

“Sapienza” Università di Roma



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di laurea in Fisica
Anno Accademico 2009-2010

Tesi di Laurea Specialistica

**Descrizione degli effetti nucleari nell'analisi delle
misure di oscillazioni di neutrino**

Relatore:

Dott. Omar Benhar Noccioli

Candidato:

Pietro Coletti

Indice

Introduzione	1
1 Oscillazioni dei neutrini: teoria ed osservazione	5
1.1 Teoria di Majorana	6
1.2 Mixing dei neutrini	7
1.3 Il meccanismo see-saw	8
1.4 Diagonalizzazione della matrice di massa nel caso di tre famiglie	9
1.5 Oscillazioni nel vuoto	13
1.6 L'esperimento MiniBooNE	17
2 Descrizione della dinamica nucleare	21
2.1 Caratteristiche dell'interazione nucleone-nucleone	22
2.2 Teoria di Yukawa	26
2.3 Potenziali fenomenologici	30
2.4 La teoria a molti corpi non relativistica	32
3 Interazioni dei neutrini	35
3.1 Interazione neutrino-nucleone	35
3.2 La sezione d'urto quasi elastica	36
3.3 L'interazione con il nucleo	41
3.4 La funzione spettrale	46

3.5	La sezione d'urto quasi elastica	49
3.6	Funzione Spettrale del carbonio	50
4	Risultati	53
4.1	Sezione d'urto a cinematica fissata	53
4.2	Confronto con i dati di MiniBooNE	55
	Conclusioni	59
	Appendici	65
A	Fattori di forma	65
B	Estremi di integrazione per la funzione spettrale	67
	Bibliografia	69

Introduzione

La fisica del neutrino è uno dei campi più attivi nell'odierno panorama della fisica delle particelle elementari. Dopo la scoperta delle oscillazioni dei neutrini solari ed atmosferici, l'esperimento OPERA [1] ha recentemente registrato l'apparizione di un neutrino di flavor tau in un fascio di neutrini muonici. La misura accurata dei parametri che descrivono l'oscillazione dei neutrini è uno degli obiettivi della fisica delle particelle per gli anni a venire.

Una strategia di misura molto utilizzata negli esperimenti che si propongono di osservare le oscillazioni di neutrino è quella di utilizzare bersagli nucleari. Benchè permetta di incrementare considerevolmente la statistica, questa scelta comporta problemi non banali, in quanto richiede la conoscenza dell'interazione neutrino-nucleo a livello *quantitativo*.

È opinione largamente condivisa che la precisione dei moderni esperimenti sia ormai abbastanza elevata da rendere la descrizione degli effetti nucleari una delle fonti principali di errore sistematico. La consapevolezza di questo problema ha stimolato lo sviluppo di un gran numero di modelli teorici dei meccanismi di interazione neutrino nucleo basati su descrizioni realistiche della dinamica nucleare. Invertendo la prospettiva, i fasci di neutrini molto intensi degli attuali esperimenti possono essere utilizzati per sondare le proprietà fondamentali dei nuclei, ricavando informazioni utili sulla struttura nucleare e sull'interazione neutrino-nucleo. In altre parole, nell'interazione con un fascio di neutrini, il nucleo può svolgere il duplice ruolo di rivelatore e bersaglio.

Data l'assenza di una teoria fondamentale delle interazioni forti, lo studio delle forze

nucleari si basa su modelli fenomenologici, in cui il sistema è descritto da un hamiltoniano i cui gradi di libertà sono i nucleoni. L'approssimazione più drastica, ma anche la più utilizzata dalle collaborazioni sperimentali per implementare gli effetti nucleari nei codici di simulazione Monte Carlo, consiste nel trattare i nucleoni come un gas di fermioni non interagenti, con un'energia di legame fissa. Introducendo un campo medio descritto da un potenziale si ottiene una trattazione più realistica, che va sotto il nome di modello a shell, che si è dimostrata estremamente accurata nel descrivere alcune proprietà dei nuclei. Negli ultimi dieci anni, gli esperimenti di diffusione elettrone-nucleo hanno però dimostrato l'importanza degli effetti di correlazione, rivelando la presenza all'interno dei nuclei di nucleoni con di impulso ed energia molto elevati.

In questa tesi affrontiamo la descrizione degli effetti nucleari rilevanti per lo scattering di neutrini con energia dell'ordine del GeV, necessari per descrivere i dati degli esperimenti di oscillazione di neutrino nel range $\Delta m^2 \approx eV$. In particolare, le approssimazioni e le tecniche di calcolo introdotte nella tesi sono state utilizzate per calcolare grandezze direttamente confrontabili con i dati recentemente pubblicati dall'esperimento MiniBooNE.

Lo schema che abbiamo seguito consiste nel ricavare la sezione d'urto neutrino nucleo a partire da quella neutrino nucleone, utilizzando l'approssimazione impulsiva (Impulse Approximation, IA), basata sul fatto che una sonda di impulso \mathbf{q} ha una risoluzione spaziale $\lambda \sim 1/|\mathbf{q}|$. Quando λ diviene minore della distanza di separazione media dei nucleoni all'interno del nucleo è quindi ragionevole prevedere che il processo di interazione neutrino nucleo sia dato dalla somma incoerente dei processi di interazione elementari tra il neutrino e i singoli nucleoni, che si trovano in stati *legati*.

Nel formalismo da noi utilizzato la dinamica nucleare è descritta dalla funzione spettrale, che dà la probabilità di trovare un nucleone con un impulso ed energia fissati. La funzione spettrale è una caratteristica intrinseca del nucleo, determinata univocamente

dal modello che si utilizza per le forze nucleari.

La tesi è strutturata come segue.

Il Capitolo 1 contiene una concisa introduzione alla fisica del neutrino. Dopo la definizione di campo di Majorana viene illustrato il meccanismo del mixing e come esso porti alle oscillazioni di neutrino. La chiusura del capitolo è dedicata ad una catalogazione dei tipi di esperimenti di oscillazione di neutrino e a una sintetica descrizione dell'esperimento MiniBooNE.

Il Capitolo 2 è dedicato alle nozioni di fisica nucleare necessarie per trattare l'interazione neutrino nucleo. Vengono descritte le principali proprietà delle forze nucleari e i potenziali fenomenologici utilizzati per descrivere la dinamica, a partire da quello che si ottiene dalla teoria di Yukawa.

Nel Capitolo 3 descriviamo il calcolo della sezione d'urto neutrino nucleo. In approssimazione impulsiva, il risultato ha una forma particolarmente semplice, in quanto si ottiene dall'integrazione della sezione d'urto elementare, pesata con la funzione spettrale, sul range di impulso ed energia del nucleone compatibile con le condizioni cinematiche.

Nel Capitolo 4 presentiamo i risultati ottenuti per la sezione d'urto quasi elastica, confrontati con i dati dell'esperimento MiniBooNE.

In questa tesi abbiamo utilizzato un sistema di unità di misura in cui $\hbar = c = 1$, con $\hbar = h/2\pi$.

Capitolo 1

Oscillazioni dei neutrini: teoria ed osservazione

Nel Modello Standard delle interazioni elettrodeboli [3, 4, 5] il neutrino è considerato un leptone di massa nulla, descritto da uno spinore a due componenti a chiralità definita (*sinistrorso*). I risultati sperimentali degli ultimi anni hanno però mostrato che la massa dei neutrini, seppur inferiore di ordini di grandezza rispetto alla massa del leptone più leggero, è diversa da zero.

In presenza di neutrini *destrorsi*¹, il meccanismo di Higgs genera il termine di massa per i neutrini:

$$\mathcal{L}^D = -m_D \bar{\nu} \nu = -m_D (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) = -\frac{yv}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) \quad (1.1)$$

dove y è una costante di accoppiamento di Yukawa e v è il valore di aspettazione nel vuoto del campo di Higgs.

La generazione della massa tramite il meccanismo di Higgs canonico non riesce, però, a spiegare perchè le masse dei neutrini siano ordini di grandezza più piccole di quella del leptone carico più leggero.

¹Poichè il neutrino è soggetto solo delle interazioni deboli, la sua componente destrorsa, in quanto trasforma come un singoletto sotto $SU_L(2)$, non risente di nessuna interazione con la materia. I neutrini destrorsi sono per questo detti *sterili*.

Nel corso degli anni sono stati proposti vari modelli per trovare una risposta a tale domanda. Una discussione completa ed accurata di queste teorie va al di là degli scopi di questa tesi; cionondimeno, una trattazione del fenomeno delle oscillazioni di neutrino richiede l'introduzione di concetti e teorie riguardanti i neutrini, come la teoria di Majorana dei fermioni neutri e il fenomeno del mixing, di cui le oscillazioni sono una diretta conseguenza.

In questo capitolo introdurremo la teoria di Majorana e definiremo la matrice di mixing dei neutrini passando poi a descrivere il fenomeno delle oscillazioni nel vuoto.

1.1 Teoria di Majorana

Nel 1937 Ettore Majorana [6] scoprì che per descrivere un fermione massivo neutro non è necessario uno spinore a quattro componenti, come quello che compare nell'equazione di Dirac, ma è sufficiente uno spinore a due componenti, a patto di imporre la cosiddetta condizione di Majorana:

$$\psi = \psi^c = \mathcal{C}\gamma^{0T}\psi^* , \quad (1.2)$$

dove \mathcal{C} è l'operatore coniugazione di carica².

Utilizzando le proprietà delle matrici gamma e dell'operatore di coniugazione di carica si può mostrare che lo spinore coniugato ha chiralità inversa rispetto allo spinore ψ ; operando su entrambi i membri della (1.2) con l'operatore di proiezione $P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}$ otteniamo:

$$\psi_L = \psi_R^c . \quad (1.4)$$

La (1.4) mostra che le componenti a chiralità definita del neutrino di Majorana sono dipendenti: il campo dipende solo dalle due componenti indipendenti di ψ_L .

²L'operatore di coniugazione di carica soddisfa le relazioni:

$$\mathcal{C}\gamma^{\mu T}\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu \quad ; \quad \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} \quad ; \quad \mathcal{C}^T = -\mathcal{C} \quad (1.3)$$

Il termine di massa per un neutrino di Majorana assume quindi la forma:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2}m_M(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) = -\frac{1}{2}m_M(\bar{\psi}_R^c\psi_R + \bar{\psi}_L^c\psi_L), \quad (1.5)$$

dove il fattore $1/2$ permette di ottenere le corrette equazioni del moto.

1.2 Mixing dei neutrini

Nel caso piú generale, in cui esistono sia neutrini destrorsi che sinistrorsi, il termine di massa dei neutrini avrà un contributo alla Dirac, del tipo (1.1), e un contributo alla Majorana, del tipo (1.5), per ognuno dei due campi ν_R e ν_L . Sarà quindi della forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{massa} &= \mathcal{L}^D + \mathcal{L}_R^M + \mathcal{L}_L^M = \\ &= -m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) - \frac{m_R}{2}(\bar{\nu}_R^c\nu_R + \bar{\nu}_R^c\nu_R) - \frac{m_L}{2}(\bar{\nu}_L^c\nu_L + \bar{\nu}_L^c\nu_L) \end{aligned} \quad (1.6)$$

che può essere riscritta come

$$\mathcal{L}_{massa} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^c & \nu_R \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} + \text{H.c.}, \quad (1.7)$$

con

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

L'equazione (1.2) mostra che, nel caso di $m_D \neq 0$, i due campi ν_L e ν_R^c non hanno massa definita. Per ottenere i campi a massa definita è necessario diagonalizzare la matrice di massa, richiedendo che

$$U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Limitandoci al caso di una matrice di massa reale³ possiamo scomporre la matrice U nel prodotto di una matrice di rotazione per una matrice diagonale :

$$U = \mathcal{R}(\theta)\rho = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

³Il caso di una matrice di massa reale corrisponde al caso m_D reale, poiché i termini m_L e m_R possono essere scelti reali e positivi con una appropriata scelta di fase dei campi ν_L e ν_R .

dove $|\rho_k|^2 = 1$.

La matrice \mathcal{R} si ottiene imponendo

$$\mathcal{R}^\dagger M \mathcal{R} = \begin{pmatrix} m'_1 & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

da cui segue

$$\tan(2\theta) = \frac{2m_D}{m_R - m_L}, \quad m'_{1,2} = \frac{1}{2} [m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}]. \quad (1.12)$$

Le fasi che compaiono nella matrice ρ vengono scelte consistentemente alla richiesta di masse fisiche reali e positive:

$$U^\dagger M U = \rho^\dagger \mathcal{R}^\dagger M \mathcal{R} \rho = \begin{pmatrix} \rho_1^2 m'_1 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 m'_2 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

1.3 Il meccanismo see-saw

Nella (1.2) compaiono tre masse distinte, al momento attuale tre *parametri* della teoria. Per riallacciarsi in maniera coerente alle teorie preesistenti, questi parametri devono soddisfare alcune relazioni.

Nel quadro del Modello Standard il neutrino ν_L fa parte di un doppietto di isospin debole, con terza componente $I_3 = 1/2$. Il termine $\bar{\nu}_L^c \nu_L$ che compare come termine di massa di Majorana per il neutrino sinistrorso nella (1.6) ha di conseguenza $I_3 = 1$ e fa parte di un tripletto di isospin debole che non é invariante sotto $SU(2)_L$, gruppo di simmetria del Modello Standard, sotto cui tutti i termini del lagrangiano devono essere invarianti. La consistenza con il Modello Standard richiede dunque che $m_L = 0$. I termini m_D e m_R sono invece permessi, poiché il primo é generato attraverso il meccanismo di Higgs canonico e il termine $\bar{\nu}_R^c \nu_R$ trasforma come singoletto sotto $SU(2)_L$.

Analizziamo ora il caso in cui la matrice M é reale, $m_L = 0$ e $|m_D| \ll m_R^4$, che implica

$$m_1 \approx \frac{m_D^2}{m_R} \ll |m_D| \quad , \quad m_2 \approx m_R \quad , \quad \tan \theta \approx \frac{m_D}{m_R} \ll 1 \quad , \quad \rho_1^2 = -1 \quad . \quad (1.14)$$

La (1.14) mostra come ad un ν_2 molto pesante (massa dell'ordine di m_R) corrisponde un ν_1 con una massa molto minore della massa di Dirac, attesa dell'ordine di grandezza delle masse dei leptoni carichi associati o dei quark. Queste condizioni vanno sotto il nome di meccanismo see-saw (altalena) [7, 8, 9], poichè tanto più m_2 è grande, tanto più m_1 è soppressa rispetto a m_D .

Il meccanismo see-saw porta anche ad un angolo di mixing molto piccolo, il che comporta

$$\nu_{1L} \approx -\nu_L \quad , \quad \nu_{2L} \approx \nu_R^c \quad , \quad (1.15)$$

ovvero che il neutrino che partecipa alle interazioni deboli é il neutrino leggero, mentre il neutrino pesante é praticamente inerte.

1.4 Diagonalizzazione della matrice di massa nel caso di tre famiglie

Fino a questo momento abbiamo considerato il caso di un solo neutrino; per la diagonalizzazione della matrice di massa affronteremo il caso piú realistico di tre famiglie di neutrini. Il Modello Standard comprende infatti tre diversi *flavor*⁵ di neutrini che partecipano alle interazioni deboli.

Ci troviamo cosí di fronte a un caso analogo a quello dei quark: gli stati coinvolti nell'interazione, non sono autostati di massa. Per collegare gli autostati di massa e del-

⁴Poiché m_D é una massa generata presumibilmente attraverso il meccanismo di Higgs, é ragionevole aspettarsi che il suo ordine di grandezza sia lo stesso della massa del leptone carico associato. Al contrario, il valore di m_R non puó essere stimato all'interno del Modello Standard e per questa ragione si ritiene sia generato da effetti di altissima energia, all'interno di teorie estese che si riducono al Modello Standard nel limite di bassa energia.

⁵Il flavor di un neutrino é definito come il flavor del leptone carico associato in una interazione di corrente carica.

l'interazione introduciamo una matrice di mixing dei neutrini, avente lo stesso ruolo della matrice CKM. Come nel caso dei quark, in cui la matrice CKM porta al fenomeno delle oscillazioni dei mesoni K neutri, la matrice di mixing ha come diretta conseguenza la comparsa delle oscillazioni dei neutrini.

Consideriamo il caso di tre campi sinistrorsi $\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$ che descrivono i neutrini di flavor e tre campi destrorsi corrispondenti, $\nu_{s_1R}, \nu_{s_2R}, \nu_{s_3R}$. Il numero di campi destrorsi non è vincolato dai risultati sperimentali, in quanto i neutrini destrorsi, o sterili, non hanno interazione con la materia e non sono per questo osservabili.

Il termine di massa del lagrangiano è dato allora da:

$$\mathcal{L}_{massa} = \mathcal{L}^D + \mathcal{L}_R^M + \mathcal{L}_L^M, \quad (1.16)$$

con

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{\alpha s} \bar{\nu}_{sR} M_{s\alpha}^D \nu_{\alpha L} + \text{H.c.}, \quad (1.17)$$

$$\mathcal{L}_R^M = - \frac{1}{2} \sum_{ss'} \bar{\nu}_{sR}^c M_{ss'}^R \nu_{s'R} + \text{H.c.}, \quad (1.18)$$

$$\mathcal{L}_L^M = - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{\alpha L}^c M_{\alpha\beta}^L \nu_{\beta L} + \text{H.c.}, \quad (1.19)$$

dove M^D è una matrice complessa (non quadrata, nel caso di un numero di neutrini sterili diverso da 3) e M^R e M^L sono matrici complesse simmetriche.

Raggruppando i campi sinistrorsi:

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nu_R^c = \begin{pmatrix} \nu_{s_1R}^c \\ \nu_{s_2R}^c \\ \nu_{s_3R}^c \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

possiamo riesprimere il termine di massa come:

$$\mathcal{L}_{massa} = \bar{N}_L M N_L = \left(\bar{\nu}_L \quad \bar{\nu}_R^c \right) \begin{pmatrix} M^L & M^{DT} \\ M^D & M^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

dove M è una matrice 6x6.

La diagonalizzazione della matrice di massa avviene attraverso una trasformazione unitaria sul vettore dei campi:

$$N_L = \mathbb{V}n_L, \quad \text{con} \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \vdots \\ \nu_{6L} \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

con \mathbb{V} matrice 6x6 che lega gli autostati di flavor N_L e gli autostati di massa n_L .

Per determinare la matrice \mathbb{V} richiediamo che:

$$\mathbb{V}^T M \mathbb{V} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_6 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Una volta diagonalizzata la matrice di massa, possiamo riscrivere la (1.16)

$$\mathcal{L}_{massa} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 m_k \bar{\nu}_{kL}^c \nu_{kL} + H.c. . \quad (1.24)$$

Vediamo quindi che anche nel caso in cui il lagrangiano contiene un termine di massa del tipo $\mathcal{L}_{massa} = \mathcal{L}^D + \mathcal{L}_R^M + \mathcal{L}_L^M$ i neutrini risultano essere particelle di Majorana.

La relazione di mixing si scrive esplicitamente nella forma

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^6 \mathbb{V}_{\alpha k} \nu_{kL} \quad \alpha = e, \mu, \tau, \quad (1.25)$$

$$\nu_{sR}^c = \sum_{k=1}^6 \mathbb{V}_{sk} \nu_{kL} \quad s = s_1, s_2, s_3. \quad (1.26)$$

Poichè i neutrini attivi e i neutrini sterili sono combinazioni lineari degli stessi campi massivi, questo modello permette le oscillazioni di neutrini sterili in neutrini attivi e viceversa.

Per procedere nella parametrizzazione della matrice di mixing consideremo il caso in cui $M^L = 0$ e gli autovalori di M^D siano trascurabili rispetto a quelli di M^R . Queste due ipotesi sono l'analogo di $m_L = 0$, $|m_D| \ll m_R$ e permettono di estendere il meccanismo

see-saw al caso di tre famiglie di neutrini. Scomponiamo la matrice di mixing secondo la

$$\mathbb{V} = \mathbb{W}\mathbb{U} , \quad (1.27)$$

dove \mathbb{U} e \mathbb{W} sono matrici unitarie, a meno di correzioni di ordine $(M^R)^{-1}M^D$.

Facendo agire \mathbb{W}^6 su M possiamo sviluppare la matrice di massa in potenze di $(M^R)^{-1}M^D$ e ottenere una matrice diagonale a blocchi:

$$\mathbb{W}^T M \mathbb{W} \approx \begin{pmatrix} M_{light} & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix} , \quad (1.29)$$

dove:

$$M_{light} \approx -M^{D\dagger} M^{R-1} M^D \quad , \quad M_{heavy} \approx M^R . \quad (1.30)$$

La (1.30) realizza il meccanismo see-saw nel caso di mixing a tre famiglie. Tanto più sono grandi gli autostati della matrice M^R , tanto meno lo sono gli autostati della matrice di massa M_{light} . Poiché gli elementi fuori diagonale di \mathbb{W} sono di ordine $(M^R)^{-1}M^D$, M_{light} e M_{heavy} risultano disaccoppiate per processi di bassa energia. Possiamo quindi concentrare la nostra attenzione sul blocco 3x3 della matrice \mathbb{U} che diagonalizza M_{light}

$$U^\dagger M_{light} U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} , \quad (1.31)$$

che porta ad un mixing effettivo

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k} \nu_{kL} . \quad (1.32)$$

La matrice unitaria U ha nove parametri indipendenti, che possono essere divisi in tre angoli e sei fasi. Di queste sei fasi, tre vengono eliminate tramite una ridefinizione di fase

⁶La forma esplicita della matrice \mathbb{W} é:

$$\mathbb{W} = 1 - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M^{D\dagger} [M^R M^{R\dagger}]^{-1} M^D & 2M^{D\dagger} M^{R\dagger -1} \\ -2M^{R-1} M^D & M^{R-1} M^D M^{D\dagger} M^{R\dagger -1} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

dei campi dei lepton carichi⁷, che nel lagrangiano di interazione compaiono accoppiati con i campi dei neutrini:

$$\mathcal{L}_{CC}^I = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1}^3 \bar{\alpha}_L \gamma^\mu U_{\alpha k} \nu_{kL} W_\mu^\dagger + H.c. . \quad (1.33)$$

Due delle tre fasi vengono fattorizzate in una matrice diagonale e sono dette fasi di Majorana , poiché presenti solo nel caso in cui il neutrino sia un neutrino di Majorana. Se il neutrino fosse una particella di Dirac, queste due fasi potrebbero essere cancellate ridefinendo i campi dei neutrini massivi, poiché il termine di massa di Dirac, diversamente da quello di Majorana, è invariante per trasformazioni di fase. Questo è anche il motivo per cui l'ultima fase viene detta fase di Dirac.

La parametrizzazione della matrice di mixing riportata dal PDG è

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\phi_{13}} \\ 0 & 1 & 1 \\ -s_{13}e^{i\phi_{13}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda_{31}} \end{pmatrix} \\ = R_{23}W_{13}R_{12}D(\lambda_{21}, \lambda_{31}) , \quad (1.34)$$

dove $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ e abbiamo indicato con θ_{ij} gli angoli di mixing, con ϕ_{13} la fase di Dirac e con λ_{ij} le fasi di Majorana. La (1.34) mostra che la matrice di mixing si compone di una matrice diagonale di fasi ($D(\lambda_{21}, \lambda_{31})$), una rotazione sul piano complesso 1-3 (W_{13}) e due rotazioni reali (R_{12} e R_{23})

1.5 Oscillazioni nel vuoto

Prima di illustrare la teoria delle oscillazioni dei neutrini è utile sottolineare che i neutrini misurati negli esperimenti di oscillazione sono sempre particelle ultrarelativistiche. I processi di misura utilizzati sfruttano interazioni da corrente carica, come $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, oppure interazioni elastiche del tipo $\nu_e + e^- \rightarrow \nu + e^-$; entrambi i processi richiedono una

⁷Tutti gli altri termini che compaiono nel lagrangiano sono invarianti per trasformazioni di fase sui campi leptonici carichi

energia minima dell'ordine della frazione di Mev, per superare la soglia di produzione nel primo caso o per avere un segnale distinguibile dal fondo nel secondo. Il confronto tra le energie in gioco e il limite superiore sulle masse dei neutrini ($\approx 1 - 2\text{eV}$) implica che i neutrini misurati sono sempre particelle relativistiche.

Consideriamo un processo di decadimento del tipo:

$$A \rightarrow B + \alpha^+ + \nu_\alpha , \quad (1.35)$$

in cui un neutrino di flavor α viene prodotto assieme all'antileptone associato.

Lo stato del neutrino prodotto è dato da⁸:

$$|\nu_\alpha\rangle \propto \sum_k |\nu_k\rangle \langle \nu_k, \alpha^+ | j_{CC}^\rho | 0 \rangle J_\rho^{A \rightarrow B} , \quad (1.36)$$

dove j_{CC}^ρ è la corrente carica debole e $J_\rho^{A \rightarrow B}$ è la corrente responsabile della transizione $A \rightarrow B$.

Trascurando gli effetti della massa del neutrino nei processi di produzione e assorbimento, utilizzando la (1.25) e la forma esplicita della corrente debole ricaviamo:

$$\langle \nu_k, \alpha^+ | j_{CC}^\rho | 0 \rangle J_\rho^{A \rightarrow B} \propto U_{\alpha k}^* , \quad (1.37)$$

e con la normalizzazione opportuna

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle . \quad (1.38)$$

Questo stato descrive il neutrino al punto e all'istante di produzione. Per ricavare lo stato dopo che si è propagato per una distanza L nel vuoto in un tempo T dobbiamo applicare alla (1.38) l'operatore di evoluzione temporale, ottenendo

$$|\nu_\alpha(L, T)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k T + i\vec{p}_k \cdot \vec{L}} |\nu_k\rangle , \quad (1.39)$$

⁸Bisogna sottolineare che lo stato $|\nu_\alpha\rangle$ non descrive un quanto del campo ν_α , poichè i neutrini di flavor non hanno massa definita e di conseguenza non sono campi quantizzabili. Come mostra la (1.36) lo stato $|\nu_\alpha\rangle$ è dato dalla sovrapposizione degli stati $|\nu_k\rangle$, che descrivono i quanti del campo ν_k .

dove E_k e p_k sono l'energia e l'impulso del neutrino massivo di tipo k .

Invertendo la relazione (1.25) otteniamo lo sviluppo dello stato $|\nu_\alpha(L, T)\rangle$ nella base degli autostati di flavor:

$$|\nu_\alpha(L, T)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k T + i\vec{p}_k \cdot \vec{L}} U_{\beta k} |\nu_k\rangle. \quad (1.40)$$

La (1.40) mostra che, a causa del processo di mixing, uno stato prodotto con un flavor definito evolve in una sovrapposizione di stati con diverso flavor. In particolare il modulo quadro del coefficiente in (1.40) dà la probabilità che un neutrino prodotto con flavor α interagisca (e quindi venga misurato) con un flavor β :

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, T) = \left| \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k T + i\vec{p}_k \cdot \vec{L}} U_{\beta k} \right|^2. \quad (1.41)$$

Poiché negli esperimenti il tempo di propagazione non viene misurato, bisogna esprimerlo in funzione della distanza percorsa. Data la natura ultrarelativistica del neutrino, possiamo considerare $T = L$, a meno di correzioni trascurabili. Otteniamo così

$$E_k t - \vec{p}_k \cdot \vec{L} \simeq (E_k - p_k)L = \frac{E_k^2 - p_k^2}{E_k + p_k} L = \frac{m_k^2}{E_k + p_k} L \simeq \frac{m_k^2}{2E} L, \quad (1.42)$$

dove E è l'energia del neutrino nel limite di massa nulla.

Sotto questa approssimazione, l'esponenziale che compare nella (1.41) non dipende più dal quadrimpulso del neutrino di flavor k , che in generale dipende dal processo di produzione, ma solo dal rapporto $m_k^2 L/E$.

Sviluppando il modulo quadro che compare in (1.41) otteniamo:

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) &= \left| \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-i\frac{m_k^2}{2E}L} U_{\beta k} \right|^2 = \\ &= \sum_k |U_{\alpha k}^*|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\text{Re} \left\{ \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}} \right\}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

con $\Delta m_{jk}^2 \equiv m_k^2 - m_j^2$.

I parametri che intervengono nelle oscillazioni dei neutrini sono quindi gli elementi della matrice di mixing e la differenza dei quadrati delle masse.

Nel caso piú semplice del mixing a due famiglie⁹ la probabilità (1.43) diviene:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right). \quad (1.44)$$

La (1.44) ha una valenza storica, in quanto tutti i dati sono stati analizzati, in prima approssimazione, nello schema di mixing a due famiglie e fornisce un criterio di classificazione degli esperimenti di oscillazione da neutrino. Data la bassa sezione d'urto dei neutrini, per avere un segnale statisticamente differente dal fondo è necessario che la probabilità di transizione (1.44) non sia troppo piccola, ovvero che

$$\frac{\Delta m^2 L}{4E} \gtrsim 0.1 - 1. \quad (1.45)$$

Gli esperimenti si classificano in base al rapporto L/E , che corrisponde all'intervallo di Δm^2 rispetto al quale sono sensibili, nel modo seguente.

- **Esperimenti Short-baseline (SBL).** In questi esperimenti $L/E \lesssim 1 \text{ eV}^{-2}$. La distanza tra sorgente e rivelatore garantisce un numero di eventi per unità di tempo relativamente alto, permettendo di apprezzare rapporti $\Delta m^2 L/4E \gtrsim 0.1$ corrispondenti alla sensibilità a differenze di massa $\Delta m^2 \gtrsim 0.1 \text{ eV}^2$.
- **Esperimenti Long-baseline (LBL) e esperimenti con neutrini atmosferici.** In questi esperimenti $L/E \lesssim 10^4 \text{ eV}^{-2}$; poichè la statistica è piú bassa, le oscillazioni di flavor risultano misurabili se $\Delta m^2 L/4E \gtrsim 1$, corrispondenti ad una sensibilità valori di $\Delta m^2 \gtrsim 10^{-4} \text{ eV}^2$.
- **Esperimenti Very long-baseline (VLBL) ed esperimenti con neutrini solari.** L'unico esperimento di questo tipo è l'esperimento KamLAND [10], che con

⁹Il mixing a due famiglie è un caso limite del mixing a tre famiglie che si ottiene qualora due angoli di mixing siano trascurabili.

una distanza percorsa $L \approx 180$ km ed un' energia $E \approx 3$ MeV ha un rapporto $L/E \approx 3 \times 10^5 \text{eV}^{-2}$. Poichè la statistica è molto bassa KamLAND è sensibile a $\Delta m^2 \gtrsim 3 \times 10^{-5} \text{eV}^2$. Questo valore di Δm^2 ricade nel range coperto dagli esperimenti con i neutrini solari, che hanno sensibilità comprese nell'intervallo $10^{-8} \text{eV}^2 \lesssim \Delta m^2 \lesssim 10^{-4} \text{eV}^2$ e permette un confronto diretto tra i due tipi di esperimenti.

Al momento i dati sperimentali hanno evidenziato due diversi Δm^2 :

$$\Delta m_{SUN}^2 \sim 10^{-5} \text{eV}^2 , \quad (1.46)$$

$$\Delta m_{ATM}^2 \sim 10^{-3} \text{eV}^2 . \quad (1.47)$$

L'esperimento LSND [11] ha inoltre misurato oscillazioni nel canale $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ compatibili con $\Delta m^2 \sim \text{eV}^2$. Questo terzo Δm^2 non è compatibile con il Modello Standard esteso per includere il mixing a tre famiglie¹⁰. Per verificare la validità dei risultati di LSND è stato realizzato l'esperimento MiniBooNE [12] al Fermilab, capace di esplorare lo stesso range di Δm^2 ma con una sensibilità maggiore.

1.6 L'esperimento MiniBooNE

Lo schema dell'esperimento MiniBooNE [12] è riportato in figura (1.1). Il fascio di neutrini viene prodotto utilizzando protoni di 8 GeV che incidono su un bersaglio di berillio posto all'interno di magneti focalizzatori. I mesoni prodotti dall'interazione (principalmente K^\pm e π^\pm) e selezionati dal campo magnetico attraversano poi una zona di decadimento di 50 m in cui producono neutrini muonici attraverso i processi:

$$K^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad , \quad \pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (1.48)$$

$$K^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad , \quad \pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu . \quad (1.49)$$

¹⁰Per conciliare questo fenomeno con il Modello Standard è necessaria l'introduzione di nuove caratteristiche della teoria, quali ad esempio la supersimmetria o la violazione di CPT.

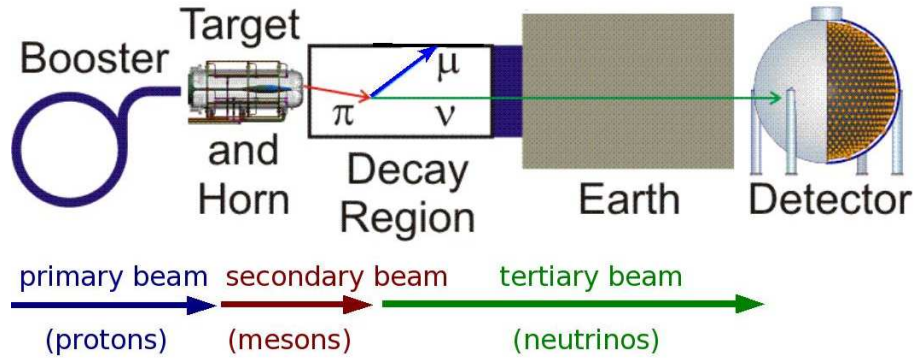


Figura 1.1: Schema dell'esperimento MiniBooNE.

La figura (1.2) mostra lo spettro atteso, con $0 < E_\nu < 3$ GeV ed energia media di 788 MeV. Il fascio presenta una contaminazione del $\sim 6\%$ da parte di $\bar{\nu}_\mu$ e del $\sim 0.5\%$ da parte di ν_e e $\bar{\nu}_e$. Il fascio di neutrini attraversa quindi un assorbitore di 450 m prima di arrivare ad incidere sul rivelatore, posto a $L = 541$ m dal bersaglio di berillio, dimodochè $L[\text{m}]/E[\text{MeV}] \sim 1$, in maniera da osservare la stessa regione di Δm^2 investigata dall'esperimento LSND. Il rivelatore MiniBooNE è costituito da una sfera di 12.2 m di diametro riempita con 800 tonnellate di olio vegetale (CH_2). Una struttura posta a 5.5 m di raggio divide otticamente l'interno della sfera in due regioni. Il volume interno è la zona di interazione ed è circondato da fototubi che coprono il 10% dell'angolo solido mentre il volume esterno costituisce la zona di veto, necessaria ad identificare le particelle entranti ed uscenti nel rivelatore, in modo da ottenere una migliore selezione degli eventi. Le particelle cariche prodotte nell'interazione da neutrino emettono principalmente luce Cherenkov (assieme a una piccola quantità di luce di scintillazione) che viene misurata dai fototubi. Il punto di interazione, il tempo di interazione, e i parametri cinematici dell'interazione vengono ricostruiti in base alla carica raccolta sui fototubi e al loro tempo di arrivo.

Nel capitolo (4) presenteremo la sezione d'urto misurata da MiniBooNE per i processi quasi elastici indotti dalla corrente carica [23]. Le interazioni misurate da MiniBooNE

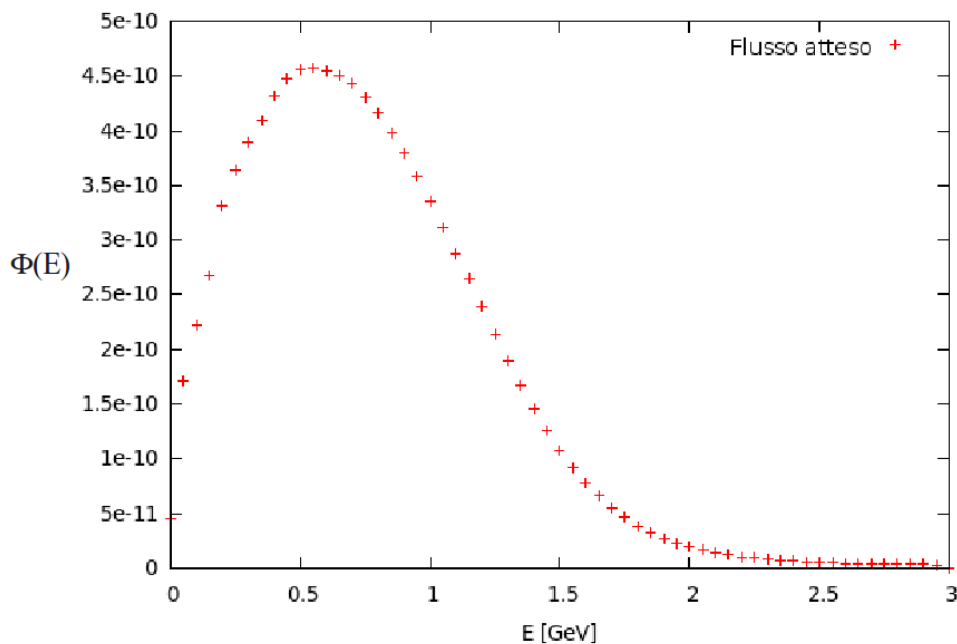


Figura 1.2: Flusso previsto per l'esperimento MiniBooNE.

hanno alla base i processi *elementari*:

$$\nu_{\mu} + n \rightarrow p + \mu^{-} \quad , \quad \bar{\nu}_{\mu} + p \rightarrow n + \mu^{+} \quad (1.50)$$

che interessano principalmente i nucleoni dei nuclei di carbonio dell'olio vegetale. È perciò necessario implementare nell'analisi dei dati una appropriata descrizione della dinamica nucleare. I prossimi capitoli serviranno a introdurre una breve descrizione dell'interazione tra nucleoni e a mostrare un modello per l'interazione neutrino-nucleo (già utilizzato con ottimi risultati per l'interazione elettrone-nucleo) da confrontarsi con i dati ottenuti da MiniBooNE.

Capitolo 2

Descrizione della dinamica nucleare

Oggi sappiamo che il protone ed il neutrone, come tutte le particelle soggette alla forza forte - dette adroni - non sono particelle elementari, ma sono costituiti da particelle di spin $1/2$ chiamate quark.

La difficoltà principale associata alla descrizione delle interazioni tra i nucleoni è dovuta alla complessità della cromodinamica quantistica (*Quantum Chromo-Dynamics*, o QCD), oggi universalmente accettata come la teoria fondamentale delle interazioni forti, i cui gradi di libertà elementari sono i quark e otto bosoni di gauge, chiamati gluoni. Ad alte energie, o corte distanze ($\lesssim 1$ fm), la QCD può essere trattata usando tecniche perturbative, in quanto la *libertà asintotica* della teoria prevede che i quark e i gluoni interagiscano debolmente. La descrizione della diffusione profondamente anelastica leptone-protone è stata uno dei principali successi di questo approccio.

A basse energie, o lunghe distanze ($\gtrsim 1$ fm), al contrario, domina il confinamento, cioè il fatto che i quark non vengono osservati come particelle libere ma solo in combinazioni di carica di colore totale nulla. Di conseguenza, le interazioni forti tra gli adroni sono dovute all'azione di forze analoghe alle forze di Van der Waals che agiscono tra molecole elettricamente neutre.

In questo capitolo elencheremo le principali caratteristiche dell'interazione tra nucleoni che si possono dedurre dalle proprietà osservate dei nuclei, e tratteremo i modelli

fenomenologici utilizzati per riprodurre i dati sperimentali.

2.1 Caratteristiche dell'interazione nucleone-nucleone

Nel nostro modello considereremo i nucleoni come particelle puntiformi non relativistiche che occupano stati legati all'interno del nucleo e interagiscono tramite un potenziale. Per valutare la validità di questa ipotesi possiamo confrontare i dati sulla distribuzione di carica di neutrone e protone (ottenuti dalla diffusione elastica di elettroni), con la distanza media dei nucleoni all'interno del nucleo. La figura (2.1) riporta le distribuzioni di carica misurate di neutrone e protone. Per stimare la distanza media possiamo in prima approssimazione considerare il nucleo come un gas di nucleoni e parametrizzare il raggio dei nuclei stabili come $R = r_0 A^{1/3}$, dove A è il numero di massa ottenendo dai risultati delle misure un valore $r_0 = 1.14$ fm. Modelli più realistici, che considerano anche le correlazioni tra nucleoni, portano a valori di $d \lesssim 2$ fm. La figura (2.2) riporta la densità di carica di due nucleoni per tre diversi valori della distanza relativa. Come si può vedere, per $d \gtrsim 1.5$ fm i profili di carica dei due nucleoni hanno una regione di sovrapposizione molto piccola, il che rende ragionevole approssimare i nucleoni come particelle puntiformi.

Una caratteristica peculiare dei nuclei è il fatto che la densità al loro interno è praticamente costante e indipendente dal numero di massa. Questo vuol dire che i nucleoni non possono addensarsi indefinitamente. Quindi, per distanze sufficientemente piccole, l'interazione nucleone-nucleone deve essere repulsiva, e il corrispondente potenziale deve avere la proprietà

$$v(\mathbf{r}) > 0 \quad , \quad |\mathbf{r}| < r_c \quad , \quad (2.1)$$

dove r_c è il raggio caratteristico della parte repulsiva della forza. In figura (2.3) possiamo vedere la densità opportunamente normalizzata in funzione del raggio nucleare. Man

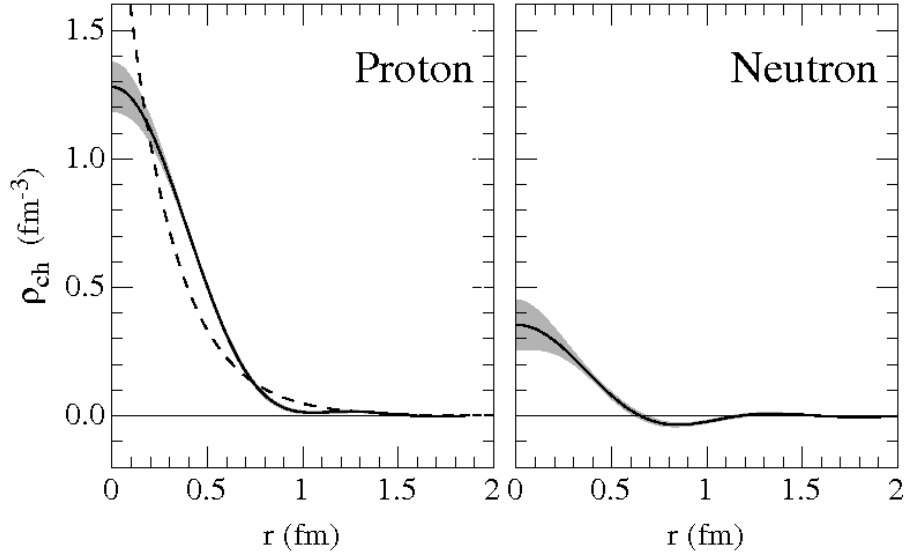


Figura 2.1: Distribuzione di carica di protone e neutrone. Le linee continue e le zone ombreggiate rappresentano i dati e l'incertezza sperimentale. Le linee tratteggiate sono ottenute da un modello in cui le densità vengono approssimate da una funzione esponenziale.

mano che la posizione all'interno del nucleo diminuisce e diventano trascurabili gli effetti di superficie, la densità tende al valore costante di $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$.

Un'altra caratteristica dell'interazione può essere ricavata osservando che l'energia di legame per nucleone è approssimativamente la stessa per i nuclei con numero di massa $A \geq 20$ e risulta

$$\frac{B}{A} \sim 8.5 \text{ MeV} . \quad (2.2)$$

Questo suggerisce che l'interazione abbia un range finito e si annulli per distanze maggiori di un determinato valore

$$v(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad |\mathbf{r}| > r_{max} . \quad (2.3)$$

Inoltre gli spettri energetici dei nuclei speculari¹ mostrano che i livelli con la stessa parità e momento angolare sono uguali a meno di piccole correzioni elettromagnetiche: le

¹I nuclei speculari hanno lo stesso A e carica differente di una unità, come $^{15}_7\text{N}$ e $^{15}_8\text{O}$.

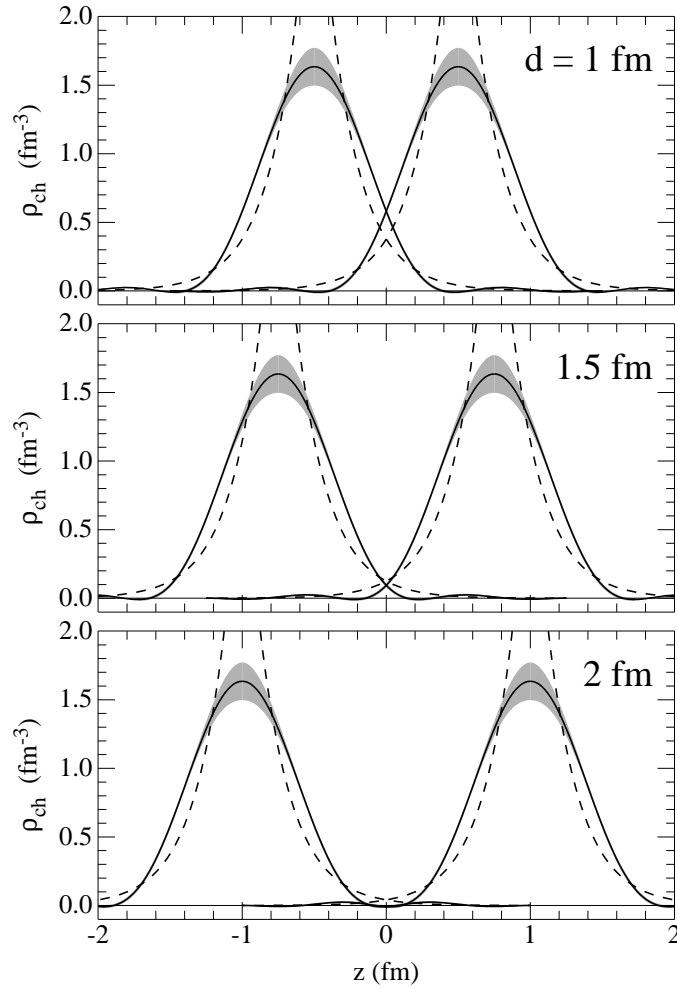


Figura 2.2: Profili di densità di carica di due nucleoni, posti a tre diversi valori della distanza relativa d .

forze nucleari non distinguono tra neutrone e protone, ovvero hanno simmetria di carica.

La simmetria di carica è la conseguenza di una proprietà più generale della teoria, l'invarianza per trasformazioni di spin isotopico, o isospin. Il concetto di isospin fu introdotto per la prima volta da Heisenberg [14] come formalismo con cui descrivere l'interazione tra nucleoni per poi essere riconosciuto come una simmetria effettiva dell'interazione.

A patto di trascurare le differenze di massa, protone e neutrone possono essere considerati due diversi stati della stessa particella, il nucleone. Il numero quantico che distingue

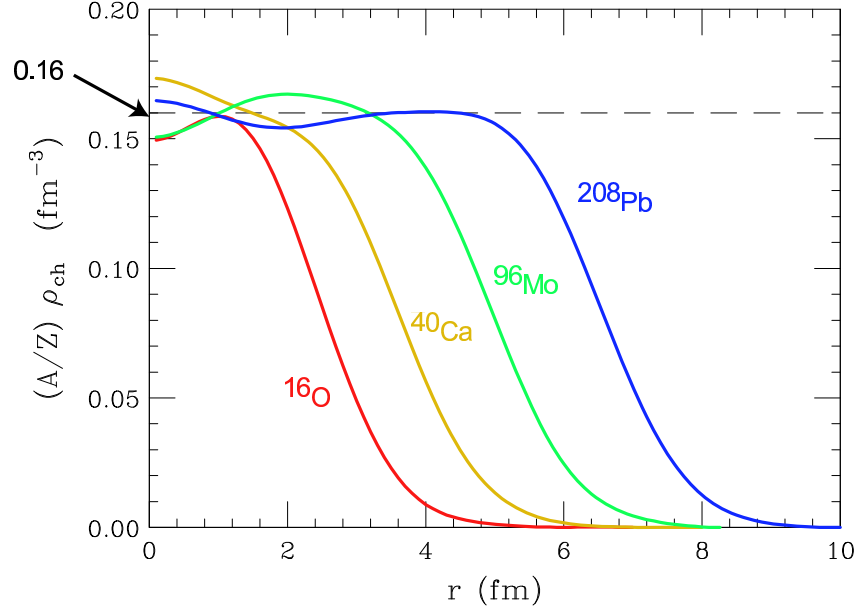


Figura 2.3: Densità di carica nucleare, opportunamente normalizzata, in funzione della distanza dal centro del nucleo per diversi numeri di massa A .

uno stato di protone da uno di neutrone è la terza componente di un momento angolare quantomeccanico, l'isospin, che assume il valore di $1/2$ per il protone e $-1/2$ per il neutrone. La teoria di Yukawa e l'interpretazione dei pioni come un tripletto di isospin ha consacrato il formalismo introdotto da Heisenberg a simmetria caratterizzante della teoria delle interazioni nucleari, che dipendono dall'autovalore dell'isospin totale della coppia di nucleoni interagenti, T , ma non dalla sua terza componente T_3 .

La densità di lagrangiana che descrive protoni e neutroni non interagenti si può porre nella forma compatta

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_N (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_N \quad \text{con} \quad \psi_N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

dove p e n sono i quadrispinori associati a protone e neutrone. La simmetria di isospin corrisponde all'invarianza della densità di lagrangiana sotto il gruppo $SU(2)$ delle trasformazioni di fase globali

$$U = e^{i\alpha_j \tau^j}, \quad (2.5)$$

dove $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ è un vettore costante e le τ_j ($j=1,2,3$) sono le matrici di Pauli. Concordemente alle regole di composizione del momento angolare, le coppie protone-protone o neutrone-neutrone hanno $T = 1$, mentre le coppie protone-neutrone possono presentarsi in stato di tripletto ($T = 1$) o singoletto ($T=0$).

In natura esiste un solo stato legato di due nucleoni, il nucleo di deuterio ${}^2\text{H}$ o deutone, costituito da un neutrone e un protone. Il deutone è uno stato caratterizzato da spin totale $S = 1$ e isospin totale $T = 0$. L'unicità del nucleo di deuterio dimostra che le forze nucleari dipendono da spin e isospin. Inoltre, studiando la distribuzione di carica elettrica del deuterio si misura un momento di quadrupolo non nullo, che implica che la distribuzione di carica non gode di simmetria sferica. Questo permette di concludere che l'interazione nucleone-nucleone (NN) non è centrale, ovvero dipende sia dal modulo della distanza tra le particelle che dalla sua direzione.

Oltre a queste caratteristiche qualitative dell'interazione, il grande numero di sfasamenti misurati negli esperimenti di diffusione NN permette di ricavare informazioni aggiuntive sulla natura delle forze che agiscono tra i nucleoni.

2.2 Teoria di Yukawa

La prima descrizione dell'interazione NN con il formalismo della moderna teoria dei campi risale al 1935 ed è dovuta a Yukawa [13]. Egli ipotizzò che l'interazione tra nucleoni potesse essere descritta tramite un campo, in modo analogo all'interazione tra particelle cariche descritta dal campo elettromagnetico. Alle interazioni forti sarebbe quindi associata una particella, un nuovo quanto, esattamente come il fotone è il quanto del campo elettromagnetico. Lo scambio di questa particella, chiamata sarebbe responsabile delle interazioni tra neutroni e protoni. Yukawa riuscì inoltre a dimostrare che il range

dell'interazione è legato alla massa di questa nuova particella dalla relazione

$$r \sim \frac{1}{m}, \quad (2.6)$$

che dato il range tipico delle interazioni nucleari $r \sim 1$ fm implica $m \sim 200$ Mev.

La teoria di Yukawa guadagnò credibilità quando, nel 1947, fu scoperto il mesone π o pione, la cui massa è $m_\pi \sim 140$ Mev. Gli esperimenti hanno mostrato che il pione è una particella pseudoscalare² di spin zero³ che si presenta in tre stati di carica, π^+ , π^0 e π^- di massa degenerate, a meno di piccole correzioni. Possiamo quindi considerarlo come un tripletto di isospin $T = 1$, con i tre stati di carica identificati dalla terza componente $T_3 = 1, 0$ e -1 .

La forma della lagrangiana di interazione pione-nucleone è

$$\mathcal{L}_I = -ig\bar{\psi}_N\gamma_5(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})\psi_N, \quad (2.9)$$

dove g è la costante di accoppiamento ed il vettore di campi $\boldsymbol{\pi}$ è definito tramite:

$$\pi_1 = \frac{\pi^+ + \pi^-}{\sqrt{2}}, \quad \pi_2 = \frac{i(\pi^+ - \pi^-)}{\sqrt{2}}, \quad \pi_3 = \pi_0. \quad (2.10)$$

Utilizzando la lagrangiana di interazione (2.9) possiamo scrivere l'ampiezza invariante per il processo illustrato in figura (2.2), che descrive l'interazione tra due nucleoni mediata dallo scambio di un pione.

²Ovvero il cui campo cambia segno sotto trasformazioni di parità. La parità intrinseca del pione è stata ricavata osservando la cattura del π^- da parte della shell K del deuterio, che porta alla produzione di due neutroni:

$$\pi^- + d \rightarrow n + n \quad (2.7)$$

³Lo spin del pione è stato dedotto dalla reazione

$$\pi^+ + {}^2H \leftrightarrow p + p \quad (2.8)$$

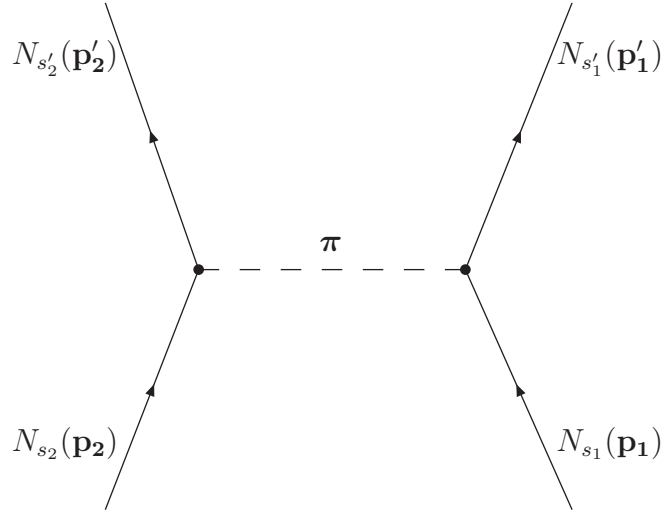


Figura 2.2: Diagramma di Feynman che descrive l'interazione tra due nucleoni mediata dallo scambio di un pione.

$$\langle f|M|i\rangle = -ig^2 \frac{\bar{u}_{s'_2}(p'_2)\gamma^5 u_{s_2}(p_2)\bar{u}_{s'_1}(p'_1)\gamma^5 u_{s_1}(p_1)}{k^2 - m_\pi^2} \langle \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \rangle, \quad (2.11)$$

dove $k = p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2$, $u_{\tilde{s}}(\tilde{p})$ è lo spinore di Dirac che descrive un nucleone di quadrimomento \tilde{p} e proiezione dello spin \tilde{s} e abbiamo indicato

$$\langle \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \rangle = \eta_2^\dagger \boldsymbol{\tau} \eta_2 \eta_1^\dagger \boldsymbol{\tau} \eta_1, \quad (2.12)$$

con η_i spinori di Pauli a due componenti che descrivono lo stato di isospin della particella i -esima.

Data l'elevata massa dei nucleoni, il rapporto tra impulso e massa dei nucleoni all'interno del nucleo è piccolo (tipicamente $\lesssim 3\%$), il ch  permette di trascurare gli effetti relativistici e descrivere l'interazione pione-nucleone attraverso un potenziale, che si ottiene

dalla (2.11) effettuandone il limite non relativistico. Il potenziale risultante è:

$$\begin{aligned}
v_\pi &= \frac{g^2}{4m^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \\
&= \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{m_\pi^3}{4m^2} \frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \\
&\times \left\{ \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + S_{12} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \right] \frac{e^{-x}}{x} - \frac{4\pi}{m_\pi^3} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \right\}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

con $x = m_\pi |\mathbf{r}|$ e

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \tag{2.14}$$

La (2.13) riproduce tutte le caratteristiche dell'interazione nucleare che abbiamo enunciato: ha una dipendenza esplicita dallo spin, dall'isospin e non è una forza centrale, come si può vedere dalla presenza dell'operatore S_{12} analogo all'operatore che descrive l'interazione tra due dipoli magnetici. La natura repulsiva dell'interazione per distanze piccole è introdotta attraverso il termine proporzionale alla $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$.

Per distanze $|\mathbf{r}| > 1.5$ fm (lungo range) e con $g^2/(4\pi) \sim 14$ il potenziale di Yukawa fornisce una buona approssimazione dell'interazione NN, che permette di descrivere i dati di scattering NN con alto momento angolare. In questi processi infatti la probabilità di trovare i due nucleoni a piccola distanza è trascurabile, data la grande barriera centrifuga. A corto e medio range bisogna prendere in considerazione processi più complicati, come lo scambio di due pioni (eventualmente interagenti) o lo scambio di mesoni più pesanti, come i mesoni ρ ($m_\rho = 770$ MeV) e ω ($m_\omega = 782$ MeV). Per distanze ancora più piccole ($|\mathbf{r}| \lesssim 0.5$ fm) ci si aspetta che i nucleoni perdano la loro identità ed inizino a sovrapporsi, come si può evincere anche dalla figura (2.2). In queste condizioni, l'interazione dovrebbe essere descritta in termini dei costituenti dei nucleoni, nell'ambito della teoria fondamentale delle interazioni forti.

2.3 Potenziali fenomenologici

Per descrivere l'interazione NN a corto, medio e lungo raggio vengono utilizzati potenziali fenomenologici, la cui espressione generale è

$$v = \tilde{v}_\pi + v_R , \quad (2.15)$$

dove abbiamo indicato con \tilde{v}_π il potenziale di Yukawa (2.13) privato del termine di contatto e con v_R il potenziale residuo.

Volendo rendere più esplicita la dipendenza da spin e isospin, si può riscrivere la (2.15) nella forma

$$v(ij) = \sum_{ST} [v_{TS}(r_{ij}) + \delta_{S1} v_{Tt}(r_{ij}) S_{12}] P_{2S+1} \Pi_{2T+1} , \quad (2.16)$$

dove S e T sono lo spin e l'isospin totale della coppia di nucleoni interagenti, $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ e

$$P_1 = \frac{1}{4}[1 - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)] \quad P_3 = \frac{1}{4}[3 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)] , \quad (2.17)$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}[1 - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)] \quad , \quad \Pi_3 = \frac{1}{4}[3 + (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)] , \quad (2.18)$$

sono gli operatori di proiezione sugli stati a spin e isospin definito.

Le funzioni $v_{TS}(r_{ij})$ e $v_{Tt}(r_{ij})$ descrivono la dipendenza radiale dell'interazione nei vari canali di spin-isospin e si riducono per grandi valori della distanza relativa alle corrispondenti componenti del potenziale di scambio di un pione.

Una rappresentazione alternativa molto usata in letteratura si basa sulla scomposizione del potenziale

$$v(ij) = \sum_{n=1}^6 v^{(n)}(r_{ij}) O_{ij}^{(n)} , \quad (2.19)$$

ottenuta utilizzando gli operatori

$$O_{ij}^{n \leq 6} = [1, (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j), S_{ij}] \otimes [1, (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)] . \quad (2.20)$$

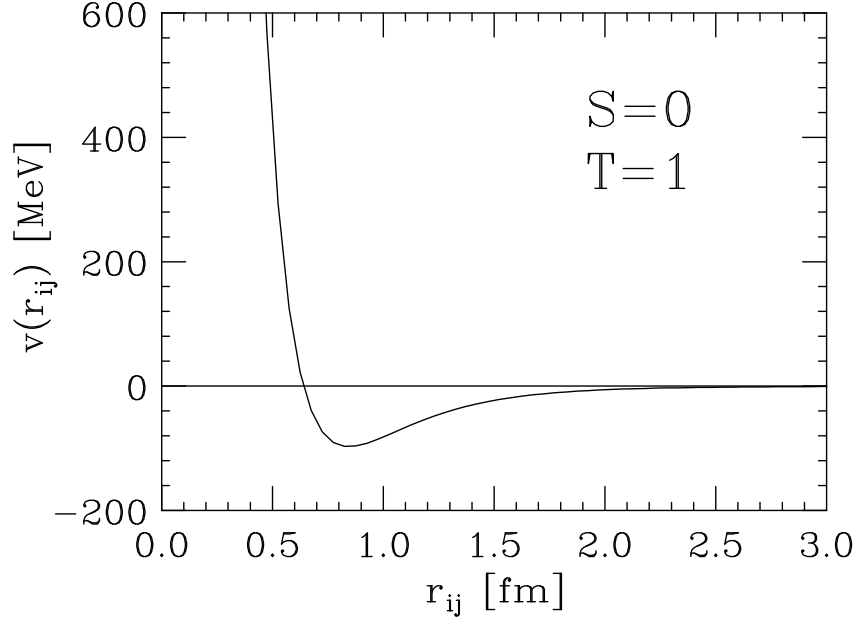


Figura 2.4: Dipendenza radiale del potenziale di interazione tra due nucleoni nello stato di momento angolare relativo $L = 0$, spin ed isospin totali $S = 0$ e $T = 1$. Il core repulsivo dell'interazione è seguito da una regione attrattiva, in cui i nucleoni interagiscono principalmente tramite lo scambio di coppie di pioni. Per grandi distanze, l'interazione è dominata dallo scambio di un pione e si annulla nel limite di distanza infinita.

I potenziali del tipo (2.19), che fanno uso di operatori del tipo (2.20), sono detti potenziali v_6 e permettono di descrivere in maniera abbastanza accurata le proprietà del deutone, come energia di legame, raggio di carica e momento di quadrupolo. Per descrivere lo scattering NN in stati di onda S e P (ovvero momento angolare relativo 0 e 1, rispettivamente) è necessario aggiungere i due operatori addizionali

$$O_{ij}^{n=7,8} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \otimes [1, (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)] \quad (2.21)$$

dove \mathbf{L} è il momento angolare totale. I potenziali che danno i migliori fit disponibili dei dati di diffusione NN sono ottenuti includendo altri dieci operatori, per un totale di diciotto, che permettono di tener conto dei piccoli effetti dovuti alle differenze di massa e di costante di accoppiamento tra i pioni carichi e quello neutro.

L'andamento del potenziale NN ottenuto con la (2.19) in uno stato di onda S ($L = 0$) e di spin e isospin 0 e 1 rispettivamente, è riportato in figura (2.4). Per distanze relative $\lesssim 0.5$ fm il potenziale riproduce correttamente il core repulsivo dell'interazione, dovuto allo scambio di mesoni pesanti o a meccanismi più complicati, quali l'interazione tra i costituenti del nucleo. Si può osservare poi la regione intermedia, in cui il potenziale è attrattivo e il processo dominante è lo scambio di due pioni. A lungo raggio $v(ij)$ si riduce al potenziale che si ottiene dalla teoria di Yukawa.

2.4 La teoria a molti corpi non relativistica

La teoria nucleare a molti corpi non relativistica (nuclear many-body theory, o NMBT) si prefigge di descrivere la dinamica del nucleo considerando i nucleoni come particelle puntiformi, descritte dall'hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{j>i=1}^A v_{ij} + \sum_{k>j>i=1}^A V_{ijk}, \quad (2.22)$$

che accanto al termine cinetico comprende un potenziale a due corpi e un potenziale a tre corpi, la cui aggiunta è necessaria per riprodurre l'energia di legame degli stati a tre nucleoni.

Data la natura fortemente repulsiva del potenziale per piccole distanze, l'approccio perturbativo non è praticabile: gli elementi di matrice di v_{ij} tra stati del sistema non interagente risultano infatti essere molto grandi. Per ovviare a questo problema è stato sviluppato un approccio alternativo, noto come teoria delle perturbazioni in base correlata o "correlated basis function perturbation theory" (CBF)[15].

La teoria CBF incorpora gli effetti non perturbativi derivanti dal core repulsivo del potenziale nelle funzioni d'onda di base, definite come

$$|n\rangle = \frac{F|n_{FG}\rangle}{\langle n_{FG}|F^\dagger F|n_{FG}\rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.23)$$

dove $|n_{FG}\rangle$ sono gli autostati del sistema non interagente e l'operatore F , che introduce l'effetto delle interazioni, assume la forma:

$$F = \mathcal{S} \prod_{j>i=1}^A f_{ij} , \quad (2.24)$$

dove le f_{ij} ricalcano la struttura del potenziale NN:

$$f_{ij} = \sum_n f^{(n)}(r_{ij}) O_{ij}^n , \quad (2.25)$$

e \mathcal{S} è l'operatore che simmetrizza il prodotto alla sua destra.

Gli stati (2.23) formano un insieme completo ma non ortogonale. Per renderli ortogonali si utilizzano tecniche standard della teoria quantistica dei sistemi a molti corpi [16].

Le funzioni radiali $f^{(n)}(r_{ij})$ si ricavano minimizzando il valore medio dell'hamiltoniana nello stato fondamentale della base correlata, che soddisfa la disuguaglianza

$$\langle H \rangle = \langle 0|H|0 \rangle \geq E_0 , \quad (2.26)$$

con la condizione $f^{(n \neq 1)} \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$ e $f^{(1)} \rightarrow 1$ per $r \rightarrow \infty$.

Una volta definita la base correlata, l'hamiltoniano nucleare può essere diviso in due parti

$$H = H_0 + H_I \quad (2.27)$$

dove H_0 e H_I sono la parte diagonale e non diagonale nella base correlata:

$$\langle m|H_0|n \rangle = \delta_{nm} \langle m|H|n \rangle \quad (2.28)$$

$$\langle m|H_I|n \rangle = (1 - \delta_{nm}) \langle m|H|n \rangle \quad (2.29)$$

Scegliendo opportunamente la forma delle funzioni di correlazioni, ovvero se $\langle H \rangle$ è vicino ad E_0 , gli stati correlati definiti in (2.23) hanno una grande sovrapposizione con gli autostati dell'hamiltoniano. Di conseguenza gli elementi di matrice di H_I sono quantità piccole. Questo garantisce che l'espansione di qualsiasi osservabile in serie di potenze di H_I converge rapidamente.

Capitolo 3

Interazioni dei neutrini

3.1 Interazione neutrino-nucleone

In questo capitolo descriveremo innanzitutto il calcolo della sezione d'urto quasi elastica neutrino-nucleone in approssimazione di Born. Successivamente introdurremo l'approssimazione impulsiva e il formalismo della funzione spettrale, utilizzati per ricavare la sezione d'urto neutrino-nucleo a partire da quella neutrino-nucleone. Infine, discuteremo la funzione spettrale utilizzata per calcolare la sezione d'urto quasi elastica nel caso del nucleo di carbonio.

A partire dalla seconda metà del secolo scorso, le proprietà dei nuclei sono state studiate utilizzando fasci di elettroni di energia variabile in un range molto ampio. Lo spettro degli elettroni diffusi ha permesso di ricavare importanti caratteristiche del processo, illustrate schematicamente in figura (3.1) [18]. Per bassa energia trasferita, ω , la sezione d'urto presenta dei picchi corrispondenti alle energie dei livelli nucleari eccitati. Al crescere dell'energia si presenta un largo picco dovuto allo scattering quasi elastico, corrispondente al processo in cui l'elettrone interagisce con un singolo nucleone di impulso non nullo, dell'ordine del momento di Fermi. La larghezza di questo picco è quindi legata al moto di Fermi dei nucleoni, mentre l'energia a cui si presenta il picco risente dell'energia di legame media del nucleone. Per energie ancora maggiori compaiono i picchi dovuti alla

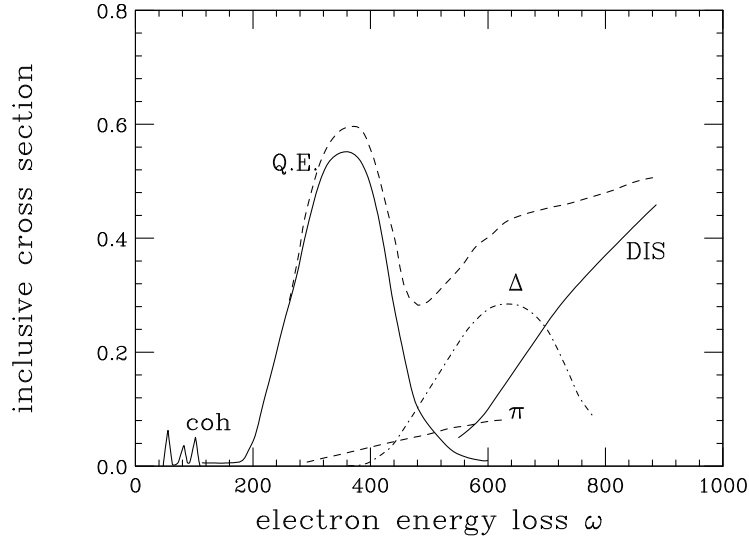


Figura 3.1: Rappresentazione schematica della sezione d'urto inclusiva in funzione dell'energia trasferita ω .

produzione di pioni e all'eccitazione del nucleone in stati risonanti, il primo dei quali è la Δ . Ad energie trasferite molto alte lo spettro presenta poi un continuo, dovuto allo scattering profondamente anelastico sui costituenti dei nucleoni.

Le caratteristiche appena elencate si ripresentano anche nel caso di interazioni di neutrino. Considerando l'energia media del flusso di neutrini dell'esperimento MiniBooNE ($\langle E_\nu \rangle \sim 780\text{MeV}$) il contributo dominante alla sezione d'urto per questa regione di energia è lo scattering quasi elastico indotto dalla corrente debole carica (Charged Current Quasi Elastic Scattering, CCQE Scattering). Nel calcolo della sezione d'urto in approssimazione impulsiva, includeremo il solo contributo quasi elastico, trascurando la produzione di risonanze, che è comunque descrivibile all'interno dello stesso formalismo.

3.2 La sezione d'urto quasi elastica

Consideriamo il processo:

$$\nu_\ell + n \rightarrow \ell^- + p. \quad (3.1)$$

in cui un neutrino di flavor ℓ interagisce con un neutrone per produrre un protone e un leptone carico del flavor appropriato.

L'ampiezza invariante per il processo si scrive¹:

$$\mathcal{M} = \frac{G_F V_{ud}}{\sqrt{2}(1 + \frac{Q^2}{M_W^2})} \bar{u}_\ell(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_\ell}(k) \times \bar{u}_p(p') \left[F_V(q^2) \gamma^\mu + i F_M(q^2) \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2M} + F_A(q^2) \gamma^\mu \gamma_5 + F_P(q^2) \frac{2M}{m_\pi^2} q^\mu \gamma_5 \right] u_n(p) , \quad (3.2)$$

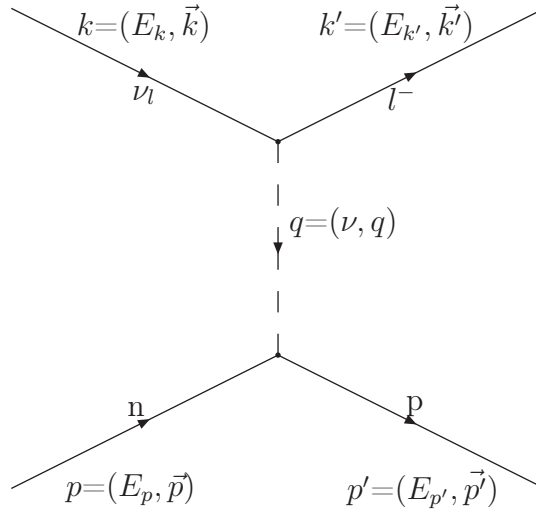


Figura 3.2: Diagramma di Feynman che descrive l'interazione neutrino neutrone.

dove M è la massa del nucleone, m_π è la massa del pione, M_W è la massa del bosone mediatore W e con u e \bar{u} sono indicati gli spinori di Dirac delle rispettive particelle. Le costanti G_F e V_{ud} sono la costante di Fermi e l'elemento di matrice CKM che accoppia i quark u ed s .

La sezione d'urto non polarizzata è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza invariante, mediata sullo spin delle particelle iniziali e sommata sullo spin delle particelle finali:

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{S_i, S_f} |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2 V_{ud}^2}{2(1 + \frac{Q^2}{M_W^2})^2} \frac{1}{mm_\nu} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} , \quad (3.3)$$

¹Si veda anche l'appendice A

dove m è la massa del leptone carico, m_ν è la massa del neutrino e abbiamo introdotto il tensore leptonic $L^{\mu\nu}$ e il tensore adronico $W^{\mu\nu}$.

Il tensore leptonic è completamente determinato dalle variabili cinematiche dei leptoni ed è:

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Tr}[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\not{k}\gamma^\nu(1 - \gamma^5)] \\ &= k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} k \cdot k' + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho k'_\sigma + \dots, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove \dots indica termini soppressi per la presenza di un fattore m_ν .

Il tensore adronico è invece dipendente anche dal quadrimpulso trasferito tramite le funzioni di struttura, di cui nel seguito (per brevità) non indicheremo la dipendenza da q^2 .

Per eseguire il calcolo utilizziamo l'identità di Gordon per eliminare il termine $\propto \sigma^{\mu\nu}$ e trascuriamo il termine pseudoscalare che compare nella (3.2), ottenendo:

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}' + m}{2M} \left[\gamma^\mu(1 - r\gamma^5) - \frac{R}{2M} \tilde{p}^\mu \right] \right. \\ &\quad \left. \frac{\not{p} + m}{2M} \left[\gamma^\nu(1 - r\gamma^5) - \frac{R}{2M} \tilde{p}^\nu \right] \right\} (F_V + F_M)^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove abbiamo utilizzato

$$\begin{aligned} \tilde{p}^\mu &= p^\mu + p'^\mu \\ r &= -\frac{F_A}{F_V + F_M} \\ R &= \frac{F_M}{F_V + F_M}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sviluppando la traccia in (3.5) e utilizzando la conservazione del quadrimpulso possiamo esprimere il tensore adronico nella forma:

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= \left\{ -2g^{\mu\nu} \left[r^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - \frac{q^2}{4M^2} \right] \right. \\ &\quad + 2\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} \left[1 + r^2 + R^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - 2R \right] \\ &\quad + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p_\rho p_\sigma}{2M^2} (4r) \\ &\quad + \frac{q^\mu q^\nu}{M^2} \left[\frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - R \right] \\ &\quad \left. + \frac{p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu}{M^2} \left[1 + r^2 + R^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - 2R \right] \right\} (F_V + F_M)^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Introducendo cinque funzioni di struttura possiamo riscrivere la (3.7) nella forma

$$\begin{aligned}
 W^{\mu\nu} &= \sum_{i=1}^5 \Gamma_i^{\mu\nu} W_i(q^2) \\
 &= -g^{\mu\nu} W_1(q^2) + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2} W_2(q^2) - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p_\rho q_\sigma}{2M^2} W_3(q^2) + \frac{q^\mu q^\nu}{m^2} W_4(q^2) + \frac{p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu}{M^2} W_5(q^2),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

e utilizzando le (3.6) e le (A.6) possiamo identificare:

$$W_1 = 2[F_A^2(1 + \tau) + \tau(F_V + F_M)^2] \tag{3.9}$$

$$W_2 = 2[F_A^2 + F_V^2 + \tau F_M^2] \tag{3.10}$$

$$W_3 = 4F_A(F_V + F_M) \tag{3.11}$$

$$W_4 = \frac{1}{2}[F_M^2(1 + \tau) - 2F_M(F_V + F_M)] \tag{3.12}$$

$$W_5 = \frac{W_2}{2}. \tag{3.13}$$

La contrazione del tensore adronico con quello leptonicò dà il risultato

$$\begin{aligned}
 L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} &= W_1(2k \cdot k') + W_2 \left(2 \frac{(p \cdot k')(p \cdot k)}{M^2} - k \cdot k' \right) - W_3 \left(\frac{2}{M^2} \right) ((k' \cdot q)(k \cdot p) - (k' \cdot p)(k \cdot q)) \\
 &+ W_4 \left(2 \frac{(k' \cdot q)(k \cdot p)}{M^2} - \frac{(k' \cdot k)q^2}{M^2} \right) + W_5 \cdot 2 \left(\frac{(p \cdot k')(k \cdot q)}{M^2} - \frac{(k' \cdot k)(p \cdot q)}{M^2} + \frac{(k \cdot p)(k' \cdot q)}{M^2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Effettuando il calcolo nel sistema di riferimento del laboratorio, in cui il nucleone bersaglio è fermo, e trascurando la massa del neutrino abbiamo

$$\begin{aligned}
 p^\mu &= (M, 0), \\
 k^\mu &= (E, E\mathbf{k}), \\
 k'^\mu &= (E', \mathbf{k}'),
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

e otteniamo per la (3.14):

$$\begin{aligned}
 L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} &= 2EE' \left\{ W_1(1 - v' \cos \theta) + W_2 \frac{1 + v' \cos \theta}{2} \right. \\
 &+ W_3 \left[\frac{m^2}{2ME'} - \frac{E + E'}{M} \frac{1 + v' \cos \theta}{2} \right] \\
 &\left. + W_4 \frac{m^2}{M^2} \frac{1 - v' \cos \theta}{2} - W_5 \frac{m^2}{ME'} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

La sezione d'urto è legata all'ampiezza invariante dalla

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p + k - k' - p') |\bar{\mathcal{M}}|^2 \frac{m}{E'} \frac{m_\nu}{E} \frac{M}{E_n} \frac{M}{E_p} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3}. \quad (3.17)$$

La funzione δ tridimensionale permette di integrare la sezione d'urto sulle variabili cinematiche del nucleone nello stato finale. Nel sistema di riferimento del laboratorio, trascurando la massa del leptone carico prodotto ($|\mathbf{k}'| = E'$), otteniamo

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta\left(M + E - E' - \sqrt{M^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}\right) |\bar{\mathcal{M}}|^2 M \frac{m m_\nu}{E E_p} k' dE' d\Omega. \quad (3.18)$$

La funzione δ residua lega in maniera univoca l'energia del leptone emesso e l'angolo di emissione, poichè

$$\delta\left(M + E - E' - \sqrt{M^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}\right) = \delta\left(M + E - E' - \sqrt{M^2 + E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta}\right), \quad (3.19)$$

e imponendo che l'argomento della δ si annulli si ottiene:

$$M + E - E' = \sqrt{M^2 + E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta} \implies E'(\theta) = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (3.20)$$

Utilizzando la proprietà

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \right)^{-1} \delta(x - x_0) \quad , \quad f(x_0) = 0, \quad (3.21)$$

da cui segue

$$\delta\left(M + E - E' - \sqrt{M^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}\right) = \delta\left(E' - \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right) \frac{E'(\theta) E_p}{EM}, \quad (3.22)$$

arriviamo così all'espressione della sezione d'urto differenziale nell'elemento di angolo solido:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2 V_{ud}^2}{(2\pi)^2 [1 + \frac{Q^2}{M_W^2}]} \frac{E'^3}{E} \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - W_3 \frac{E + E'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_4 \frac{m^2}{M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} - W_5 \frac{m^2}{ME'} \right]. \quad (3.23)$$

La sezione d'urto per il processo quasi elastico da antineutrino:

$$\bar{\nu}_\ell + p \rightarrow \ell^+ + n, \quad (3.24)$$

può essere ricavata dalla (3.23) sulla base delle seguenti considerazioni; sostituire ν con $\bar{\nu}$ equivale allo scambio $k \leftrightarrow k'$ nel tensore leptónico, con conseguente cambio di segno del coefficiente di $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Poiché $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è antisimmetrico in μ e ν quando calcoliamo $L^{\mu\nu}W_{\mu\nu}$ esso darà un contributo non nullo solo quando contratto con la parte antisimmetrica di $W_{\mu\nu}$, che secondo la (3.8) è proporzionale a W_3 . Lo scambio $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$ si traduce quindi in un cambio del segno del coefficiente di W_3 . Come indica la (3.11), la funzione di struttura W_3 contiene infatti termini di interferenza fra componente assiale e vettoriale della corrente adronica, dispari sotto l'operazione di coniugazione di carica.

La sezione d'urto quasi elastica per i processi da neutrino (antineutrino) è quindi:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\bar{\nu}}^\nu = \frac{G_F^2 V_{ud}^2}{(2\pi)^2 [1 + \frac{Q^2}{M_W^2}]} \frac{E'^3}{E} \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \mp W_3 \frac{E + E'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_4 \frac{m^2}{M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} - W_5 \frac{m^2}{ME'} \right]. \quad (3.25)$$

3.3 L'interazione con il nucleo

La sezione d'urto per il processo:

$$\nu_\ell + A \rightarrow \ell^- + \mathcal{X}, \quad (3.26)$$

in cui un neutrino di quadrimomento $k = (E, \mathbf{k})$ interagisce con un nucleo per dare un leptone carico e uno stato finale \mathcal{X} non osservato (sezione d'urto inclusiva), si scrive in approssimazione di Born:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_l} = \frac{G_F^2 V_{ud}^2 |\mathbf{k}'|}{16\pi^2 |\mathbf{k}|} L_{\mu\nu} W_A^{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

dove G_F è la costante di Fermi, V_{ud} è l'elemento di matrice CKM che accoppia i quark u e d .

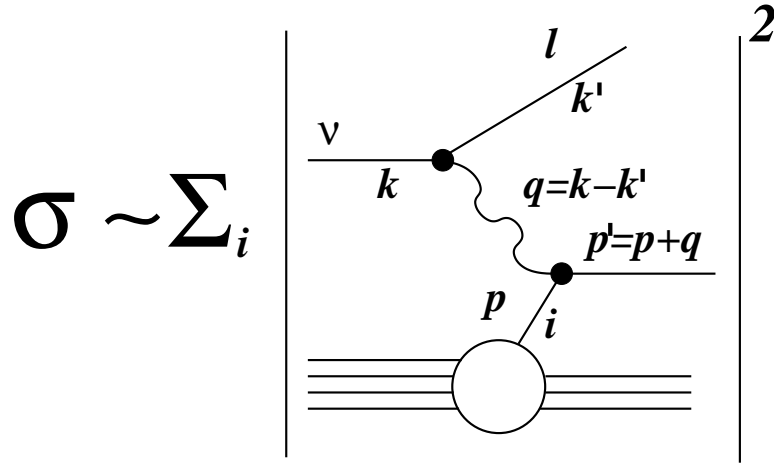


Figura 3.2: Rappresentazione diagrammatica del processo (3.26) in approssimazione impulsiva.

Il tensore leptonico, con la normalizzazione utilizzata risulta essere:

$$L^{\mu\nu} = 8 [k'^{\mu} k^{\nu} + k'^{\nu} k^{\mu} - g^{\mu\nu} k \cdot k' + i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_{\rho} k'_{\sigma}] . \quad (3.28)$$

Il tensore adronico contiene tutta l'informazione sulla dinamica dell'interazione forte all'interno del nucleo e nella sua definizione compaiono gli stati adronici iniziale e finale, di impulso p_0 e p_X , rispettivamente, e la corrente nucleare debole J_A^{ν}

$$W_A^{\mu\nu} = \sum_X \langle 0 | J_A^{\mu\dagger} | X \rangle \langle X | J_A^{\nu} | 0 \rangle \delta^4(p_0 + q - p_X) . \quad (3.29)$$

Se $|\mathbf{q}| \lesssim 0.5 \text{ GeV}$ si può effettuare il calcolo di $W_A^{\mu\nu}$ utilizzando la teoria nucleare a molti corpi (NMBT), sviluppando l'operatore J_A^{μ} in potenze di $|\mathbf{q}|/M$ (con M massa del nucleone) e trattando stato iniziale e finale con funzioni d'onda non relativistiche [19].

Quando invece il momento trasferito aumenta bisogna tener conto del moto relativistico del nucleone nello stato finale con momento $\sim \mathbf{q}$ e del possibile insorgere di processi anelastici, come la produzione di risonanze.

Una sonda che trasferisce al bersaglio un impulso $\sim \mathbf{q}$ ha, per il principio di indeterminazione, una risoluzione spaziale $\sim 1/|\mathbf{q}|$. Quindi al crescere dell'impulso trasferito

la sonda diventa sensibile a una regione di dimensione sempre più piccola all'interno del nucleo. L'approssimazione impulsiva (IA) si basa su questo assunto, e consiste nel considerare il nucleo come un insieme di nucleoni isolati, trascurando l'interazione tra lo stato prodotto al vertice di interazione debole e il sistema residuo di $(A - 1)$ nucleoni (sistema spettatore). Per tenere conto della dinamica del nucleo la sezione d'urto neutrino-nucleone viene pesata con la funzione spettrale $P(E, \mathbf{p})$ (definita nel seguito) che dà la probabilità di trovare un nucleone con impulso \vec{p} ed energia E all'interno del nucleo, e integrata su tutti i valori di \vec{p} ed E compatibili con le condizioni cinematiche.

L'approssimazione impulsiva non tiene conto nè della correlazione statistica data dal principio di esclusione (Pauli blocking), nè delle interazioni nello stato finale (FSI).

Per quanto riguarda il principio di esclusione, ci aspettiamo che al crescere dell'energia del neutrino esso abbia un effetto trascurabile. Come conseguenza del principio di esclusione, infatti, i processi con un nucleone di impulso $p \lesssim p_F$ nello stato finale sono sfavoriti (vietati, se si trascurano le interazioni NN all'interno del nucleo). Al crescere dell'energia del neutrino, la sezione d'urto ha contributi da processi con impulso trasferito (e quindi impulso del nucleone) sempre maggiori, che non risentono del principio di esclusione. Inoltre i processi (anelastici) in cui lo stato finale non è un nucleone non risentono affatto del Pauli blocking e al crescere dell'energia del neutrino essi danno contributi sempre maggiori alla sezione d'urto. L'effetto delle FSI non è in generale trascurabile, ma per momenti trasferiti sufficientemente alti, può essere incluso nei calcoli teorici in modo consistente.

Sotto le ipotesi alla base della IA l'operatore corrente si scrive come la somma di operatori ad un corpo e lo stato intermedio $|X\rangle$ è fattorizzato nello stato del prodotto dell'interazione \mathcal{X} e nello stato del sistema di $A - 1$ nucleoni.

$$J_A^\mu \implies \sum_i^A j_i^\mu \quad , \quad |X\rangle \implies |\mathcal{X}, \mathbf{P}_{\mathcal{X}}\rangle \otimes |\mathcal{R}, \mathbf{P}_{\mathcal{R}}\rangle . \quad (3.30)$$

In queste condizioni possiamo calcolare l'elemento di matrice della corrente nucleare, col risultato

$$\begin{aligned}
\langle 0|J_A^\mu|X\rangle &= \langle 0|\sum_i j_i^\mu|\mathcal{X}, \mathbf{P}_X\rangle|\mathcal{R}, \mathbf{p}_R\rangle = \\
&= \int d^3p \langle 0|N, p\rangle|\mathcal{R}, \mathbf{p}_R\rangle \langle N, p|\sum_i j_i^\mu|\mathcal{X}, \mathbf{P}_X\rangle \\
&= \left(\frac{m}{\sqrt{\mathbf{p}_R^2 + m^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \langle 0|N, -\mathbf{p}_R; \mathcal{R}, \mathbf{p}_R\rangle \langle N, -\mathbf{p}_R|\sum_i j_i^\mu|\mathcal{X}, \mathbf{P}_X\rangle .
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Indicando con $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ otteniamo per il tensore adronico:

$$\begin{aligned}
W_A^{\mu\nu} &= \sum_{\mathcal{X}} \sum_{\mathcal{R}} \int d^3p_X d^3p_R |\langle 0|\mathcal{R}, \mathbf{p}_R; N, -\mathbf{p}_R\rangle|^2 \frac{m}{E_{p_R}} \cdot \\
&\quad \sum_i \langle -\mathbf{p}_R, N|j_i^\mu|\mathcal{X}, \mathbf{p}_X\rangle \langle \mathcal{X}, \mathbf{p}_X|j_i^\nu|-\mathbf{p}_R, N\rangle \cdot \\
&\quad \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_X - \mathbf{p}_R) \delta(\nu + E_0 - E_R - E_X),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

e utilizzando l'identità:

$$\delta(\nu - E_0 - E_R - E_X) = \int dE \delta(E - m + E_0 - E_R) \delta(-E + m + \nu - E_X) \tag{3.33}$$

arriviamo all'espressione finale

$$\begin{aligned}
W_A^{\mu\nu} &= \sum_{\mathcal{X}} \sum_{\mathcal{R}} \int d^3p_X d^3p_R dE |\langle 0|\mathcal{R}, \mathbf{p}_R; N, -\mathbf{p}_R\rangle|^2 \delta(E - m + E_0 - E_R) \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_X - \mathbf{p}_R) \cdot \\
&\quad \frac{m}{E_{p_R}} \sum_i \langle -\mathbf{p}_R, N|j_i^\mu|\mathcal{X}, \mathbf{p}_X\rangle \langle \mathcal{X}, \mathbf{p}_X|j_i^\nu|-\mathbf{p}_R, N\rangle \delta(-E + m + \nu - E_X) .
\end{aligned} \tag{3.34}$$

La funzione spettrale $P(E, \mathbf{p})$, definita come

$$P(E, \mathbf{p}) = \sum_{\mathcal{R}} |\langle 0|\mathcal{R}, -\mathbf{p}; N, \mathbf{p}\rangle|^2 \delta(E - m + E_0 - E_R) , \tag{3.35}$$

descrive proprietà intrinseche del nucleo in esame, cioè la probabilità di trovare un nucleone con impulso \mathbf{p} ed energia E al suo interno.

Il tensore adronico si può riscrivere in forma più compatta

$$\begin{aligned}
W_A^{\mu\nu} &= \sum_{\mathcal{X}} \int d^3p_X d^3p dE P(E, \mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_X - \mathbf{p}) \cdot \\
&\quad \frac{m}{E_p} \sum_i \langle -\mathbf{p}, N|j_i^\mu|\mathcal{X}, \mathbf{p}_X\rangle \langle \mathcal{X}, \mathbf{p}_X|j_i^\nu|-\mathbf{p}, N\rangle \delta(-E + m + \nu - E_X) .
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Introduciamo ora la variabile $\tilde{\nu}$, definita come la differenza tra l'energia dello stato \mathcal{X} e quella di uno stato di particella libera di impulso \mathbf{p} :

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= E_{\mathcal{X}} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \\ &= \nu + m - E - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \nu + E_0 - E_{\mathcal{R}} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} .\end{aligned}\quad (3.37)$$

L'uso di questa variabile permette di tenere conto del fatto che parte dell'energia trasferita ν diventa energia di eccitazione del sistema spettatore.

Utilizzando la delta di conservazione dell'impulso in (3.36) otteniamo finalmente l'espressione

$$\begin{aligned}W_A^{\mu\nu} &= \sum_i \int d^3p \, dE \, P(E, \mathbf{p}) \, \delta(\tilde{\nu} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - E_{\mathcal{X}}) \cdot \\ &\quad \frac{m}{E_p} \sum_i \langle -\mathbf{p}, N | j_i^\mu | \mathcal{X}, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle \langle \mathcal{X}, \mathbf{p} + \mathbf{q} | j_i^\nu | -\mathbf{p}, N \rangle \\ &= \sum_i \int d^3p \, dE \, P(\mathbf{p}, E) \frac{m}{E_p} W_i^{\mu\nu}(\tilde{q}) ,\end{aligned}\quad (3.38)$$

nella quale compare il tensore adronico che descrive l'interazione di un neutrino con un nucleone *libero*.

Nell'ambito dell'approssimazione impulsiva abbiamo ricondotto il tensore adronico che compare nell'interazione neutrino nucleo a quello che compare nell'interazione neutrino nucleone, a patto di correggere il quadrimpulso trasferito $q = (\nu, \mathbf{q}) \Rightarrow \tilde{q} = (\tilde{\nu}, \mathbf{q})$ e di effettuare un'integrazione su impulso ed energia del nucleone, con un peso dato dalla funzione spettrale², che contiene tutta l'informazione sulla dinamica all'interno del nucleo. Un calcolo corretto della funzione spettrale è quindi un requisito imprescindibile per ottenere risultati corretti. Nella prossima sezione daremo una descrizione qualitativa della funzione spettrale utilizzata.

²Gli estremi di integrazione della (3.38) sono fissati dalla cinematica e sono riportati in appendice

3.4 La funzione spettrale

Come abbiamo visto nel Capitolo 2, nella teoria nucleare a molti corpi (NMBT) il nucleo è visto come un insieme di A nucleoni, la cui dinamica è governata dall'hamiltoniana non relativistica

$$H_A = \sum_{i=1}^A \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + \sum_{j>i=1}^A v_{ij} + \sum_{k>j>i=1}^A V_{ijk}, \quad (3.39)$$

dove il potenziale v_{ij} si riduce al potenziale di Yukawa per grandi distanze e il termine di interazione a tre corpi V_{ijk} viene inserito per riprodurre l'energia di legame degli stati di tre nucleoni. La NMBT permette di descrivere in maniera consistente la funzione spettrale dei nuclei con $A \leq 4$ e della materia nucleare, ovvero un sistema uniforme di A nucleoni (nel limite $A \rightarrow \infty$), con egual numero di protoni e neutroni soggetti unicamente alle interazioni forti.

Per calcolare la funzione spettrale di nuclei con numero di massa $A > 4$, bisogna introdurre delle approssimazioni. Quella più drastica consiste nel trascurare le interazioni tra i nucleoni, trattandoli come un gas degenere di fermioni (FG). In queste condizioni la $P(\mathbf{p}, E)$ è diversa da zero solo per impulsi minori dell'impulso di Fermi (p_F) e per energie minori dell'energia di Fermi (E_F).

In molte regioni cinematiche il modello del gas di Fermi fornisce previsioni poco accurate, poichè non è in grado di descrivere le interazioni tra nucleoni che hanno come risultato la popolazione di stati con impulso al di fuori dalla sfera di Fermi. In seguito a questi processi il numero di nucleoni negli stati con $E \ll E_f$ e $|\mathbf{p}| \ll p_f$ diminuisce, e compaiono contributi alla funzione spettrale per $E \gg E_f$ e $p \gg p_f$, dovuti alle coppie nucleone-nucleone fortemente correlate.

Per stimare la scala di energia delle interazioni tra nucleoni (e quindi le code della funzione spettrale) si può considerare lo scattering su un nucleone appartenente a una coppia di nucleoni correlati con momenti \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 maggiori rispetto all'impulso di Fermi,

che è dell'ordine di ~ 250 MeV/c. Nel sistema di riferimento in cui il nucleo è in quiete $\mathbf{k}_1 \sim -\mathbf{k}_2$, poichè l'impulso totale del sistema di $(A-2)$ nucleoni è trascurabile. Quindi l'espulsione di un nucleone con alto impulso \mathbf{k} lascia il sistema residuo con un nucleone nello spettro continuo, e richiede un'energia

$$E \approx E_{soglia} + \frac{\mathbf{k}^2}{2m}, \quad (3.40)$$

dove E_{soglia} è l'energia minima necessaria per rimuovere una coppia di nucleoni, da confrontare con le energie tipiche predette dal modello a shell del nucleo ~ 30 MeV. La (3.40) mostra che il momento e l'energia dei nucleoni con alta energia di rimozione non sono indipendenti.

L'approssimazione utilizzata nel seguito va sotto il nome di Local Density Approximation (LDA) [22] e consiste nello scrivere la funzione spettrale come somma di due contributi, uno dovuto al campo medio generato dai nucleoni, e uno che tiene conto delle correlazioni dinamiche

$$P_{LDA}(\mathbf{p}, E) = P_{MF}(\mathbf{p}, E) + P_{corr}(\mathbf{p}, E), \quad (3.41)$$

$$\int d^3p dE P_{LDA}(\mathbf{p}, E) = 1$$

Il contributo dovuto al campo medio è stato misurato negli esperimenti di diffusione elettrone nucleo nei quali il nucleone emesso viene rivelato in coincidenza con l'elettrone diffuso e parametrizzato nella forma

$$P_{MF}(\mathbf{p}, E) = \sum_n Z_n |\phi_n(\mathbf{p})|^2 F_n(E - E_n) \quad (3.42)$$

dove $\phi_n(\mathbf{p})$ è la funzione d'onda (nello spazio dell'impulso) che descrive un nucleone nello stato n , Z_n è la costante di rinormalizzazione che tiene conto della presenza di interazioni non incluse nel campo medio, e $F_n(E - E_n)$ descrive l'andamento in energia. Questo termine si annulla per $|\mathbf{p}| \gg p_F$ ed $E \gg E_f$. In assenza di correlazioni NN la (3.42) coincide con la funzione spettrale totale, con $Z_n = 1$ e $F_n(E - E_n) = \delta(E - E_n)$.

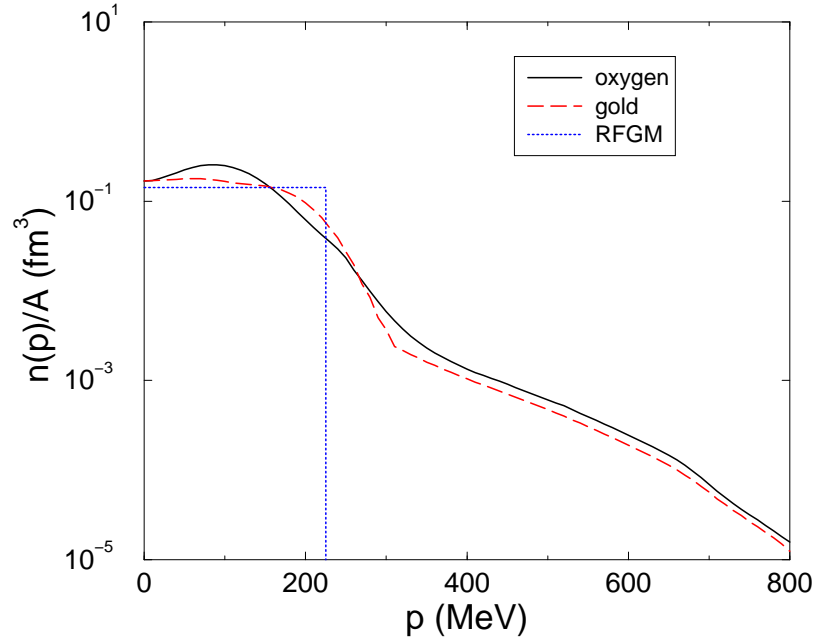


Figura 3.3: Distribuzione di momento dei nucleoni nello stato fondamentale dell'ossigeno (linea continua) e dell'oro (linea tratteggiata). La funzione gradino riportata corrisponde a una distribuzione di Fermi con momento di Fermi $p_F = 225$ MeV e energia di legame $E_B = 25$ MeV.

Il termine $P_{corr}(\mathbf{p}, E)$ tiene conto degli effetti delle correlazioni NN ed è calcolato a partire dalla

$$P_{corr}(\mathbf{p}, E) = \int d^3r \rho_A(\mathbf{r}) P_{corr}^{n.m.}(\mathbf{p}, E; \rho = \rho_A(\mathbf{r})) \quad (3.43)$$

dove ρ_A è la densità del nucleo in esame e $P_{corr}^{n.m.}$ è il termine di correlazione calcolato per materia nucleare uniforme a densità $\rho = \rho_A$.

L'ipotesi alla base della LDA è che le forze di corto raggio tra i nucleoni, responsabili delle correlazioni tra i nucleoni, non risentono di effetti di superficie o dovuti alla struttura a shell del nucleo. Sotto questa ipotesi i risultati ottenuti con la materia nucleare sono utilizzabili anche per i nuclei, che hanno numero di massa finito e densità non costante.

Il calcolo della distribuzione in momento dei nucleoni:

$$n(\mathbf{p}) = \int dE P(\mathbf{p}, E) = \langle 0 | a_p^\dagger a_p | 0 \rangle \quad (3.44)$$

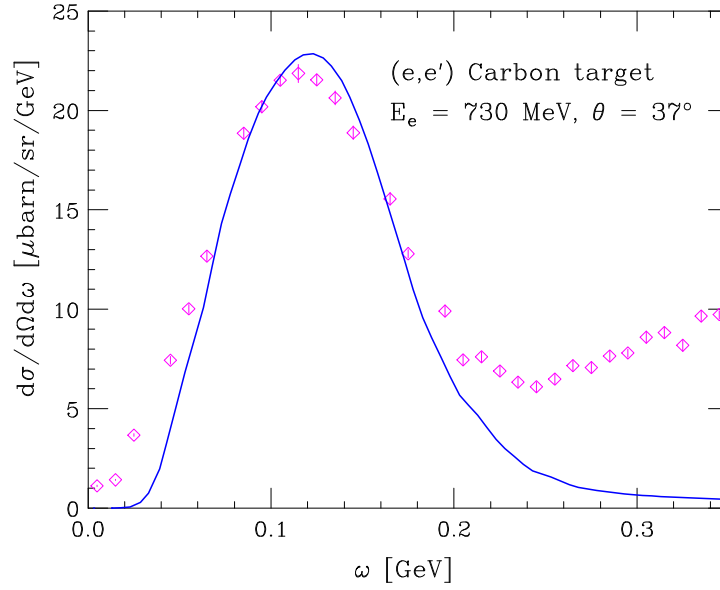


Figura 3.4: Sezione d'urto ottenuta per lo scattering di elettrone su nucleo di carbonio, ad energia (730 MeV) e angolo di diffusione fissato (37°) in funzione dell'energia della sonda $\omega = E_e - E_{e'}$. Sono chiaramente visibili il picco quasi elastico e la coda dovuta alla produzione della risonanza Δ .

riportato in figura (3.3) mostra chiaramente che per $A \geq 4$ e per impulsi $\mathbf{p} \geq 300 \text{ MeV}$ $n(\mathbf{p})/A$ è indipendente dal numero di massa.

3.5 La sezione d'urto quasi elastica

Riassumendo i risultati delle precedenti sezioni, possiamo scrivere la sezione d'urto per l'interazione neutrino nucleo in approssimazione impulsiva come:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_l} = \int d^3p dE P(\mathbf{p}, E) \frac{d^2\sigma_{elem}}{d\Omega dE_l} . \quad (3.45)$$

dove $d^2\sigma_{elem}/d\Omega dE_l$ è la sezione d'urto per l'interazione elementare.

Bisogna sottolineare come il formalismo della LDA e l'approssimazione impulsiva siano ugualmente applicabili ai processi di scattering da elettrone, permettendo di confrontare i risultati teorici con la grande mole di dati disponibili. In figura (3.4) è riportato il

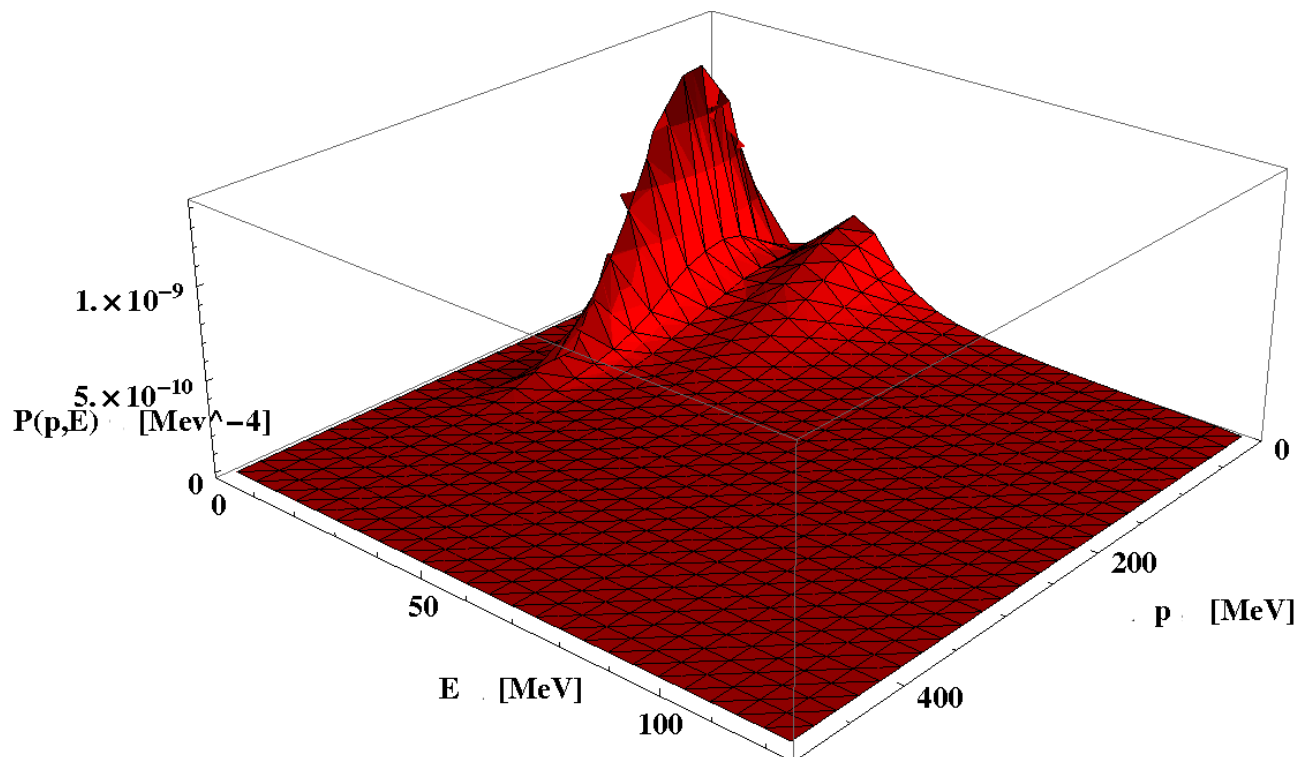


Figura 3.5: Funzione spettrale utilizzata per il calcolo della sezione d'urto su carbonio.

risultato del calcolo per la sezione d'urto elettrone nucleo confrontata con i risultati di [17].

La (3.45) descrive sia lo scattering quasi elastico che la produzione di risonanze. Quello che differisce a seconda del processo è la forma esplicita dei fattori di forma e, nel caso delle risonanze, la sostituzione della δ di conservazione dell'energia con una Breit-Wigner.

3.6 Funzione Spettrale del carbonio

In figura (3.5) è riportata la funzione spettrale utilizzata per il calcolo della sezione d'urto quasi elastica [22]. In corrispondenza delle energie di rimozione predette dal modello a shell si presentano dei picchi allargati e si nota chiaramente come la funzione spettrale abbia contribuito anche per energie di legame maggiori.

A titolo di confronto abbiamo riportato in figura (3.6) sia la funzione spettrale otte-

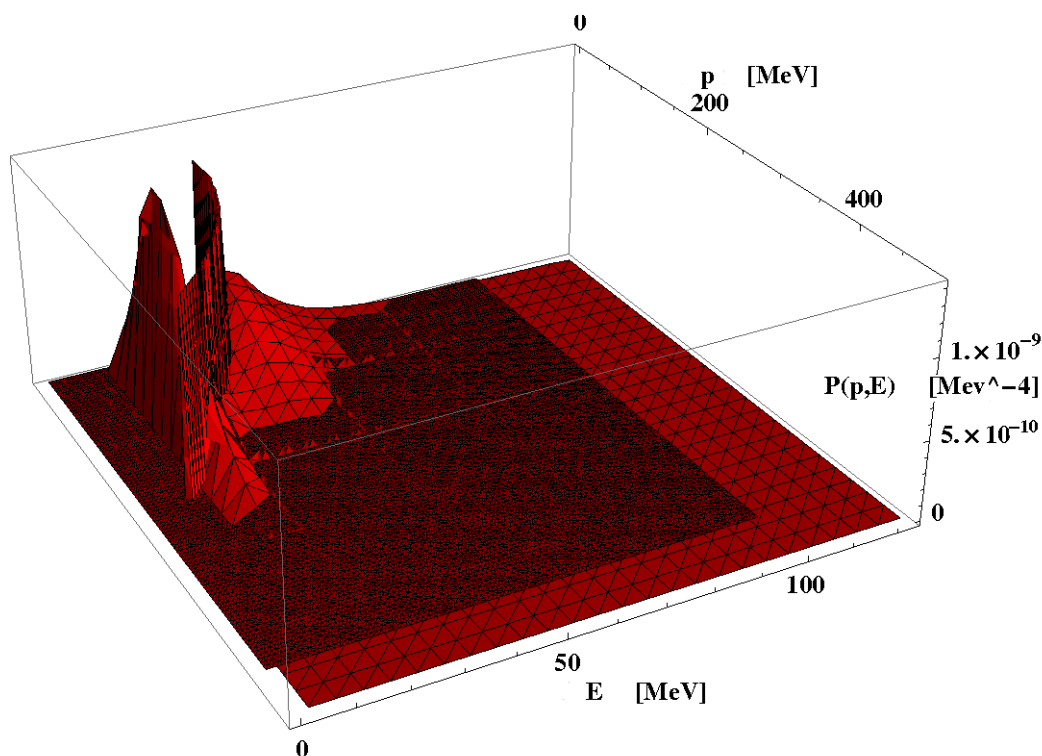


Figura 3.6: Confronto tra la funzione spettrale utilizzata e la funzione spettrale di un gas di nucleoni non interagenti che rispettano la relazione di dispersione $E = \mathbf{p}^2/2m$. La funzione spettrale del gas di Fermi è stata moltiplicata per un fattore arbitrario, al fine di risultare comparabile con la funzione spettrale realistica.

nuta sulla base della LDA sia quella predetta dal modello a gas di Fermi. In assenza di interazione i nucleoni devono rispettare la relazione di dispersione di particella libera, da cui deriva la funzione spettrale riportata in figura (3.6), diversa da zero solo per valori di E e \mathbf{p} che tale relazione. Poichè l'unico vincolo sulle funzioni spettrali è che siano normalizzate ad uno, la funzione spettrale del Fermi gas è stata moltiplicata per un fattore arbitrario, per rendere più semplice il confronto.

Nel prossimo capitolo confronteremo i risultati attesi per la sezione d'urto doppiamente differenziale (in energia cinetica e angolo di scattering del muone prodotto) con le misure effettuate dall'esperimento MiniBooNE.

Capitolo 4

Risultati

In questo capitolo presentiamo i risultati per la sezione d'urto quasi elastica (CCQE) neutrino-nucleo, ottenuti utilizzando il formalismo e le approssimazioni descritti nel capitolo (3). I calcoli numerici sono stati effettuati utilizzando codici scritti in linguaggio Fortran 77, la cui esecuzione richiede un tempo di calcolo dell'ordine di qualche decina di minuti su un personal computer commerciale di fascia alta.

4.1 Sezione d'urto a cinematica fissata

Consideriamo il processo:

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p \quad (4.1)$$

La sezione d'urto CCQE ottenuta per energia del neutrino incidente di 800 MeV e angolo di scattering di 60° è riportata in figura (4.1). Lo spettro del muone prodotto presenta un largo picco intorno al valore dell'energia cinetica $T_\mu \sim 430$ MeV e si azzera per valori di T_μ vietati dalla cinematica.

Al diminuire di $\cos \theta_\mu$ e ad energia fissata, il processo di interazione neutrino nucleone avviene con un maggiore quadrimpulso trasferito, passando dal regime di scattering elastico a quello di scattering anelastico. Ci aspettiamo perciò che la sezione d'urto quasi

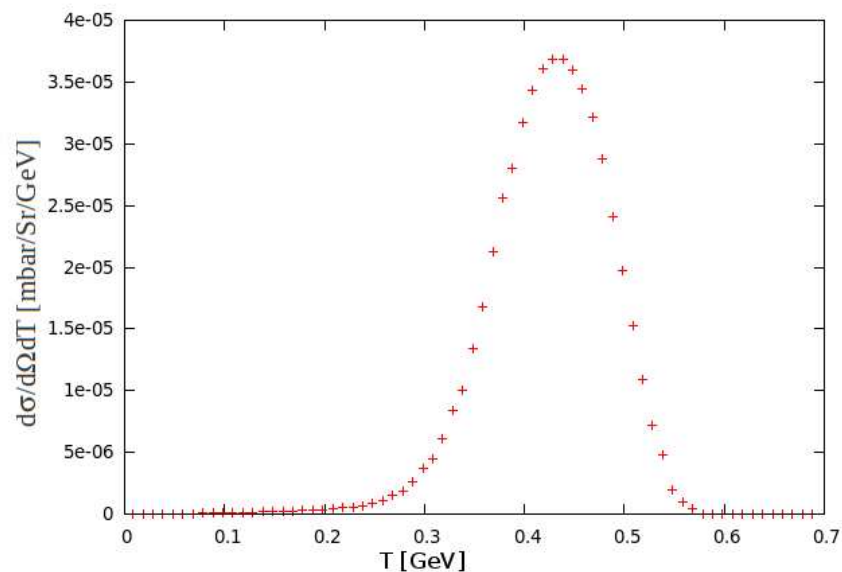


Figura 4.1: Sezione d'urto per energia del neutrino incidente di 800 MeV e angolo di diffusione di 60° . Il picco della sezione d'urto corrisponde al valore dell'energia cinetica $T \sim 0.43\text{GeV}$.

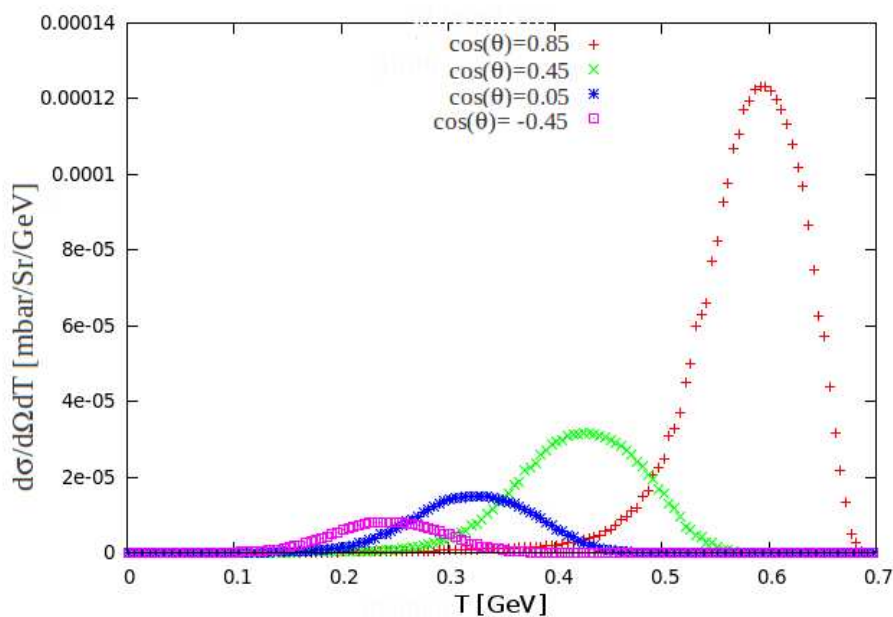


Figura 4.2: Sezione d'urto quasi elastica (CCQE) al variare dell'angolo di diffusione per energia del neutrino incidente di 825 MeV. Al diminuire del valore di $\cos\theta_\mu$ il picco della sezione d'urto si sposta a valori dell'energia cinetica minori e la sezione d'urto diminuisce.

elastica sia massima per scattering in avanti e diminuisca all'aumentare dell'angolo di scattering.

In figura (4.2) è riportata la sezione d'urto calcolata per diversi valori dell'angolo di scattering, con energia del neutrino $E_\nu = 825$ MeV. Come atteso, la sezione d'urto è maggiore per processi di scattering in avanti, con valori di $\cos\theta_\mu$ grandi e positivi. Inoltre si può notare come al diminuire del $\cos\theta_\mu$ il picco della sezione d'urto CCQE sia sempre meno pronunciato.

4.2 Confronto con i dati di MiniBooNE

L'esperimento MiniBooNE ha recentemente pubblicato il primo set di dati sulla sezione d'urto CCQE [23] doppiamente differenziale in angolo di scattering ed energia cinetica del muone uscente. La presa dati di MiniBooNE è stata effettuata con bin in energia cinetica di 100 MeV e di 0.1 per il $\cos\theta_\mu$.

A differenza di misure precedenti (riguardanti la sezione d'urto differenziale in impulso trasferito $d\sigma/dQ^2$) la $d^2\sigma/d\cos\theta_\mu dT_\mu$ permette uno studio più diretto del processo:

$$\nu_\mu + {}^{12}\text{C} \rightarrow \mu^- + X, \quad (4.2)$$

in quanto dipende solo da grandezze *misurate* e non da grandezze *ricostruite*, come il quadrimpulso trasferito, che cambiano a seconda del modello nucleare utilizzato.

Dalla sezione d'urto doppiamente differenziale si possono ricavare lo spettro in energia e la distribuzione angolare del muone

$$\frac{d\sigma}{dT_\mu} = \int \frac{d^2\sigma}{dT_\mu d\cos\theta_\mu} d\cos\theta_\mu \quad , \quad \frac{d\sigma}{d\cos\theta_\mu} = \int \frac{d^2\sigma}{dT_\mu d\cos\theta_\mu} dT_\mu \quad , \quad (4.3)$$

e anche la distribuzione in Q^2

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \int \frac{d^2\sigma}{dT_\mu d\cos\theta_\mu} \delta(Q^2 - Q_{rec}^2) d\cos\theta_\mu dT_\mu \quad , \quad (4.4)$$

con Q_{rec}^2 dato dalla

$$Q_{rec}^2 = 2E_\nu E_\mu \left(1 - \frac{p_\mu}{E_\mu} \cos \theta_\mu \right) - m_\mu^2, \quad (4.5)$$

dove $E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} = T_\mu + m_\mu$, e p_μ è l'impulso del muone. V'è sottolineato che per ottenere Q_{rec}^2 si devono introdurre delle ipotesi aggiuntive, necessarie per ricostruire, a partire dalle grandezze cinematiche misurate, l'energia del neutrino incidente E_ν .

Utilizzando lo spettro di [23] riportato in figura (1.2) abbiamo ricavato il numero di eventi atteso. Per ottenere il numero di eventi abbiamo utilizzato più valori della sezione d'urto, calcolata per diversi valori delle variabili cinematiche all'interno dello stesso bin. Questa procedura è necessaria poichè, soprattutto nella regione di bassa energia cinetica del muone e ad angoli piccoli, la sezione d'urto dipende apprezzabilmente dalla particolare scelta effettuata per T_μ e $\cos \theta_\mu$ all'interno del bin. Abbiamo così ottenuto un risultato più rappresentativo della particolare regione cinematica, che può essere confrontato direttamente con i dati.

I risultati dei nostri calcoli sono riportati in figura (4.6) e si devono confrontare con il numero di eventi da scattering quasi elastico misurato dal rivelatore di MiniBooNE, riportato in figura (4.5).

In figura (4.7) è riportata la differenza tra il numero di eventi misurati e il numero di eventi predetti. Si può osservare come la differenza si mantenga positiva per tutti i valori di T_μ e $\cos \theta_\mu$.

L'esperimento MiniBooNE utilizza il modello a gas di Fermi per descrivere gli effetti nucleari. Come abbiamo mostrato nei capitoli precedenti, però, la dinamica delle interazioni nucleone-nucleone dà luogo a processi che non possono essere descritti da questo modello. Nel tentativo di tener conto in modo effettivo di questi processi, ed ottenere un miglior accordo tra simulazioni Monte Carlo e dati, la collaborazione MiniBooNE ha modificato il valore della massa assiale ed ha inserito un nuovo parametro.

La massa assiale è la grandezza che descrive l'andamento in Q^2 del fattore di forma

assiale del nucleone, supposto avere una forma dipolare¹:

$$F_A(Q^2) = \frac{g_A}{\left(1 - \frac{Q^2}{M_A^2}\right)}, \quad (4.6)$$

dove $g_A = -1.267$ si ottiene dai processi di decadimento β . Il valore della massa assiale risultante dall'analisi di MiniBooNE è 1.35 ± 0.17 GeV, maggiore di oltre il 30 % di quello precedentemente ottenuto dagli esperimenti di scattering su deuterio: $M_A = 1.03 \pm 0.02$ GeV. Questo valore è ottenuto con un fit ai dati della sezione d'urto differenziale in quadrimpulso trasferito $d\sigma/dQ^2$.

La modifica della massa assiale non migliorava però l'accordo tra simulazioni e dati per gli eventi a basso quadrimpulso trasferito (per $Q^2 \sim 0$ il fattore di forma assiale risulta poco sensibile a modifiche della massa assiale). È stato quindi introdotto un nuovo parametro κ per tener conto dell'effetto di Pauli-blocking e modificare l'energia minima disponibile per il nucleone:

$$E_{min} = \kappa(\sqrt{p_F^2 + M^2} - \omega + E_B), \quad (4.7)$$

dove M e E_B sono la massa e l'energia di legame del nucleone, p_F è il momento di Fermi e ω l'energia trasferita. Il valore misurato è risultato essere $\kappa = 1.007_{-\infty}^{+0.007}$. Ricordiamo che nel modello a Fermi gas $\kappa = 1$.

Come ulteriore confronto, il numero di eventi attesi e misurati sono stati integrati sulle variabili cinematiche, ottenendo lo spettro del muone uscente e la sua distribuzione angolare. I risultati corrispondenti a $M_A = 1.03$ and 1.35 GeV sono riportati in figura (4.3). Per un valore della massa assiale di $M_A = 1.35$ GeV il numero di eventi predetti aumenta ed è compatibile, entro l'errore, con il numero di eventi misurati. Solo per piccoli valori dell'energia cinetica il calcolo mostra un piccolo disaccordo con gli eventi misurati.

Un precedente lavoro della collaborazione MiniBooNE [24] aveva presentato la sezione d'urto differenziale in quadrimpulso trasferito. I dati di MiniBooNE e il calcolo eseguito

¹vedi appendice A

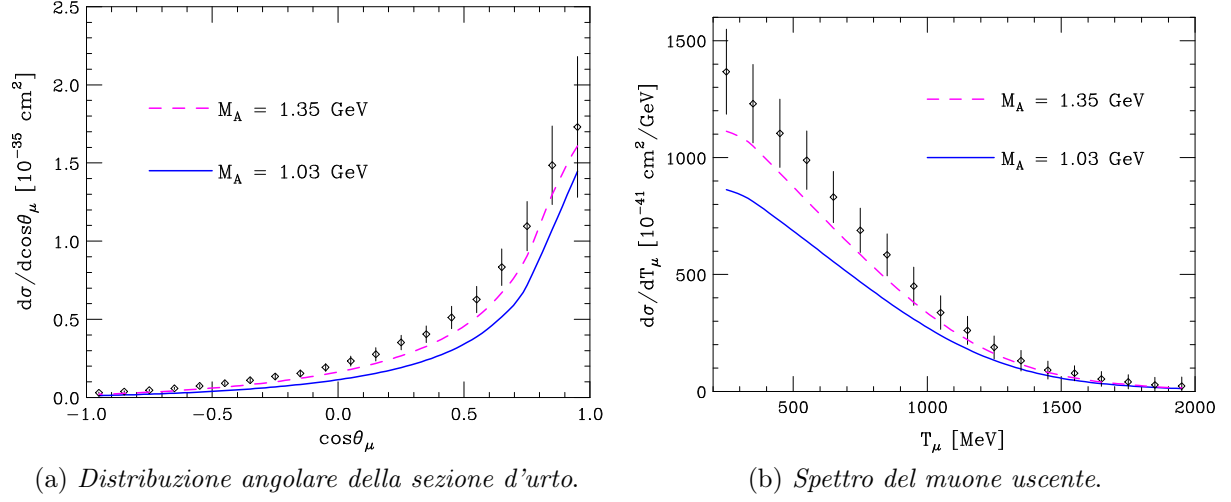


Figura 4.3: Sezione d'urto integrata su una variabile cinematica. L'incremento del valore della massa assiale porta ad un miglior accordo tra il calcolo effettuato e i dati di MiniBooNE, sia per la distribuzione angolare che per lo spettro in energia cinetica del muone.

per due diversi valori della massa assiale ($M_A = 1.03$ GeV e $M_A = 1.35$ GeV) sono riportati in figura (4.4).

La relazione utilizzata da [24] per ricostruire il Q^2 é :

$$Q_{rec}^2 = -m_\mu^2 + 2E_\nu^{rec}(E_\mu - |\mathbf{k}'| \cos \theta_\mu) \quad (4.8)$$

dove m_μ , E_μ , \mathbf{k}' e θ_μ sono la massa, l'energia, l'impulso e l'angolo di scattering del muone e

$$E_\nu^{rec} = \frac{2E_\mu(M_n - \epsilon) - (\epsilon^2 - 2M_n\epsilon + m_\mu^2 + \Delta M^2)}{2(M_n - \epsilon - E_\mu + |\mathbf{k}'| \cos \theta_\mu)} \quad (4.9)$$

La (4.8) è valida nell'approssimazione in cui il neutrone ha impulso nullo ed energia di rimozione fissata ϵ . In generale invece, per ogni valore di E_μ e θ_μ l'energia del neutrino dipende sia dal modulo che dalla direzione dell'impulso del neutrone con cui interagisce. Per questo motivo, la distribuzione in Q^2 non costituisce, da sola, un motivo sufficiente per incrementare il valore della massa assiale: il procedimento per ricostruire l'energia del neutrino da grandezze misurate introduce un grosso effetto di distorsione sull'analisi dei

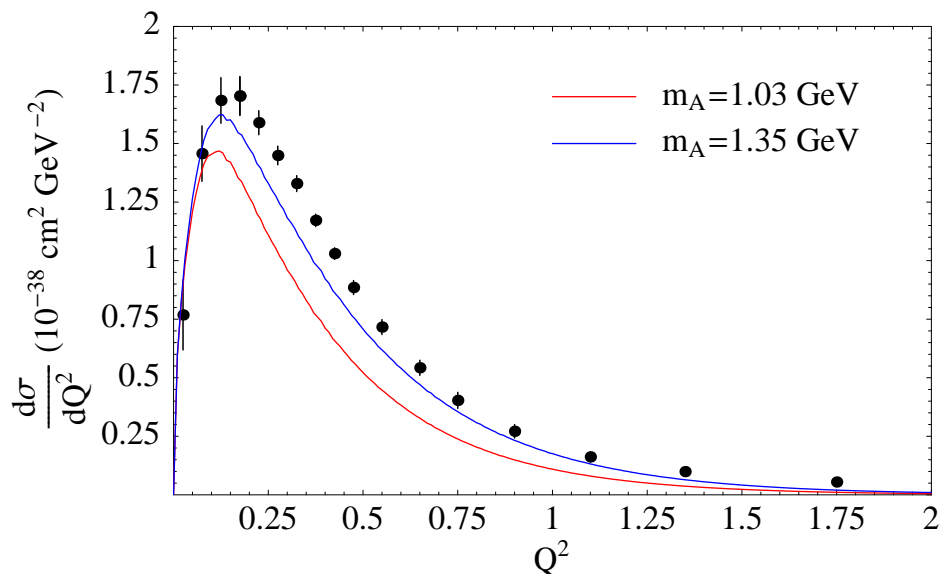


Figura 4.4: Sezione d'urto quasi elastica differenziale in quadrimpulso trasferito. L'incremento del valore della massa assiale porta ad un miglior accordo tra teoria e dati.

dati. Come si può vedere in figura (4.4) infatti, anche con una massa assiale di 1.35 GeV non vi è buon accordo tra teoria e risultati sperimentali.

Benchè l'incremento della massa assiale porti ad un effettiva diminuzione della differenza teoria-dati, l'interpretazione di questo risultato non è ovvia ed è fonte di dibattito. Va sottolineato infatti che il diverso valore della massa assiale riportato da MiniBooNE consiste in una modifica *ad hoc* di un parametro per descrivere gli effetti nucleari all'interno di un modello semplificato.

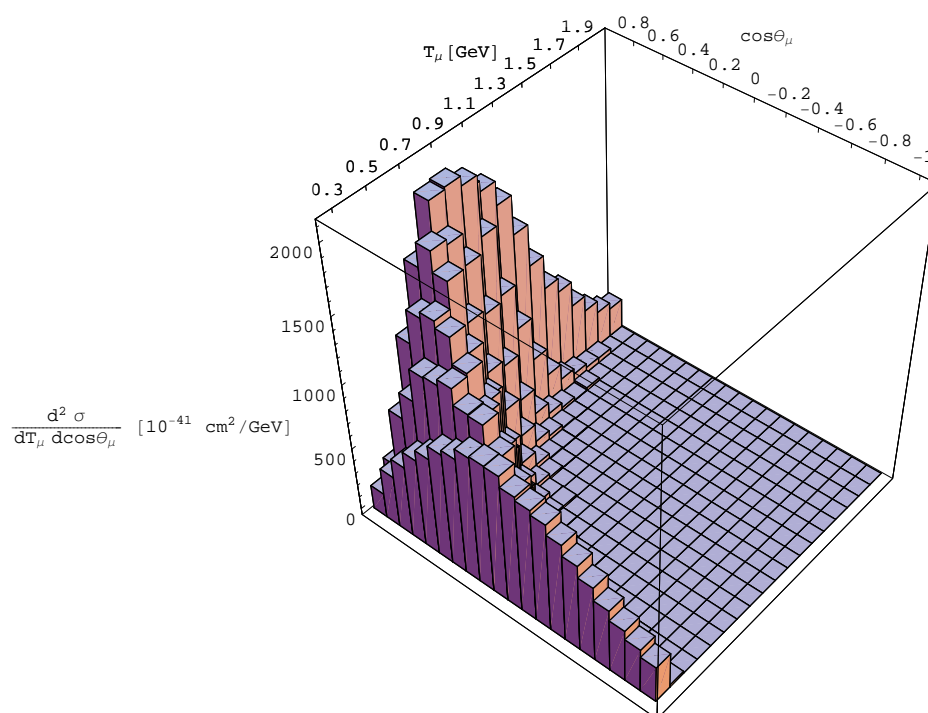


Figura 4.5: Numero di eventi misurati dall'esperimento MiniBooNE. I dati sono riportati al variare dell'energia cinetica e del coseno dell'angolo di emissione del leptone, con un passo di 100 MeV e 0.1 rispettivamente.

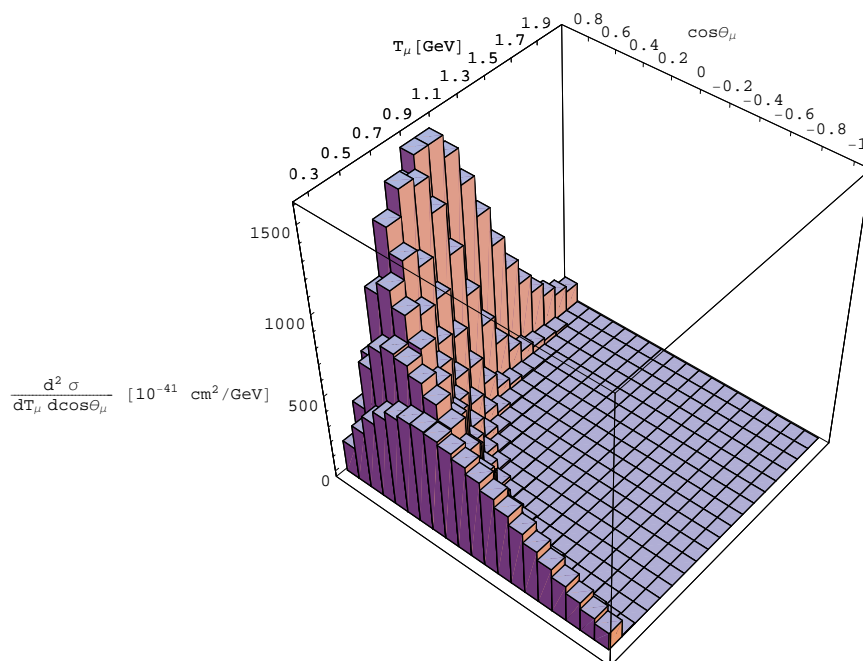


Figura 4.6: Numero di eventi calcolati, riportati al variare dell'energia cinetica e del coseno dell'angolo di emissione del leptone, con un passo di 100 MeV e 0.1 rispettivamente.

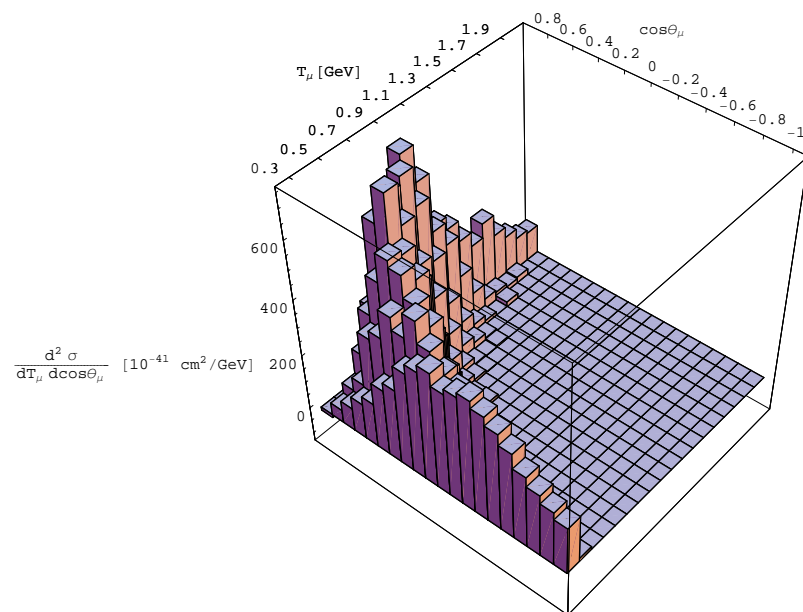


Figura 4.7: Differenza tra il numero di eventi misurati e il numero di eventi predetti.

Conclusioni

In questa tesi abbiamo affrontato la descrizione degli effetti che la dinamica nucleare ha sulla sezione d'urto neutrino nucleo per energia del neutrino ~ 1 GeV. L'intervallo di energia considerato è di particolare interesse per gli esperimenti di oscillazione di neutrino e una appropriata trattazione della fisica del nucleo è importante per poter effettuare misure di precisione.

Utilizzando il formalismo della teoria nucleare a molti corpi e l'approssimazione impulsiva, abbiamo calcolato la sezione d'urto quasi elastica dei processi di corrente carica (CCQE) per il nucleo di carbonio. I risultati ottenuti sono stati confrontati con i risultati dell'esperimento MiniBooNE [23], che per la prima volta ha reso disponibili misure della sezione d'urto differenziale in funzione delle variabili cinematiche misurate.

Il confronto dei risultati ottenuti con i dati di MiniBooNE mostra che, a meno di modificare in modo apprezzabile il valore della massa assiale del nucleone, la teoria predice una sezione d'urto minore di quella misurata per tutti i valori di energia cinetica e angolo di scattering. Questo risultato, benchè ottenuto all'interno di un particolare schema, risulta essere largamente indipendente dal modello, in quanto calcoli effettuati utilizzando diverse descrizioni della dinamica nucleare portano a risultati analoghi [25]. L'incremento del valore della massa assiale porta ad un accordo migliore, anche se ancora imperfetto, tra teoria e dati.

La proposta di considerare $M_A \sim 1.35$ GeV come un valore *effettivo* della massa assiale, modificato da effetti nucleari non inclusi nel modello a Fermi gas utilizzato nell'analisi dei

dati di MiniBooNE, non sembra essere compatibile con i risultati della grande maggioranza dei calcoli teorici disponibili [26]. Nei modelli nucleari piú sofisticati del Fermi gas, infatti, le correlazioni tra nucleoni hanno l'effetto di diminuire la sezione d'urto su tutto il range cinematico. Per riconciliare teoria e dati, diventa quindi necessario un valore della massa assiale ancora piú elevato, nel caso dell'approccio che abbiamo utilizzato, un fit χ^2 della distribuzione in Q^2 fornisce il valore $M_A \sim 1.6$ GeV.

I risultati ottenuti in questa tesi indicano che lo schema concettuale basato sulla IA e sulla funzione spettrale , che permette di descrivere l'interazione quasi elastica elettrone nucleo con un'ottima precisione, non è applicabile al caso dell'interazione neutrino nucleo a meno di incrementare sensibilmente il valore della massa assiale. Questa *sostanziale* discrepanza tra scattering da neutrino e da elettrone deve essere approfondita, analizzando a fondo le analogie e le differenze i due processi.

Una spiegazione possibile è che le sezioni d'urto di neutrino si ottengono integrando sul flusso dei neutrini incidenti. In questo modo, la sezione d'urto a energia e angolo del muone fissati riceve contributi da energie del neutrino diverse, corrispondenti a diverse regioni cinematiche, nelle quali dominano diversi meccanismi di reazione. Per esempio, a bassa energia del neutrino ci si può trovare al di fuori della regione di applicabilità dell'approssimazione impulsiva. È quindi ragionevole pensare che l'analisi delle sezioni d'urto neutrino-nucleo richieda modelli degli effetti nucleari piú flessibili, in grado di descrivere una varietà di condizioni cinematiche in modo consistente. Lo sviluppo di modelli di questo tipo nell'ambito della teoria a molti corpi nucleare è possibile, e viene attivamente perseguito da molti gruppi in Europa e negli Stati Uniti.

Appendice A

Fattori di forma

La corrente adronica debole, responsabile della transizione neutrone-protone nel processo:

$$\nu_l + n \rightarrow l^- + p \quad (\text{A.1})$$

ha una struttura $V - A$, che nella sua forma piu' generale si formalizza come:

$$\begin{aligned} \langle p(p') | J^\mu(0) | n(p) \rangle &= \langle p(p') | V^\mu(0) | n(p) \rangle - \langle p(p') | A^\mu(0) | n(p) \rangle \\ &= \bar{u}_p(p') \left[F_V(q^2) \gamma^\mu + i F_M(q^2) \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2M} q^\nu + F_V^{s.c.}(q^2) \frac{q^\mu}{M} \right] u_n(p) + \\ &+ \bar{u}_p(p') \left[F_A(q^2) \gamma^\mu \gamma_5 + F_P(q^2) \frac{2M}{m_\pi^2} q^\mu \gamma_5 + i F_A^{s.c.}(q^2) \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M} \gamma_5 \right] u_n(p) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

dove l'apice *s.c.* è proprio delle correnti di seconda classe¹

L'ipotesi CVC permette di legare il fattore di forma vettoriale $F_V(q^2)$ debole con i fattori di forma elettromagnetici e implica $F_V^{s.c.}(q^2) = 0$.

Inoltre l'ipotesi PCAC stabilisce una relazione tra il fattore di forma assiale e quello pesudoscalare:

$$F_P(q^2) = \frac{2m_N}{m_\pi^2 - q^2} F_A(q^2) \quad (\text{A.4})$$

¹Le correnti di prima e seconda classe differiscono per le proprietà di trasformazione sotto G-parità:

$$\begin{aligned} GV^\mu G^{-1} &= V^\mu & ; & & GV_{s.c.}^\mu G^{-1} &= -V_{s.c.}^\mu \\ GA^\mu G^{-1} &= -A^\mu & ; & & GA_{s.c.}^\mu G^{-1} &= -A_{s.c.}^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Infine, poiché le correnti di seconda classe sono incompatibili con il modello standard delle interazioni elettrodeboli, poniamo $F_A^{s.c.}(q^2) = 0$.

Sulla base di queste considerazioni, l'ampiezza invariante per il processo (A.1) si scrive come compare nella (3.2).

L'andamento dei fattori di forma si ottiene dai dati sperimentali e si esprime attraverso i fattori di forma di Rosebluth:

$$\begin{aligned} G_E &= F_V(q^2) - \tau F_M(q^2) = \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{m_V^2}\right)^2} & \text{con } \tau &= \frac{q^2}{4m_N^2} \\ G_M &= F_V(q^2) + F_M(q^2) = 4.71 G_E \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

dove M_V è un parametro, la massa vettoriale, il cui valore è ricavato da un fit ai dati e risulta essere $M_V^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$.

L'espressione finale per i fattori di forma è quindi:

$$\begin{aligned} F_V(q^2) &= \frac{1}{1 - \tau} (G_E(q^2) - \tau G_M(q^2)) & F_M(q^2) &= \frac{1}{1 - \tau} (-G_E(q^2) + G_M(q^2)) \\ F_A(q^2) &= -\frac{g_A}{\left(1 - \frac{q^2}{m_A^2}\right)} & F_P(q^2) &= \frac{1.28}{\left(1 - \frac{q^2}{0.14}\right)^2} \left(\frac{F_A}{1.27}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

con il valore di m_A che dalla media mondiale degli esperimenti di scattering su deuterio $m_A = 1.03 \pm 0.02 \text{ GeV}$ e $g_A = 1.26$ che si ricava dai processi di decadimento β .

Appendice B

Estremi di integrazione per la funzione spettrale

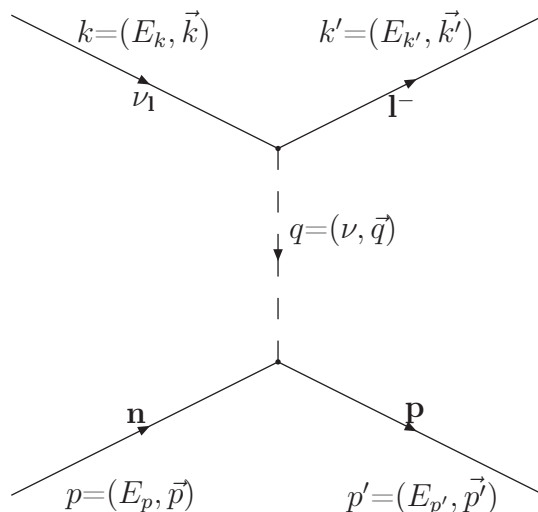


Figura 3.2: Diagramma di Feynman che descrive l'interazione neutrino neutrone

Richiamiamo qui il risultato ottenuto nel secondo capitolo per la sezione d'urto neutrino nucleo:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_l} = \int d^3p dE P(\vec{p}, E) \frac{d^2\sigma_{elem}}{d\Omega dE_l} \quad (\text{B.1})$$

Gli estremi di integrazione per la (B.1) si ricavano dalla cinematica del processo.

L'integrale sull'impulso del nucleone si riesprime nella forma:

$$d^3p = p^2 dp d\cos\gamma d\phi = 2\pi p^2 dp d\cos\gamma \quad (\text{B.2})$$

avendo indicato con γ l'angolo tra l'impulso del nucleo p e l'impulso trasferito q .

Utilizzando la cinematica possiamo ricavare il $\cos \gamma$ in funzione delle altre grandezze:

$$\cos \gamma = \frac{s + M_{A-1}^2 - W^2 - 2(\nu + M_A)E_{A-1}}{2|\vec{p}||\vec{q}|} \quad (\text{B.3})$$

dove W^2 é la massa invariante dello stato adronico prodotto e le altre grandezze introdotte sono:

$$\begin{aligned} M_{A-1} &= M_A - m_N + E \\ s &= (p + q)^2 \\ E_{A-1}^2 &= M_{A-1}^2 + |\vec{p}|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Imponendo che $-1 \leq \cos \gamma \leq 1$ otteniamo i limiti di integrazione per $|\vec{p}|$:

$$|\vec{p}|^\pm = \left| \frac{\Lambda |\vec{q}| \pm (\nu + M_A) \sqrt{\Lambda^2 - 4sM_{A-1}^2}}{2s} \right| \quad (\text{B.5})$$

con $\Lambda = s + M_{A-1}^2 - W^2$.

Nella (B.5) compare radice della grandezza $\Lambda^2 - 4sM_{A-1}^2$ da cui ricaviamo gli estremi di integrazione in energia della (B.1):

$$E_{max} = \sqrt{s} - M_A - (W - m_N) \quad (\text{B.6})$$

Bibliografia

- [1] N. Agafonova *et al* (OPERA Collaboration) arXiv:1006.1623v1.
- [2] F. Mandl e G. Shaw *Quantum Field Theory* (John Wiley & Sons Inc, 1984).
- [3] S.L. Glashow, Nucl. phys **22**, 576 (1961).
- [4] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett **19** 1264 (1961).
- [5] A. Salam, Proc. fo the 8th Nobel Symposium on *Elementary particle theory, relativistic groups and analyticity*, Stockolm, Sweded (N. Svartholm 1968).
- [6] E. Majorana, Nuovo Cimento **14**,171 (1937).
- [7] T. Yanagida, Proc. of Workshop on Unified Theory and the Baryon Number of the Universe, KEK, Japan (1979).
- [8] M. Gell-Mann, P. Ramond & R. Slansky, *Supergravity* (F. van Nieuwenhuizen & D. Freedman, Amsterdam, 1979).
- [9] R.N. Mohapatra & G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. **44**, 912 (1980).
- [10] K. Eguchi *et al* (KamLAND Collaboration), Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003).
- [11] A. Aguilar *et al*, Phys. Rev. D **64**, 112001 (2001).
- [12] A.A. Aguilar-Arevalo *et al* (MiniBooNE Collaboration), arXiv:0806.4201.

-
- [13] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **17**, 48 (1935).
- [14] Heisenberg, W. Zeit. Phys. **77**, 1 (1932).
- [15] E. Feenberg *Theory of Quantum Liquids* (Academic, New York, 1969).
- [16] S. Fantoni & V. R. Pandharipande, Phys. Rev. C **37** 1697 (1988).
- [17] J.S. O'Connell *et al*, PRC **35**, 1063 (1987).
- [18] O. Benhar, D. Day & I. Sick, Rev. Mod. Phys **80**, 189 (2008).
- [19] J. Carlson & R. Schiavilla, Rev. Mod. Phys. **70**, 743(1998).
- [20] O. Benhar, N. Farina, H Nakamura, M. Sakuda & R.Seki Phys. Rev. D **72** 053005 (2005).
- [21] O. Benhar & D. Meloni, Nucl. Phys. A **789**, 379 (2009).
- [22] O. Benhar, A. Fabrocini, S. Fantoni, & I. Sick, Nucl. Phys. A **579**, 493 (1994).
- [23] A.A. Aguilar-Arevalo *et al* (MiniBooNE Collaboration), arXiv:1002.2680, Phys. Rev. D, in press.
- [24] A.A. Aguilar Arevalo *et al* (MiniBooNE Collaboration), Phys. Rev. Lett. **100**, 032301 (2008).
- [25] A. V. Butkevich, arXiv:1006.1595v1 [nucl-th].
- [26] Proceedings of the *Sixth International Workshop on Neutrino-Nucleus Interactions in the Few-GeV Region (NUINT-09)*. Eds. F. Sanchez, M. Sorel & L. Alvarez-Ruso. AIP Conference Proceedings, Vol 1189 (2010).