tale dopo una distanza  $L$  (4.6). Dall'immagine risulta chiaro che il valore di  $\sin^2 \theta_{\mu\mu}$  comporta che il minimo della probabilità sia  $1 - \sin^2 \theta_{\mu\mu}$ , mentre il  $\Delta m^2$  modifica il periodo dell'oscillazione.

---

<sup>1</sup>Il valore di soglia è ottenuto considerando  $|\mathbf{q}| = 0.4$  GeV e  $q^0 = \omega = -7.42$  MeV, pari all'energia di legame per nucleone del carbonio. Questo perché rappresenta il valore più elevato, ma più piccolo in modulo, di energia posseduta dai nucleoni. Così  $Q^2 = |\mathbf{q}|^2 - \omega^2$ .



**Figura 9.6.** Probabilità di avere un neutrino muonico dopo una distanza  $L = 1040$  m con parametri diversi. Il valore di  $\Delta m^2 = 4.2$  GeV è stato scelto perché massimizza la transizione dallo stato muonico a quello sterile per  $E = 3.5$  GeV, indicata come la linea rossa. Questo è possibile imponendo  $1.267\Delta m^2 \frac{L}{E} = \frac{\pi}{2}$ . Gli altri parametri sono quelli del best fit dall'“approccio pragmatico” in [?]. Inoltre i valori riportati partono da 0.5 GeV, poiché a energie inferiori le oscillazioni sono troppo rapide per risultare leggibili.

### 9.2.2 Simulazione delle oscillazioni

Nella configurazione dell'esperimento MINER $\nu$ A la distanza percorsa dai fasci incidenti è di circa un chilometro, rendendo trascurabili le oscillazioni tra stati attivi dei neutrini e degli antineutrini, pertanto non sono incluse nelle simulazioni. Dagli esperimenti passati sul neutrino sterile, emergono dati molto discordanti sulla sua possibile esistenza, soprattutto per la difficoltà nel trovare parametri di massa e accoppiamento con i neutrini attivi. In particolare vi sono tensioni tra esperimenti di scomparsa e di apparizione.

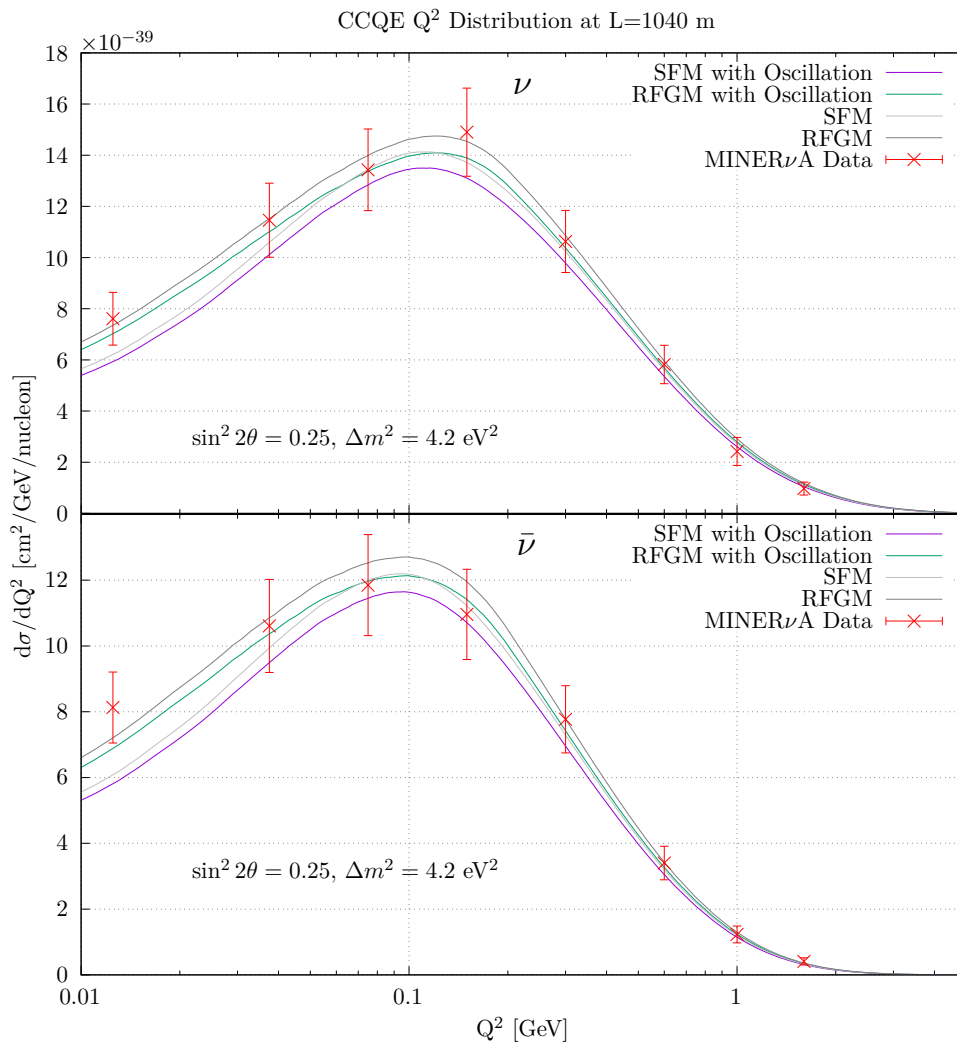
Per questo motivo abbiamo considerato più valori possibili di questi parametri, studiandone gli effetti nella distribuzione del  $Q^2$ . Nel dettaglio abbiamo utilizzato degli intervalli con  $1 \leq \Delta m^2 \leq 8$  eV $^2$  e  $0.05 \leq \sin^2 \theta_{\mu\mu} \leq 0.8$ . Soprattutto per quest'ultimo abbiamo considerato valori piuttosto alti, fortemente sfavoriti dalle analisi statistiche di numerosi dati sperimentali [?], per rendere più visibili gli effetti del mescolamento. Questo perché siamo interessati a vedere come questi si combinano con l'utilizzo dei due diversi modelli nucleari RFGM e SFM.

Tutti i risultati sono ottenuti utilizzando come flusso incidente solo quello compreso tra 1.5 – 9 GeV, come spiegato in figura 9.3. Inoltre si è assunto un valore della massa assiale  $M_A$  di 1.144 GeV.

Riportiamo di seguito soltanto un caso significativo per la nostra analisi, 9.7. Tutti i casi studiati sono invece illustrati nell'appendice D. Descriviamo però gli effetti comuni che si riscontrano in tutti i grafici.

La forma delle distribuzioni è diversa in base al modello nucleare adottato: come

detto in precedenza l'utilizzo del Fermi gas ha come effetto un innalzamento della distribuzione in  $Q^2$ . Il mescolamento con lo stato sterile invece comporta un abbassamento della zona centrale nella distribuzione, dipendente dal parametro  $\Delta m^2$ : più è vicino al valore "risonante"  $4.2 \text{ GeV}^2$ , più è importante l'effetto. Infatti una differenza di massa più elevata influenza maggiormente i neutrini altamente energetici, che costituiscono il principale apporto ad alti valori dell'impulso trasferito, abbassando quindi la curva nella sua parte corrispondente ad alti  $Q^2$ . Il termine di accoppiamento dato dall'angolo di mescolamento invece abbassa tutta la distribuzione, senza modificarne la forma, in modo proporzionale al  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu}$ . Tali effetti risultano apprezzabili solo per  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu} > 0.1$ , come si può vedere nelle figure D.3.



**Figura 9.7.** Distribuzione del  $Q^2$  per la diffusione CCQE con neutrini (in alto) e antineutrini (in basso). In grigio è rappresentata la distribuzione in assenza di mescolamento con il neutrino sterile; in rosso i dati ottenuti da MINERνA.

L'immagine 9.7 è esplicativa della possibile sovrapposizione degli effetti dovuti al mescolamento con il neutrino sterile con quelli causati dall'adozione di un diverso

modello nucleare: la distribuzione del  $Q^2$  ottenuta con il Fermi gas e con l'oscillazione in stati sterili si sovrappone, soprattutto nella zona del picco, con la stessa distribuzione che si otterrebbe con l'utilizzo della funzione spettrale dinamica in assenza di oscillazione. È altresì evidente come le incertezze associate ai dati di MINER $\nu$ A non permettano di distinguere le quattro diverse situazioni rappresentate in un'analisi statistica, in quanto troppo vicine fra loro.

# Conclusioni

Nella Tesi, dopo un'introduzione sulla teoria dei neutrini, le loro interazioni e sugli approcci alla descrizione dei nuclei, abbiamo descritto il calcolo della distribuzione in  $Q^2$  nella configurazione dell'esperimento MINER $\nu$ A utilizzando due distinti modelli nucleari: il Fermi gas in regime relativistico, RFGM, e un modello basato sulla teoria a molti corpi, ottenuto in approssimazione di densità locale, che tiene conto della correlazione dinamica tra nucleoni, SFM. Inoltre abbiamo adottato due diversi valori del parametro  $M_A$ , detto massa assiale, che determina la dipendenza dal  $Q^2$  del fattore di forma assiale  $F_A$ , e di conseguenza anche di quello pseudoscalare  $F_P$ , poichè abbiamo assunto valida l'ipotesi di parziale conservazione della corrente assiale (PCAC). I valori utilizzati sono  $M_A = 1.03$  GeV, ricavato da studi sul deuterio, e  $M_A = 1.14$  GeV, ottenuto su carbonio da K2K.

Il confronto con i dati sperimentali rivela una certa coerenza tra questi e la curva della distribuzione in  $Q^2$ , integrata sul flusso di particelle incidenti preso da MINER $\nu$ A, da noi ottenuta. Importante sottolineare che l'aderenza dei dati alla curva è maggiore con il Fermi gas, ed è migliore nel caso di  $M_A = 1.03$  piuttosto che con massa assiale maggiore. Infatti la distribuzione si allontana dai dati sperimentali per difetto a bassi  $Q^2$ , soprattutto per gli antineutrini, e per eccesso ad alti  $Q^2$  per i neutrini. Il picco invece sembra essere meglio descritto con  $M_A = 1.14$ . Si consideri però che vi sono numerose evidenze basate sul riscontro con le osservazioni di processi di diffusione elettronica sui nuclei dell'incapacità del RFGM di descrivere adeguatamente la dinamica dei nucleoni.

Successivamente abbiamo incluso nell'analisi i possibili effetti delle transizioni delle particelle incidenti in stati sterili, che comportano una riduzione nel flusso e una modifica nello spettro. È stato utilizzato il formalismo di mescolamento a due sapori, poichè l'esperimento MINER $\nu$ A è di tipo *short baseline*, e quindi sensibile ad alti valori di differenza di massa tra neutrini attivi e sterili. Pertanto lo studio è stato effettuato considerando solo due parametri per descrivere le oscillazioni:  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu}$  e  $\Delta m^2$ . In questa analisi abbiamo utilizzato  $M_A = 1.14$  GeV, poichè comporta un innalzamento complessivo della distribuzione in  $Q^2$ , dando la possibilità di includere il mescolamento con il neutrino sterile senza peggiorare necessariamente l'aderenza ai dati sperimentali, come avviene per  $M_A = 1.03$  GeV. Inoltre la scelta di una massa assiale maggiore sembra essere giustificata dagli ultimi studi teorici della QCD su reticolo, che prevedono valori più elevati per questo parametro.

Effetti rilevanti del fenomeno delle oscillazioni si hanno per valori dei parametri di mescolamento che sembrano incompatibili con i limiti ottenuti da recenti analisi di dati sperimentali. Per valori più minuti il mescolamento è coperto dalle incertezze sistematiche dovute alla scelta del modello nucleare. Questo aspetto si riscontra

anche in un nostro esame statistico preliminare, che suggerisce come a bassi valori del parametro  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu}$  la forma della distribuzione in  $Q^2$  ottenuta dalle simulazioni numeriche effettuate con il RFGM sia compatibile ai dati sperimentali con un valore di  $\Delta m^2 = 3.2 \text{ eV}^2$ ; al contrario, adottando il SFM, i risultati si adattano meglio alle osservazioni senza la presenza di mescolamento con stati sterili. I due modelli nucleari in analisi descrivono quindi in maniera differente i processi CCQE deboli con l'inclusione delle oscillazioni. Dallo studio emerge pertanto la necessità di migliorare la descrizione della dinamica nucleare, di risolvere questioni ancora aperte come il valore di  $M_A$  presente nei fattori di forma assiale e pseudoscalare, e l'inclusione di processi non presenti nell'approssimazione impulsiva, come le correnti a due corpi, le interazioni dello stato finale ed effetti di coerenza dei nucleoni. Questo nella speranza di ridurre le incertezze sistematiche inevitabilmente associate alle grandezze fisiche osservabili dei processi riguardanti le interazioni deboli che coinvolgono i nuclei, per poter raggiungere la precisione adeguata all'analisi di fenomeni con effetti esperibili molto ridotti, come il mescolamento dei neutrini attivi con stati sterili.

## Appendice A

# Meccanismo di Higgs per una teoria di gauge U(1)

Consideriamo il caso semplice di un campo scalare complesso massivo con un termine di autointerazione, la cui dinamica è descritta dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \bar{\phi}(x) \partial^\mu \phi(x) + m^2 \bar{\phi}(x) \phi(x) - \lambda [\bar{\phi}(x) \phi(x)]^2 \quad (\text{A.1})$$

Il termine massivo è di segno positivo, che significa che questo campo scalare ha una massa a riposo immaginaria. Per questo spesso si parla di *tachioni*, particelle superluminali, che avrebbero massa immaginaria. In questo modo il potenziale che avverte il campo ha un massimo relativo in  $\phi(x) = 0$ , e un minimo assoluto dislocato su una circonferenza di raggio  $|\phi| = \frac{m}{\sqrt{2\lambda}}$ . Quello che succede quindi è che nonostante il potenziale sia a simmetria radiale, il sistema a basse energie automaticamente collassa in una regione localizzata vicino al minimo assoluto, rompendo spontaneamente la simmetria. Per descrivere il sistema per energie inferiori al valore del massimo relativo, è conveniente espandere il campo  $\phi$  attorno al suo stato fondamentale.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + H(x)] e^{i\eta(x)}$$

dove  $v = m/\sqrt{\lambda}$ , mentre i campi reali  $H$  e  $\eta$  descrivono rispettivamente l'oscillazione di  $\phi$  intorno a  $v/\sqrt{2}$  in direzione radiale e il dislocamento sul minimo circolare del potenziale lungo la direzione angolare. La Lagrangiana in funzione dei nuovi campi introdotti diviene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} m^2 v^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2} (2m^2 H^2) + \frac{1}{2} v^2 \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta \\ & - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 + v H \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} H^2 \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Quindi il bosone  $H$ , detto di Higgs, acquista una massa  $\sqrt{2}m$ ; il bosone  $\eta$ , detto di Goldstone, rimane a massa nulla; e compaiono numerosi termini di autointerazione e di interazione tra i due campi.

Studiamo ora la stessa situazione ma partendo da una Lagrangiana con simmetria di gauge U(1). Includiamo quindi un'interazione tra il campo scalare e un campo vettoriale di gauge  $A^\mu$ , la cui dinamica è descritta dall'usuale termine costruito con il tensore antisimmetrico  $F^{\mu\nu} := \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ .

$$\mathcal{L}_{\text{U}(1)}(x) = \left[ D_\mu \phi(x) \right]^* D^\mu \phi(x) + m^2 \bar{\phi}(x) \phi(x) - \lambda [\bar{\phi}(x) \phi(x)]^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

dove  $D^\mu = \partial^\mu + igA^\mu$  è l'operatore di derivazione covariante, e  $g$  è l'accoppiamento del campo scalare con il bosone di gauge. Notiamo che la Lagrangiana è invariante per le trasformazioni simultanee

$$\begin{cases} \phi'(x) = e^{-igf(x)} \phi(x) \\ A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f(x) \end{cases}$$

Come nel caso precedente espandiamo il campo  $\phi$  attorno al minimo del potenziale, introducendo i due campi reali  $H$  e  $\eta$ . Così la Lagrangiana diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{U}(1)} = \mathcal{L} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - gvA^\mu \partial_\mu \eta - gHA^\mu \partial_\mu \eta \\ + \frac{1}{2} g^2 v^2 A^\mu A_\mu + g^2 v H A^\mu A_\mu + \frac{1}{2} H^2 A^\mu A_\mu \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

dove  $\mathcal{L}$  è la Lagrangiana descritta in (A.2).

## A.1 Gauge unitaria

Nell'espressione (A.4) compare un termine massivo per il campo  $A$ ,  $g^2 v^2$ , ma a questo punto sorgono problemi teorici. La Lagrangiana di partenza associata al campo scalare complesso massivo con il bosone vettoriale senza massa ha quattro gradi di libertà: due per il campo scalare, perché complesso, e due per il bosone vettore non massivo, che può presentarsi in due stati di polarizzazione. A seguito della rottura spontanea della simmetria invece si contano cinque gradi di libertà: due per il bosone di Higgs e la sua massa, uno per il bosone di Goldstone e tre per il bosone  $A$ , poiché essendo massivo si può presentare in tre stati di polarizzazione. Inoltre la presenza di termini di interazione a due campi come  $gvA^\mu \partial_\mu \eta$  implica che i campi presenti nella Lagrangiana non sono autostati della massa, ovvero la matrice di massa non è diagonale: per esempio  $A^\mu$  inizialmente non ha una massa, ma sappiamo che in seguito alla rottura della simmetria diventa massivo.

Esiste però una particolare scelta della gauge di  $A^\mu$ , detta *gauge unitaria*, che elimina il bosone di Goldstone dalla Lagrangiana:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \eta(x)$$

In questo modo la trasformazione associata al campo  $\phi$  è

$$\phi'(x) = e^{-i\eta(x)} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + H(x)]$$

e, come previsto, scompare la dipendenza da  $\eta$ , il quale non partecipa alla dinamica del sistema. Non vi sono più problemi di interpretazione, in quanto rimane solo il



termine massivo di  $A$ : il grado di libertà associato al bosone di Goldstone diventa quello relativo alla terza polarizzazione di  $A$ . Si parla infatti di "assorbimento" del bosone di Goldstone da parte del bosone di gauge. Questo fatto però è ovviamente indipendente dalla gauge, e infatti anche non mettendosi nella gauge unitaria ci saranno correzioni al propagatore bosonico di  $A$  che hanno l'effetto di spostare il polo da una massa pari a zero a una massa di  $g^2 v^2$ .

La gauge unitaria è molto comoda per capire cosa succede ai campi coinvolti nella rottura spontanea della simmetria, e semplifica anche i conti, riducendo significativamente il numero delle interazioni. Però è come considerare i bosoni massivi, e questo comporta che il relativo propagatore non sia rinormalizzabile.

$$G_{\mu\nu}(x; m_A) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m_A^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_A^2} \right)$$

dove per  $k \rightarrow \infty$ ,  $\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m_A^2)m_A^2}$  tende ad una costante, minando la rinormalizzabilità.



## Appendice B

# Matrice di massa di Majorana

La Lagrangiana contenente i termini di massa è data dalla (2.61). Per ragioni di simmetria del MS  $m_L = 0$ , e dunque la matrice delle masse da studiare è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Risolviamo il problema agli autovalori, così da ottenere i valori delle masse delle particelle a massa definita.

$$\lambda_{\pm} = \frac{m_R \pm \sqrt{m_R^2 + 4m_D^2}}{2} \quad (\text{B.2})$$

I campi levogiri e destrogiri non sono dunque a massa definita, ma è possibile esprimerli in funzione degli autostati massivi  $\psi_{\pm}$  tramite trasformazioni unitarie  $U, V$ . Queste sono distinte perchè i campi levogiri e destrogiri sono indipendenti. Notiamo anche che un autovalore,  $\lambda_-$ , risulta negativo. Vedremo in seguito come risolvere la questione. Siano  $m_+ := \lambda_+$  e  $m_- := -\lambda_-$  le masse di  $\psi_{\pm}$ .

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R^c \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \psi_L^c \\ \psi_R \end{pmatrix} = V^\dagger \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Così nella termine di massa della Lagrangiana si ha:

$$(\bar{\psi}_L^c, \bar{\psi}_R) V^\dagger V \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} U^\dagger U \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R^c \end{pmatrix} + h.c. \quad (\text{B.4})$$

Possiamo inoltre richiedere che  $VMU^\dagger$  sia una matrice diagonale. Studiamo quindi gli autovettori di  $M$  per capire quale è la matrice che la diagonalizza.

$$v_+ = N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \\ m_D \end{pmatrix} \quad v_- = N_- \begin{pmatrix} m_D \\ \lambda_+ \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

con

$$N_+ = \frac{m_D}{\sqrt{\lambda_+ \sqrt{m_R^2 + 4m_D^2}}} \quad N_- = \frac{\lambda_-}{\sqrt{-\lambda_- \sqrt{m_R^2 + 4m_D^2}}} \quad (\text{B.6})$$

coefficienti di normalizzazione.

Costruiamo la matrice del cambiamento di base utilizzando gli autovettori trovati.

$$B = (v_-, v_+) = \begin{pmatrix} \frac{N_- m_D}{\lambda_-} & N_+ \\ N_- & \frac{N_+ \lambda_+}{m_D} \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Dunque vale

$$B^{-1} M B = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Occupiamoci ora dell'autovalore negativo  $\lambda_-$ . Una massa negativa non ha senso fisico, pertanto introduciamo delle matrici diagonali di fasi  $\Omega$ ,  $\tilde{\Omega}$ , ed esprimiamo le relazioni tra  $U$ ,  $V$  e  $B$ .

$$V = \Omega B^{-1} \quad U^\dagger = T \tilde{\Omega} \quad (\text{B.9})$$

Definite in modo che valga

$$T^{-1} \Omega M \tilde{\Omega} T = \begin{pmatrix} -\lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_- & 0 \\ 0 & m_+ \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Una possibile scelta è  $\tilde{\Omega} = \mathbb{1}$ , e  $\Omega = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

A questo punto esprimiamo i doppietti dei campi levogiri e destrogiri di Majorana in termini dei campi a massa definita.

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R^c \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \psi_L = \frac{N_- m_D}{\lambda_-} \psi_- + N_+ \psi_+ \\ \psi_R^c = N_- \psi_- + \frac{N_+ \lambda_+}{m_D} \psi_+ \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

$$(\bar{\psi}_L^c, \bar{\psi}_R) = (\bar{\psi}_-, \bar{\psi}_+) V^\dagger \Rightarrow \begin{cases} \bar{\psi}_L^c = -\frac{N_- m_D}{\lambda_-} \bar{\psi}_- + N_+ \bar{\psi}_+ \\ \bar{\psi}_R = -N_- \bar{\psi}_- + \frac{N_+ \lambda_+}{m_D} \bar{\psi}_+ \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

## B.1 Meccanismo dell'altalena

Nel limite utilizzato nel meccanismo dell'altalena

$$m_R \gg m_D$$

vediamo come variano gli autovalori e le relazioni tra i campi, trascurando i termini di  $O(m_D^2/m_R^2)$  e inferiori.

$$m_- \simeq \frac{m_D^2}{m_R} \quad m_+ \simeq m_R \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \psi_L &= \psi_- + \frac{m_D}{m_R} \psi_+ \\ \psi_R^c &= \frac{m_D}{m_R} \psi_- + \psi_+ \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Lo stesso vale per le autofunzioni aggiunte. Sottolineiamo che il neutrino levogiro risulta costituito principalmente da  $\psi_-$ , con una piccola presenza del campo massivo pesante  $\psi_+$ , come si voleva ottenere.

## Appendice C

# Tensori Adronici

Valutiamo il tensore adronico descritto nella (6.9). Il conto è separato in tre contributi differenti. Infatti pensiamo la corrente adronica come composta da una parte vettoriale e da una assiale, così che nel conto totale abbiamo i contributi vettoriale, assiale e vettoriale-assiale. La dipendenza dei fattori di forma dal quadrimpulso trasferito è omessa per facilitare la lettura.

### C.1 Parte vettoriale

$$\frac{1}{2} \sum_{s,s'} \left( \bar{u}_{s'}(p') \left[ F_1 \gamma^\mu + \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha \right] u_s(p) \bar{u}_s(p) \left[ F_1 \gamma^\nu - \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\nu\beta} q_\beta \right] u_{s'}(p') \right)$$

Riconosciamo i due proiettori sugli autostati dell'energia, e quindi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{s'} \left( \bar{u}_{s'}(p') \left[ F_1 \gamma^\mu + \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha \right] \frac{\not{p} + m_n}{2m_n} \left[ F_1 \gamma^\nu - \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\nu\beta} q_\beta \right] u_{s'}(p') \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\not{p}' + m_p}{2m_p} \right)^{\sigma\rho} \left( \left[ F_1 \gamma^\mu + \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha \right] \frac{\not{p} + m_n}{2m_n} \left[ F_1 \gamma^\nu - \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\nu\beta} q_\beta \right] \right)_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

che è una traccia.

Dalla regola di anticommutazione  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\mathbb{1} g^{\mu\nu}$  abbiamo che

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = 2\mathbb{1} g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \mathbb{1} g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$$

da cui

$$i\sigma^{\mu\alpha} = -\frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\alpha] = \gamma^\alpha \gamma^\mu - \mathbb{1} g^{\mu\alpha} \quad \rightarrow \quad i\sigma^{\mu\alpha} q_\alpha = \not{q} \gamma^\mu - \mathbb{1} q^\mu$$

Quindi abbiamo

$$\frac{1}{8m_n m_p} \text{Tr} \left( (\not{p}' + m_p) \left[ F_1 \gamma^\mu + \frac{\kappa}{2m} F_2 (\not{q} \gamma^\mu - q^\mu) \right] (\not{p} + m_n) \left[ F_1 \gamma^\nu + \frac{\kappa}{2m} F_2 (q^\nu - \not{q} \gamma^\nu) \right] \right)$$

Pertanto si hanno diversi termini, che valutiamo separatamente.

- $\text{Tr}(\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu) \cdot F_1^2 = 4F_1^2 (p'^\mu p^\nu - p p' g^{\mu\nu} + p'^\nu p^\mu)$

- $\text{Tr}\left(\not{p}'\gamma^\mu m_n \not{q}\gamma^\nu\right) \cdot \left(-\right)\frac{\kappa}{2m}F_2F_1 = -2\frac{m_n}{m}F_1F_2(p'^\mu q^\nu - qp' g^{\mu\nu} + p'^\nu q^\mu)$   
 $\text{Tr}\left(\not{p}'\not{q}\gamma^\mu m_n \gamma^\nu\right) \cdot \frac{\kappa}{2m}F_2F_1 = 2\frac{m_n}{m}F_1F_2(qp' g^{\mu\nu} - p'^\mu q^\nu + p'^\nu q^\mu)$   
 $\hookrightarrow 4\kappa\frac{m_n}{m}F_1F_2\left(qp' g^{\mu\nu} - p'^\mu q^\nu\right)$
- $\text{Tr}\left(m_p\gamma^\mu \not{p}\not{q}\gamma^\nu\right) \cdot \left(-\right)\frac{\kappa}{2m}F_2F_1 = -2\frac{m_p}{m}F_1F_2(p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu + qp g^{\mu\nu})$   
 $\text{Tr}\left(m_p\not{q}\gamma^\mu \not{p}\gamma^\nu\right) \cdot \frac{\kappa}{2m}F_2F_1 = 2\frac{m_p}{m}F_1F_2(p^\mu q^\nu - qp g^{\mu\nu} + p^\nu q^\mu)$   
 $\hookrightarrow 4\kappa\frac{m_p}{m}F_1F_2\left(p^\nu q^\mu - qp g^{\mu\nu}\right)$
- $\text{Tr}\left(m_p\gamma^\mu m_n \gamma^\nu\right) \cdot F_1^2 = 4m_n m_p F_1^2 g^{\mu\nu}$
- $\text{Tr}\left(m_p q^\mu m_n q^\nu\right) \cdot \left(-\right)\frac{\kappa^2}{4m^2}F_2^2 = -\frac{m_n m_p}{m^2}\kappa^2 F_2^2 q^\mu q^\nu$   
 $\text{Tr}\left(m_p\not{q}\gamma^\mu m_n q^\nu\right) \cdot \frac{\kappa^2}{4m^2}F_2^2 = \frac{m_n m_p}{m^2}\kappa^2 F_2^2 q^\mu q^\nu$   
 $\text{Tr}\left(m_p q^\mu m_n \not{q}\gamma^\nu\right) \cdot \frac{\kappa^2}{4m^2}F_2^2 = \frac{m_n m_p}{m^2}\kappa^2 F_2^2 q^\mu q^\nu$   
 $\hookrightarrow \frac{m_n m_p}{m^2}\kappa^2 F_2^2 q^\mu q^\nu$
- $\text{Tr}\left(m_p\not{q}\gamma^\mu m_n \not{q}\gamma^\nu\right) \cdot \left(-\right)\frac{\kappa^2}{4m^2}F_2^2 = -\frac{m_n m_p}{m^2}\kappa^2 F_2^2(2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu})$
- $\text{Tr}\left(\not{p}'q^\mu \not{p}q^\nu\right) \cdot \left(-\right)\frac{\kappa^2}{4m^2}F_2^2 = -\frac{\kappa^2}{m^2}F_2^2 pp' q^\mu q^\nu$
- $\text{Tr}\left(\not{p}'\gamma^\mu m_n q^\nu\right) \cdot \frac{\kappa}{2m}F_1F_2 = 2\kappa\frac{m_n}{m}F_1F_2 p'^\mu q^\nu$
- $\text{Tr}\left(\not{p}'q^\mu m_n \gamma^\nu\right) \cdot \left(-\right)\frac{\kappa}{2m}F_1F_2 = -2\kappa\frac{m_n}{m}F_1F_2 p'^\nu q^\mu$
- $\text{Tr}\left(m_p q^\mu \not{p}\gamma^\nu\right) \cdot \left(-\right)\frac{\kappa}{2m}F_1F_2 = -2\kappa\frac{m_p}{m}F_1F_2 p^\nu q^\mu$
- $\text{Tr}\left(m_p\gamma^\mu \not{p}q^\nu\right) \cdot \frac{\kappa}{2m}F_1F_2 = 2\kappa\frac{m_p}{m}F_1F_2 p^\mu q^\nu$
- $\text{Tr}\left(\not{p}'\not{q}\gamma^\mu \not{p}q^\nu\right) \cdot \frac{\kappa^2}{4m^2}F_2^2 = \frac{\kappa^2}{m^2}F_2^2(qp' p^\mu q^\nu - qp p'^\mu q^\nu + pp' q^\mu q^\nu)$
- $\text{Tr}\left(\not{p}'q^\mu \not{p}\not{q}\gamma^\nu\right) \cdot \frac{\kappa^2}{4m^2}F_2^2 = \frac{\kappa^2}{m^2}F_2^2(qp p'^\nu q^\mu - qp' p^\nu q^\mu + pp' q^\mu q^\nu)$
- $\text{Tr}\left(\not{p}'\not{q}\gamma^\mu \not{p}\not{q}\gamma^\nu\right) \cdot \left(-\right)\frac{\kappa^2}{4m^2}F_2^2 = \frac{\kappa^2}{m^2}F_2^2\left[pp'(q^2 g^{\mu\nu} - 2q^\mu q^\nu) - q^2(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu) + 2qp p'^\mu q^\nu + 2qp' q^\mu p^\nu - 2qp' qp g^{\mu\nu}\right]$

Li sommiamo tutti, omettendo un fattore  $\frac{1}{8m_n m_p}$  davanti.

$$\left\{ 4F_1^2(p'^\mu p^\nu + p^\mu p'^\nu) + 4F_1^2(m_n m_p - pp') g^{\mu\nu} \right. \\ \left. + 2\frac{\kappa}{m} F_1 F_2 \left[ 2(m_n qp' - m_p qp) g^{\mu\nu} - (m_n p'^\mu - m_p p^\mu) q^\nu - (m_n p'^\nu - m_p p^\nu) q^\mu \right] \right. \\ \left. - \frac{m_n m_p}{m^2} \kappa^2 F_2^2 (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) + \frac{\kappa^2}{m^2} F_2^2 \left[ pp' (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) - q^2 (p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu) \right. \right. \\ \left. \left. + qp (p'^\mu q^\nu + q^\mu p'^\nu) + qp' (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) - 2qp' qp g^{\mu\nu} \right] \right\}$$

Nell'espressione compaiono le tre quantità  $p, p', q$ , che non sono indipendenti tra loro. È quindi possibile scrivere tutto in funzione di due fra queste, e scegliamo  $p, q$ .

- $p' = p + q$
- $q^2 = m_p^2 + m_n^2 - 2pp' \rightarrow pp' = \frac{m_p^2 + m_n^2}{2} - \frac{q^2}{2}$
- $pq = pp' - p^2 = \frac{m_p^2 + m_n^2}{2} - \frac{q^2}{2} - m_p^2 = \frac{m_p^2 - m_n^2}{2} - \frac{q^2}{2}$
- $qp' = -pp' + p'^2 = -\frac{m_p^2 + m_n^2}{2} + \frac{q^2}{2} + m_p^2 = \frac{m_p^2 - m_n^2}{2} + \frac{q^2}{2}$

$$\left\{ 2F_1^2 \left[ 4p^\mu p^\nu + 2q^\mu p^\nu + 2q^\nu p^\mu + \left( q^2 - (m_n - m_p)^2 \right) g^{\mu\nu} \right] \right. \\ \left. + 2\frac{\kappa}{m} F_1 F_2 \left[ 2m_n (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \right. \right. \\ \left. \left. + (m_n - m_p) \left( (m_p^2 - m_n^2 - q^2) g^{\mu\nu} - q^\mu p^\nu - q^\nu p^\mu \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{m_n m_p}{m^2} \kappa^2 F_2^2 (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \right. \\ \left. + \frac{\kappa^2}{2m^2} F_2^2 \left[ (m_n^2 + m_p^2 - q^2) (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) - 2q^2 (2p^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu + q^\mu p^\nu) \right. \right. \\ \left. \left. + (m_p^2 - m_n^2 - q^2) (2q^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) \right. \right. \\ \left. \left. + (q^2 + m_p^2 - m_n^2) (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) - \left( (m_n^2 - m_p^2)^2 - (q^2)^2 \right) g^{\mu\nu} \right] \right\} \quad (C.1)$$

Semplificando

$$\left\{ 2F_1^2 \left[ 4p^\mu p^\nu + 2(q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) + \left( q^2 - (m_n - m_p)^2 \right) g^{\mu\nu} \right] \right. \\ \left. + 2\frac{\kappa}{m} F_1 F_2 \left[ \left( q^2 - (m_n - m_p)^2 \right) (m_n + m_p) g^{\mu\nu} - 2m_n q^\mu q^\nu \right. \right. \\ \left. \left. - (m_n - m_p) (q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu) \right] \right. \\ \left. + \frac{\kappa^2}{2m^2} F_2^2 \left[ \left( q^2 - (m_n - m_p)^2 \right) (m_n + m_p)^2 g^{\mu\nu} \right. \right. \\ \left. \left. - \left( q^2 + (m_n + m_p) (3m_n - m_p) \right) q^\mu q^\nu - 4q^2 p^\mu p^\nu \right. \right. \\ \left. \left. + 2(m_p^2 - m_n^2 - q^2) (q^\nu p^\mu + q^\mu p^\nu) \right] \right\} \quad (C.2)$$

A questo punto è conveniente raggruppare i vari termini di questa espressione in base alla loro parte tensoriale.

$$\frac{1}{4m_n m_p} \left[ W_{1_V} g^{\mu\nu} + W_{2_V} p^\mu p^\nu + W_{4_V} q^\mu q^\nu + W_{5_V} (q^\nu p^\mu + q^\mu p^\nu) \right] \quad (C.3)$$

I fattori inseriti sono tutti funzioni di  $q^2$ :  $W_{i_V}(q^2)$ . Il pedice  $V$  sta a indicare che sono relativi alla componente vettoriale del conto. Esplicitiamo le loro definizioni, e per comodità introduciamo anche due quantità di massa:  $\delta := m_n - m_p$  e  $M := m_n + m_p = 2m$

- $W_{1_V} := F_1^2(q^2 - \delta^2) + \frac{\kappa}{m} F_1 F_2 (q^2 - \delta^2) M + \frac{\kappa^2}{4m^2} F_2^2 (q^2 - \delta^2) M^2$   
 $= (q^2 - \delta^2) (F_1 + \kappa F_2)^2$   
 $\hookrightarrow W_{1_V} = (q^2 - \delta^2) (F_1 + \kappa F_2)^2$
- $W_{2_V} := 4F_1^2 - q^2 \frac{\kappa^2}{m^2} F_2^2$
- $W_{4_V}(q^2) := -2m_n \frac{\kappa}{m} F_1 F_2 - [q^2 + M(M + 2\delta)] \frac{\kappa^2}{4m^2} F_2^2$
- $W_{5_V}(q^2) := 2F_1^2 - \delta \frac{\kappa}{m} F_1 F_2 - \frac{\kappa^2}{2m^2} F_2^2 (q^2 + M\delta)$

## C.2 Parte assiale

Si eseguono gli stessi passaggi della parte precedente:

$$-\frac{1}{2} \sum_{s,s'} \left( \bar{u}_{s'}(p') \left[ F_A \gamma^\mu \gamma_5 + \frac{1}{m} F_P q^\mu \gamma_5 \right] u_s(p) \bar{u}_s(p) \left[ F_A \gamma_5 \gamma^\nu + \frac{1}{m} F_P q^\nu \gamma_5 \right] u_{s'}(p') \right)$$

$$= -\frac{1}{8m_n m_p} (\not{p}' + m_p)^{\beta\alpha} \left( \left[ F_A \gamma^\mu \gamma_5 + \frac{1}{m} F_P q^\mu \gamma_5 \right] (\not{p} + m_n) \left[ F_A \gamma_5 \gamma^\nu + \frac{1}{m} F_P q^\nu \gamma_5 \right] \right)_{\alpha\beta}$$

che è una traccia. Seguono tutti i termini non nulli.

- $\text{Tr}(\not{p}' \gamma^\mu \gamma_5 \not{p} \gamma_5 \gamma^\nu) \cdot F_A^2 = -F_A^2 \text{Tr}(\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu) = 4F_A^2 (pp' g^{\mu\nu} - p'^\mu p^\nu - p'^\nu p^\mu)$
- $\text{Tr}(\not{p}' q^\mu \gamma_5 \not{p} \gamma_5 q^\nu) \cdot \frac{1}{m^2} F_P^2 = -\frac{1}{m^2} F_P^2 q^\mu q^\nu \text{Tr}(\not{p}' \not{p}) = -\frac{4}{m^2} F_P^2 pp' q^\mu q^\nu$
- $\text{Tr}(\not{p}' \gamma^\mu \gamma_5 m_n q^\nu \gamma_5) \cdot \frac{1}{m} F_A F_P = \frac{m_n}{m} F_A F_P q^\nu \text{Tr}(\not{p}' \gamma^\mu) = \frac{4m_n}{m} F_A F_P p'^\mu q^\nu$   
 $\text{Tr}(\not{p}' q^\mu \gamma_5 m_n \gamma_5 \gamma^\nu) \cdot \frac{1}{m} F_A F_P = \frac{m_n}{m} F_A F_P q^\mu \text{Tr}(\not{p}' \gamma^\nu) = \frac{4m_n}{m} F_A F_P p'^\nu q^\mu$
- $\text{Tr}(m_p \gamma^\mu \gamma_5 \not{p} q^\nu \gamma_5) \cdot \frac{1}{m} F_A F_P = -\frac{m_p}{m} F_A F_P q^\nu \text{Tr}(\not{p} \gamma^\mu) = -\frac{4m_p}{m} F_A F_P p^\mu q^\nu$   
 $\text{Tr}(m_p q^\mu \gamma_5 \not{p} m_n \gamma_5 \gamma^\nu) \cdot \frac{1}{m} F_A F_P = -\frac{m_p}{m} F_A F_P q^\mu \text{Tr}(\not{p} \gamma^\nu) = -\frac{4m_p}{m} F_A F_P p^\nu q^\mu$
- $\text{Tr}(m_p \gamma^\mu \gamma_5 m_n \gamma_5 \gamma^\nu) \cdot F_A^2 = m_p m_n F_A^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4m_n m_p F_A^2 g^{\mu\nu}$
- $\text{Tr}(m_p q^\mu \gamma_5 m_n \gamma_5 q^\nu) \cdot \frac{1}{m^2} F_P^2 = \frac{m_p m_n}{m^2} F_P^2 q^\mu q^\nu \text{Tr}(\mathbb{1}) = \frac{4m_n m_p}{m^2} F_P^2 q^\mu q^\nu$

Sommando tutti i contributi si ha

$$-\frac{1}{8m_n m_p} \left\{ -4F_A^2 [p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - (pp' + m_n m_p) g^{\mu\nu}] - \frac{4}{m^2} F_P^2 (pp' - m_n m_p) q^\mu q^\nu \right.$$

$$\left. + \frac{4}{m} F_A F_P [m_n (p'^\mu q^\nu + p'^\nu q^\mu) - m_p (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)] \right\}$$



Scritto in termini di  $p, q$  diventa

$$\frac{1}{4m_n m_p} \left\{ F_A^2 \left[ 4p^\mu p^\nu + 2(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) + (q^2 - (m_n + m_p)^2) g^{\mu\nu} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{m^2} F_P^2 \left[ (q^2 - (m_n - m_p)^2) q^\mu q^\nu - \frac{2}{m} F_A F_P \left[ 2m_n q^\mu q^\nu + (m_n - m_p)(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \right] \right] \right\}$$

Ora omettiamo il coefficiente comune di  $\frac{1}{4m_n m_p}$  e raggruppiamo in base alla parte tensoriale. Anche qui useremo  $\delta, M$  e il pedice  $A$  nei  $W_{i_A}$  con ovvio significato.

$$\begin{aligned} \sim g^{\mu\nu} &\rightarrow W_{1_A} := (q^2 - M^2) F_A^2 \\ \sim p^\mu p^\nu &\rightarrow W_{2_A} := 4F_A^2 \\ \sim q^\mu q^\nu &\rightarrow W_{4_A} := -\frac{4m_n}{m} F_A F_P - \frac{1}{m^2} F_P^2 (q^2 - \delta^2) \\ \sim (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) &\rightarrow W_{5_A} := 2(F_A^2 - \frac{\delta}{m} F_A F_P) \end{aligned} \quad (C.4)$$

### C.3 Parte vettoriale-assiale

Si prende l'espressione

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{s, s'} \left( \bar{u}_{s'}(p') \left[ F_1 \gamma^\mu + \frac{\kappa}{2m} F_2 i \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha \right] u_s(p) \bar{u}_s(p) \left[ F_A \gamma_5 \gamma^\nu + \frac{1}{m} F_P q^\nu \gamma_5 \right] u_{s'}(p') \right. \\ & \left. - \bar{u}_{s'}(p') \left[ F_A \gamma^\mu \gamma_5 + \frac{1}{m} F_P q^\mu \gamma_5 \right] u_s(p) \bar{u}_s(p) \left[ F_1 \gamma^\nu - \frac{\kappa}{2m} F_2 (q^2) i \sigma^{\nu\beta} q_\beta \right] u_{s'}(p') \right) \\ & = \frac{1}{8m_n m_p} (\not{p}' + m_p)^{\beta\alpha} \left\{ \left( \left[ F_1 \gamma^\mu + \frac{\kappa}{2m} F_2 (\not{q} \gamma^\mu - q^\mu) \right] (\not{p} + m_n) \left[ F_A \gamma_5 \gamma^\nu + \frac{1}{m} F_P q^\nu \gamma_5 \right] \right)_{\alpha\beta} \right. \\ & \left. - \left( \left[ F_A \gamma^\mu \gamma_5 + \frac{1}{m} F_P q^\mu \gamma_5 \right] (\not{p} + m_n) \left[ F_1 \gamma^\nu + \frac{\kappa}{2m} F_2 (q^\nu - \not{q} \gamma^\nu) \right] \right)_{\alpha\beta} \right\} \end{aligned}$$

che è composta da tracce. Abbiamo infatti due operazioni di traccia fra matrici, che però risultano uguali. Pertanto valuteremo solo la prima e ne faremo il doppio. Seguono tutti i termini non nulli.

- $\text{Tr}(\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma_5 \gamma^\nu) \cdot F_1 F_A = 4i F_1 F_A \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} p'_\alpha p_\beta$
- $\text{Tr}(\not{p}' \not{q} \gamma^\mu m_n \gamma_5 \gamma^\nu) \cdot \frac{\kappa}{2m} F_2 F_A = 2i \frac{m_n}{m} \kappa F_2 F_A \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} p'_\alpha q_\beta$
- $\text{Tr}(m_p \not{q} \gamma^\mu \not{p} \gamma_5 \gamma^\nu) \cdot \frac{\kappa}{2m} F_2 F_A = 2i \frac{m_p}{m} \kappa F_2 F_A \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} q_\alpha p_\beta$

A questo punto utilizziamo il fatto che  $p' = q + p$  e che  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu}$  è una quantità completamente antisimmetrica, e dunque se contratta con termini simmetrici come  $p^\mu p^\nu$  si annulla. Sommando tutto si ottiene:

$$-\frac{1}{4m_n m_p} 2i \left( 2F_1 + \frac{m_n + m_p}{m} \kappa F_2 \right) F_A \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} p_\alpha q_\beta$$

da cui definiamo

$$W_{3_{VA}} := -4(F_1 + \kappa F_2) F_A$$

### C.4 Definizione dei fattori $W_i$

In conclusione sommiamo tutti i contributi delle parti vettoriale, assiale, vettoriale-assiale per scrivere il tensore adronico in maniera più compatta:

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4m_n m_p} \left[ W_1 g^{\mu\nu} + W_2 p^\mu p^\nu + W_3 i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} p_\alpha q_\beta + W_4 q^\mu q^\nu + W_5 (q^\nu p^\mu + q^\mu p^\nu) \right] \quad (\text{C.5})$$

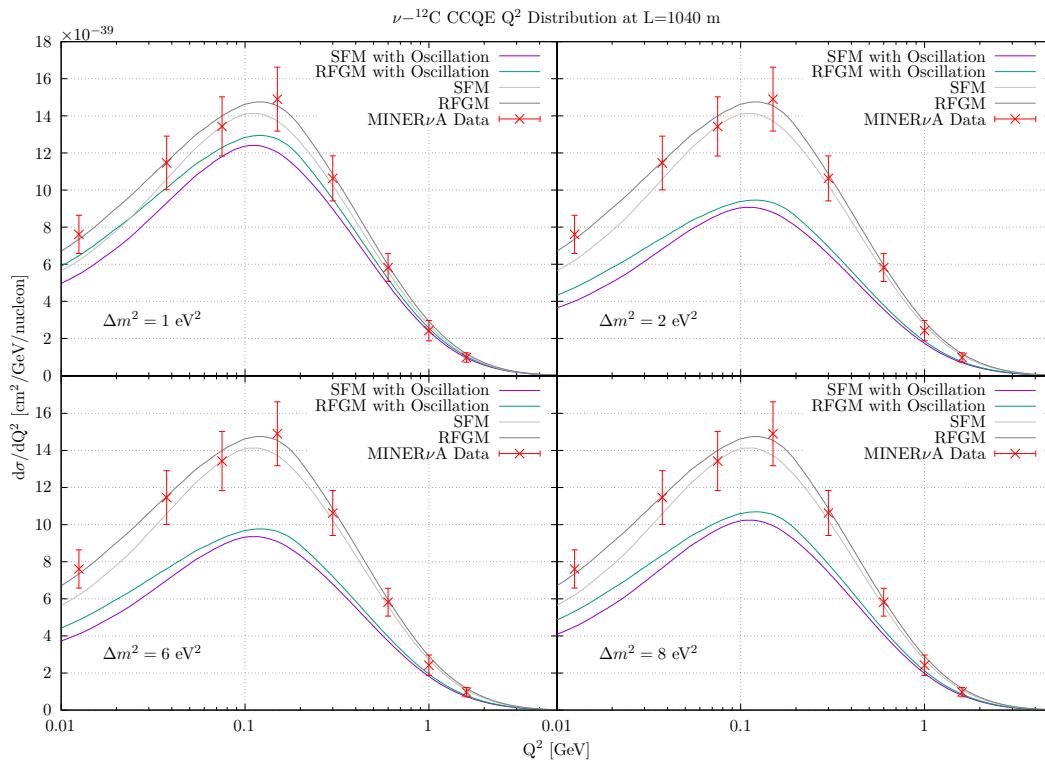
dove i fattori  $W_i$  sono semplicemente la somma dei fattori  $W_{i_V}, W_{i_A}, W_{i_{VA}}$ . Seguono le espressioni esplicite che li definiscono.

$$\begin{aligned} W_1 &:= (q^2 - \delta^2)(F_1 + \kappa F_2)^2 + (q^2 - M^2)F_A^2 \\ W_2 &:= 4 \left( F_1^2 + F_A^2 \right) - q^2 \frac{\kappa^2}{m^2} F_2^2 \\ W_3 &:= -4(F_1 + \kappa F_2)F_A \\ W_4 &:= -2m_n \left( \frac{2}{m} F_A F_P + \frac{\kappa}{m} F_1 F_2 \right) - [q^2 + M(M + 2\delta)] \frac{\kappa^2}{4m^2} F_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{m^2} F_P^2 (q^2 - \delta^2) \\ W_5 &:= 2 \left( F_1^2 + F_A^2 - \frac{\delta}{m} F_A F_P \right) - \delta \frac{\kappa}{m} F_1 F_2 - \frac{\kappa^2}{2m^2} F_2^2 (q^2 + M\delta) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

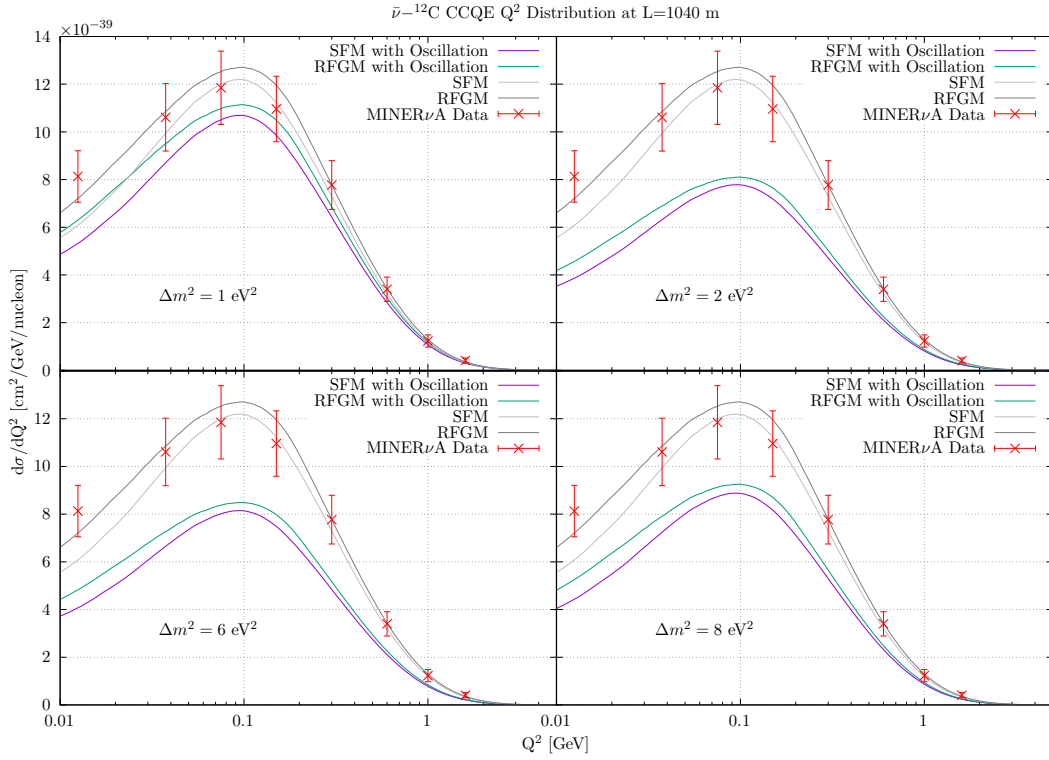
## Appendice D

### Figure d'oscillazione

Riportiamo le distribuzioni in  $Q^2$  integrate ottenute utilizzando il flusso di MINER $\nu$ A includendo il fenomeno delle oscillazioni delle particelle incidenti in stati sterili. Si è considerato il modello 3+1, in approssimazioni di mescolamento a due stati. I parametri utilizzati per descriverlo sono diversi. Seguono le figure ottenute con  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu} = 0.8$ , con valori di  $\Delta m^2$  crescenti: 1, 2, 6, 8  $\text{GeV}^2$ .

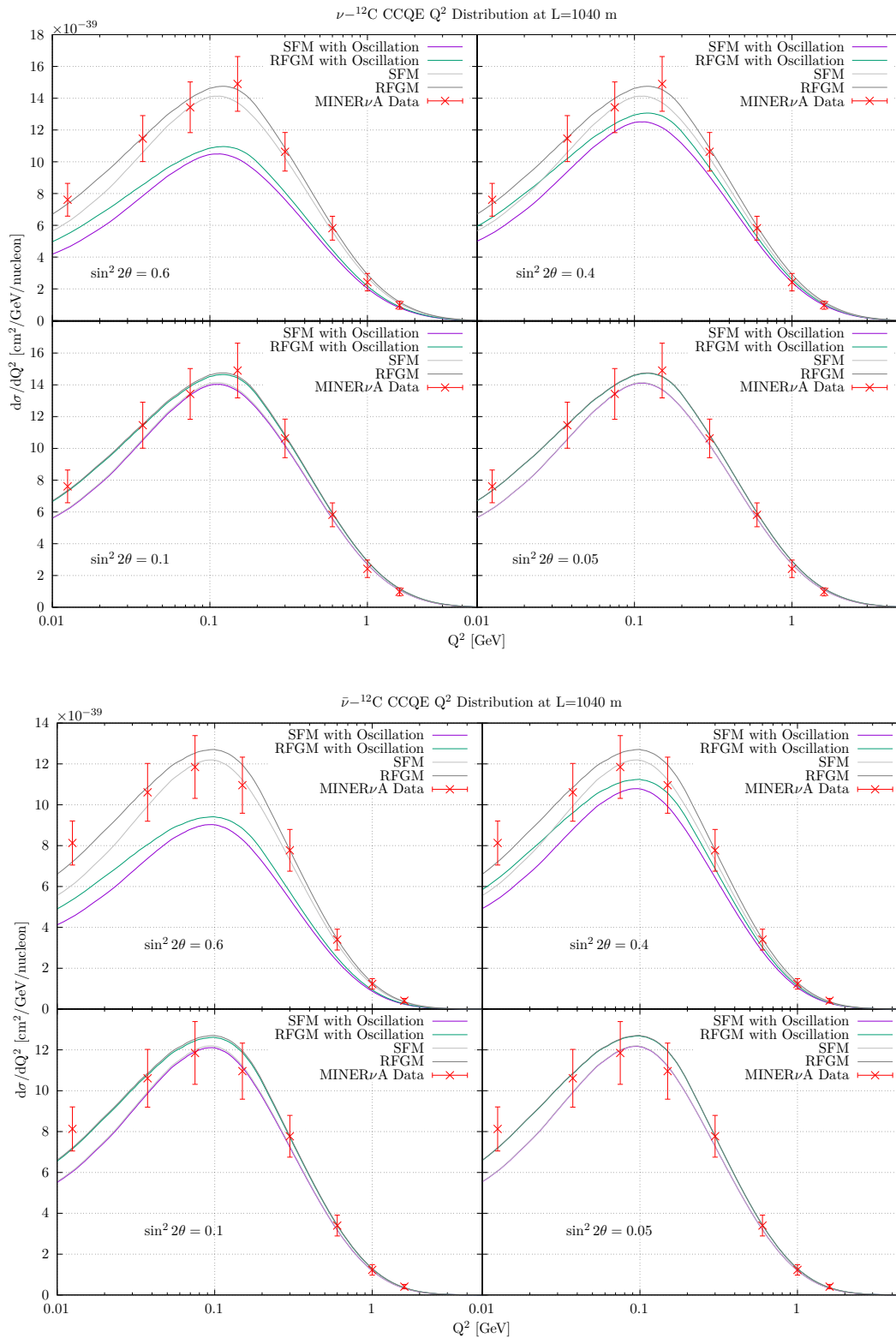


**Figura D.1.** Distribuzione del  $Q^2$  per la diffusione CCQE con neutrini incidenti. In grigio è rappresentata la distribuzione in assenza di mescolamento con il neutrino sterile, mentre le curve colorate sono ottenute con parametri di oscillazione  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu} = 0.8$  e  $\Delta m^2$  variabile. In rosso i dati ottenuti da MINER $\nu$ A.



**Figura D.2.** Distribuzione del  $Q^2$  per la diffusione CCQE con antineutrini incidenti. In grigio è rappresentata la distribuzione in assenza di mescolamento con il neutrino sterile, mentre le curve colorate sono ottenute con parametri di oscillazione  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu} = 0.8$  e  $\Delta m^2$  variabile. In rosso i dati ottenuti da MINERνA.

Nei grafici che seguono invece abbiamo fissato il valore di  $\Delta m^2 = 4.2$  GeV<sup>2</sup>, provando con accoppiamenti più modesti. Non utilizziamo valori di  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu} < 0.01$ , poiché in questo intervallo il fenomeno delle oscillazioni non è apprezzabile. È riportato, a titolo d'esempio, il caso  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu} = 0.005$  nelle figure D.3.



**Figura D.3.** Distribuzione del  $Q^2$  per la diffusione CCQE con neutrini (in alto) e antineutrini (in basso) incidenti. In grigio è rappresentata la distribuzione in assenza di mescolamento con il neutrino sterile, mentre le curve colorate sono ottenute con parametri di oscillazione  $\Delta m^2 = 4.2$   $\text{eV}^2$  e variabile  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu}$ . Si noti come l'accoppiamento con il neutrino sterile sia praticamente invisibile nel caso di  $\sin^2 2\theta_{\mu\mu} = 0.05$ , nella configurazione presa in analisi. In rosso i dati ottenuti da MINER $\nu$ A.

