



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Interazioni dei Leptoni con i Nucleoni e i Nuclei

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Candidato

Francesco Coppini
Matricola 1424253

Relatore

Prof. Omar Benhar Noccioli

Anno Accademico 2016/2017

Tesi non ancora discussa

Interazioni dei Leptoni con i Nucleoni e i Nuclei

Tesi di Laurea Magistrale. Sapienza – Università di Roma

© 2017 Francesco Coppini. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con \LaTeX e la classe Sapthesis.

Email dell'autore: francescocoppini@libero.it

Indice

Introduzione	1
1 Cenni sulle Oscillazioni dei Neutrini	5
1.1 Mescolamento dei Neutrini	5
1.2 Determinazione Sperimentale delle Oscillazioni	6
2 Diffusione Leptone-Nucleo	9
2.1 Sezione d'urto elettrone-nucleone	10
2.2 Sezioni d'urto d'elicità	13
2.3 Diffusione Elettrone-Nucleo in Approssimazione Impulsiva	15
2.4 Funzione spettrale nucleare	21
3 Diffusione Inelastica Leptone-Nucleone	25
3.1 Produzione di Risonanze	26
3.2 Diffusione Profondamente Inelastica	31
3.3 Parametrizzazione delle Funzioni di Struttura dei Nucleoni	32
3.4 Parametrizzazione di Bodek & Ritchie	33
3.4.1 Componente risonante: A^R	33
3.4.2 Componente non risonante: A^{NR}	34
3.5 Parametrizzazione di Bosted & Christy	35
3.5.1 Componente risonante: σ^R	35
3.5.2 Componente non risonante: σ^{NR}	37
3.6 Confronto con i dati sperimentali	38
4 Funzioni di Struttura del Neutrone	43
Conclusioni e Prospettive	51
A Calcolo del tensore adronico per nucleoni in moto	53
B Calcolo del prodotto $L_{\mu\nu}\tilde{w}_N^{\mu\nu}$	57
Bibliografia	61

Introduzione

Nel corso degli ultimi due decenni, moltissimi studi—stimolati in gran parte dall'avvio, nel 2002, della serie di Workshop NUINT (Neutrino-Nucleus Interactions in the Few GeV Region) [1]—sono stati dedicati allo sviluppo di modelli teorici accurati per la descrizione delle interazioni neutrino-nucleo a energie comprese tra qualche centinaio di MeV e qualche GeV. La motivazione principale di questo sforzo sta nel fatto che la conoscenza delle sezioni d'urto di questi processi è indispensabile per l'interpretazione dei segnali rivelati dagli esperimenti che utilizzano fasci prodotti da acceleratori per osservare le oscillazioni dei neutrini.

I neutrini si possono osservare solo indirettamente, attraverso le interazioni tra le particelle cariche prodotte nelle interazioni deboli e il materiale del rivelatore. Poichè le sezioni d'urto in gioco sono molto piccole¹, per accumulare un numero statisticamente significativo di eventi è necessario utilizzare come rivelatori grandi masse di elementi abbastanza pesanti, come l'ossigeno e il carbonio. Il prezzo da pagare è che, anche assumendo di disporre di un modello sufficientemente accurato dell'interazione elementare neutrino-nucleone, la descrizione quantitativa delle interazioni con questi nuclei presenta notevoli difficoltà, dovute alla complessità della loro struttura e, più in generale, della dinamica delle interazioni forti.

La risposta nucleare alle interazioni con i neutrini dipende in modo non banale da due variabili cinematiche, che nel sistema di riferimento in cui il nucleo bersaglio è in quiete si possono identificare con l'impulso e l'energia trasferiti, che denoteremo, rispettivamente, \mathbf{q} e ω . A valori diversi di queste due variabili corrispondono meccanismi di reazione diversi, che riflettono i possibili modi di eccitazione, sia del nucleo che dei nucleoni che lo costituiscono.

Nella regione cinematica corrispondente a $|\mathbf{q}| \gtrsim \pi/d$, dove $d \approx 1.5$ fm è la distanza media tra due nucleoni nel nucleo bersaglio, le interazioni coinvolgono per lo più un singolo nucleone e, al variare dell'energia trasferita, possono produrre stati finali adronici diversi. A $\omega \approx \omega_{QE} = Q^2/2m$, dove $Q^2 = \mathbf{q}^2 - \omega^2$ e m è la massa del nucleone, il meccanismo di reazione dominante è la diffusione quasi elastica, in cui il nucleone rimane nel suo stato fondamentale e non vengono prodotti pioni. A $\omega > \omega_{QE}$, la struttura interna del nucleone si manifesta attraverso l'eccitazione di risonanze—la più pronunciata delle quali è la Δ , con massa $m_\Delta = 1232$ MeV—e lo scattering profondamente inelastico, cioè la disintegrazione del nucleone seguita dall'adronizzazione dei frammenti prodotti. Dal punto di vista sperimentale, gli stati

¹La sezione d'urto del decadimento β inverso, stimata da Bethe e Pierls nel 1934 [2], è dell'ordine di 10^{-44} cm², cioè circa venti ordini di grandezza più piccola delle sezioni d'urto tipiche dei processi di diffusione protone-neutrone.

finali corrispondenti all'eccitazione di risonanze ed alla diffusione profondamente inelastica sono caratterizzati, rispettivamente, dalla presenza di uno o più pioni.

Negli esperimenti che utilizzano acceleratori, i neutrini vengono prodotti dal decadimento in volo di pioni ottenuti dalle collisioni tra il fascio primario e un bersaglio, e la loro energia varia secondo una distribuzione generalmente molto larga. Di conseguenza, la determinazione dell'energia trasferita in un evento, che a sua volta determina il meccanismo di reazione dominante, è impossibile.

L'incertezza legata all'energia dei neutrini è uno dei problemi principali nell'interpretazione dei segnali osservati dagli esperimenti. Per poterlo superare sarebbe necessario disporre di un modello teorico in grado di descrivere tutti i meccanismi di reazione attivi nell'intervallo di energia rilevante in modo *consistente* e *accurato*. Sfortunatamente, un tale modello non è ancora disponibile, e i generatori di eventi utilizzati per l'analisi dei dati si basano nella maggior parte dei casi su descrizioni semplificate e incomplete del processo di diffusione neutrino-nucleo.

I limiti dei modelli impiegati si sono manifestati chiaramente nei risultati dell'analisi della sezione d'urto neutrino-carbonio nel canale quasi elastico, misurata dalla collaborazione MiniBooNE [3, 4], i cui valori sono sistematicamente molto maggiori di quelli predetti dalle simulazioni.

Nei modelli più realistici sviluppati recentemente, la descrizione delle sezioni d'urto di diffusione neutrino-nucleo a momento trasferito sufficientemente elevato è basata su due elementi: la funzione spettrale nucleare, che contiene le informazioni sulla distribuzione in energia e impulso dei nucleoni all'interno del nucleo bersaglio, e la sezione d'urto del processo elementare neutrino-nucleone [5]. La validità di questo schema è stata confermata da un gran numero di studi delle sezioni d'urto elettrone-nucleo nel settore quasi elastico [6], nel quale l'interazione elementare è espressa in termini dei fattori di forma elettromagnetici di protone e neutrone, misurati con grande precisione usando come bersagli idrogeno e deuterio.

La disponibilità di una grande quantità di sezioni d'urto elettrone-nucleo, misurate in regimi cinematici diversi e usando una varietà di bersagli, gioca un ruolo fondamentale per stabilire la capacità dei modelli proposti di descrivere i meccanismi di reazione rilevanti. Ovviamente, poichè la corrente elettromagnetica del nucleone è strettamente legata alla parte vettoriale della corrente debole, qualsiasi modello della sezione d'urto neutrino-nucleo deve anche essere in grado di descrivere la sezione d'urto elettrone-nucleo.

Come primo passo verso la descrizione delle interazioni neutrino-nucleo nei canali inelastici, in questa Tesi abbiamo affrontato lo studio dell'interazione elementare elettrone-nucleone, effettuato utilizzando le informazioni fornite dalle sezioni d'urto misurate alla Thomas Jefferson National Accelerator Facility (Newport News, Virginia, USA) [7].

La Tesi è strutturata come segue.

- Il Capitolo 1 ha lo scopo di chiarire la motivazione ultima del nostro lavoro. Vengono richiamate le nozioni essenziali sulle oscillazioni dei neutrini, mettendo l'accento sull'importanza della ricostruzione dell'energia del neutrino per la determinazione sperimentale dei parametri di oscillazione.

- Nel Capitolo 2, dopo una parte introduttiva sulle interazioni leptone-nucleone e leptone-nucleo, viene descritta in dettaglio la derivazione della sezione d'urto nucleare nel regime cinematico nel quale è applicabile l'approssimazione impulsiva.
- Il Capitolo 3 contiene una discussione dei processi inelastici—cioè produzione di risonanze e diffusione profondamente inelastica—nelle interazioni leptone-nucleo, e delle parametrizzazioni delle corrispondenti funzioni di struttura elettromagnetiche disponibili in letteratura.
- Nel Capitolo 4 vengono presentati i risultati originali del lavoro di Tesi, che ha permesso di ottenere parametrizzazioni indipendenti delle funzioni di struttura inelastiche del protone e del neutrone, applicabili anche nella regione di basso Q^2 . Utilizzando questi risultati sarà possibile ottenere le sezioni d'urto nucleari nel formalismo dell'approssimazione impulsiva.
- Nelle Conclusioni, i risultati ottenuti vengono riassunti, e discussi in vista delle applicazioni future al calcolo delle sezioni d'urto neutrino-nucleo.

Nella Tesi adotteremo sempre il sistema naturale di unità di misura, nel quale $\hbar = c = 1$.

Capitolo 1

Cenni sulle Oscillazioni dei Neutrini

1.1 Mescolamento dei Neutrini

Secondo il Modello Standard delle interazioni elettrodeboli, i neutrini esistono in tre diversi *sapori*, e hanno tutti massa nulla. Oltre al neutrino elettronico scoperto da Reines e Cowan nel 1956 [8]—la cui esistenza era stata ipotizzata da Wolfgang Pauli nel 1930 per spiegare lo spettro energetico degli elettroni emessi nel decadimento β del nucleo ^{210}Bi [9]—sono stati osservati neutrini emessi o assorbiti insieme agli altri due leptoni carichi, il muone ed il tau [10, 11]. I neutrini elettronici, muonici e tauonici, ν_e , ν_μ e ν_τ , partecipano a reazioni in cui compaiono esclusivamente i leptoni carichi corrispondenti. Quindi, nel Modello Standard il numero leptonico associato a ciascun sapore è una grandezza conservata.

I risultati di un gran numero di esperimenti effettuati negli ultimi venti anni, hanno dimostrato in modo inequivocabile che la massa del neutrino è in realtà diversa da zero, anche se molto minore del valore—dell'ordine di grandezza della massa dell'elettrone—ipotizzato da Pauli nella sua famosa lettera del 1930 indirizzata a Lise Meitner e ai suoi colleghi, che inizia con le parole “Care Signore e Signori Radioattivi” [9].

Se tutti i neutrini avessero massa nulla, gli stati di diverso sapore sarebbero degeneri. Quindi, come prescrive la Meccanica Quantistica, esisterebbe una base in cui l'hamiltoniana ed i numeri leptonici potrebbero essere diagonalizzati simultaneamente. In presenza di una massa diversa da zero, invece, gli stati che descrivono i neutrini di sapore assegnato differiscono dagli autostati della matrice di massa e si verifica il fenomeno, tipicamente quantistico, del mescolamento. A sua volta, il mescolamento è all'origine delle oscillazioni dei neutrini, ipotizzate per primo da Bruno Pontecorvo già nel 1957 [12], poco dopo la scoperta di Reines e Cowan.

Supponendo che un'interazione debole abbia dato luogo all'emissione di un neutrino di sapore α , il suo stato sarà descritto da una combinazione degli autostati di massa ν_k ($k = 1, 2, 3$) secondo la

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha,k}^* |\nu_k\rangle,$$

dove U è la matrice unitaria che introduce il mescolamento. Al momento in cui viene rivelato, il neutrino si troverà ancora in un autostato di sapore, che chiameremo β ,

ma poichè durante la propagazione dalla sorgente al rivelatore le fasi delle componenti della funzione d'onda che corrispondono ai diversi autostati della massa evolvono nel tempo in maniera diversa, esiste una probabilità finita che il neutrino rivelato sia in uno stato di sapore diverso da quello del neutrino emesso, cioè che si verifichi il caso $\beta \neq \alpha$. Ad esempio, un neutrino elettronico, dopo aver percorso una distanza sufficientemente lunga, potrà essere osservato come neutrino muonico.

Nel caso semplice di due sapori la matrice U dipende da un solo parametro reale, l'angolo di mescolamento θ , e la relazione tra gli autostati del sapore e quelli della massa è

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha\rangle &= \cos\theta|\nu_1\rangle - \sin\theta|\nu_2\rangle \\ |\nu_\beta\rangle &= \sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle . \end{aligned} \quad (1.1)$$

La probabilità che un neutrino prodotto in uno stato α con energia E_ν venga osservato nello stato β dopo aver percorso la distanza L si può scrivere nella forma

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(1.267 \Delta m^2 \frac{L}{E_\nu} \right) , \quad (1.2)$$

dove $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$, e le m_i , E_ν e L sono espresse, rispettivamente, in eV, GeV e km. Si noti che θ e Δm^2 sono le proprietà intrinseche dei neutrini che si vogliono determinare con la misura, mentre E_ν ed L sono grandezze caratteristiche dell'apparato sperimentale. L'espressione di $P(\alpha \rightarrow \beta)$ mostra chiaramente che se i neutrini oscillano le loro masse sono diverse da zero, e viceversa.

Nel caso di tre sapori la descrizione della probabilità di oscillazione è analoga, ma più complessa. I parametri da determinare sono tre angoli di mescolamento, tre differenze tra i quadrati delle masse ed una fase.

I neutrini interagiscono con la materia del rivelatore mediante correnti cariche o neutre, trasferendo al bersaglio energia e impulso. Nell'interazione di corrente carica, che avviene tramite lo scambio di un bosone W^\pm , il neutrino viene assorbito dalla particella di materia con cui interagisce—un neutrone legato all'interno di un nucleo atomico—e viene emesso il leptone carico associato. Generalmente, il leptone carico presente nello stato finale è l'unica particella che viene rivelata. Nell'interazione di corrente neutra, che avviene tramite lo scambio di un bosone Z^0 , il neutrino è presente anche nello stato finale. In questo caso, è possibile rivelare solo il rinculo del nucleo bersaglio o i prodotti della sua disintegrazione.

Le interazioni di corrente carica sono più semplici da osservare, perchè elettroni e muoni lasciano tracce facilmente visibili nei rivelatori. Inoltre, in linea di principio, la rivelazione del leptone carico prodotto permette di ricostruire l'energia del neutrino incidente. L'importanza di questa informazione verrà discussa nella sezione che segue.

1.2 Determinazione Sperimentale delle Oscillazioni

Le oscillazioni dei neutrini possono essere rivelate osservando, a distanza L dalla sorgente, una diminuzione del numero di neutrini di un determinato sapore (esperimenti di “scomparsa”, o *disappearance*), oppure la presenza di neutrini di sapore diverso da quello del fascio originario (esperimenti di “comparsa”, o *appearance*).

Molti esperimenti effettuati in modalità *disappearance* utilizzano due rivelatori posti a distanza diversa dalla sorgente: uno vicino (*near detector*), che permette di effettuare misure usando il fascio originario, ed uno lontano (*far detector*), col quale le misure vengono ripetute dopo che i neutrini hanno percorso la distanza L . I parametri di oscillazione—cioè θ e Δm^2 in Eq.(1.2)—vengono determinati analizzando la dipendenza dall'energia della probabilità di oscillazione, che si ottiene facendo il rapporto tra il numero di eventi rivelati, rispettivamente, con il *far* e il *near* detector. Il risultato ottenuto dalla Collaborazione T2K [13] applicando questa tecnica è riportato nella Fig. 1.1, che illustra la relazione tra il segnale misurato ed i parametri che caratterizzano l'oscillazione.

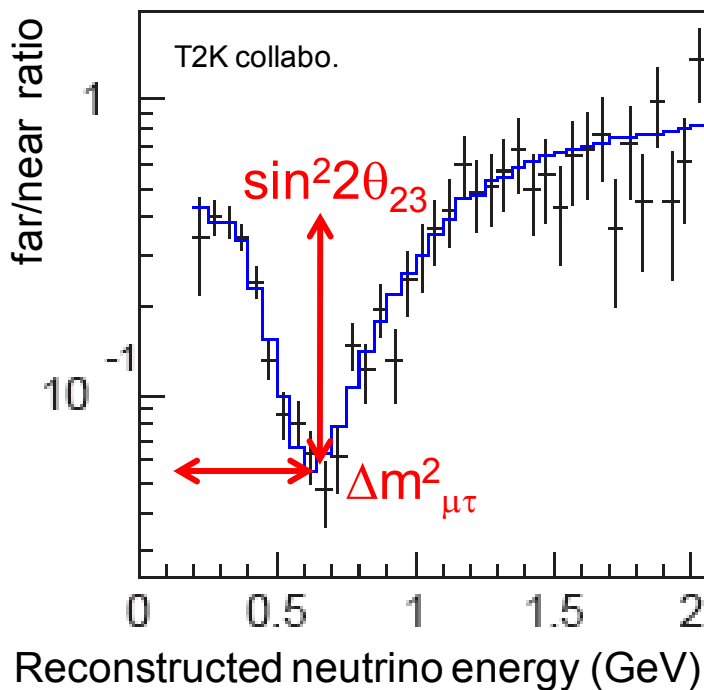


Figura 1.1. Andamento della probabilità di oscillazione osservata dalla Collaborazione T2K in funzione dell'energia del neutrino, ricostruita analizzando le particelle prodotte nell'interazione con il nucleo bersaglio.

Bisogna però ricordare che i neutrini non vengono prodotti in fasci di energia ben precisa. Ciò che si conosce è soltanto il flusso, cioè la distribuzione in energia delle particelle prodotte. A titolo di esempio, la Fig.1.2 mostra il flusso associato al fascio di neutrino utilizzato nell'esperimento MiniBooNE [14].

L'energia del neutrino viene generalmente ricostruita a partire dalle variabili cinematiche—energia e angolo di emissione—delle particelle cariche osservate, che vengono prodotte nell'interazione tra il neutrino e un neutrone del nucleo bersaglio.

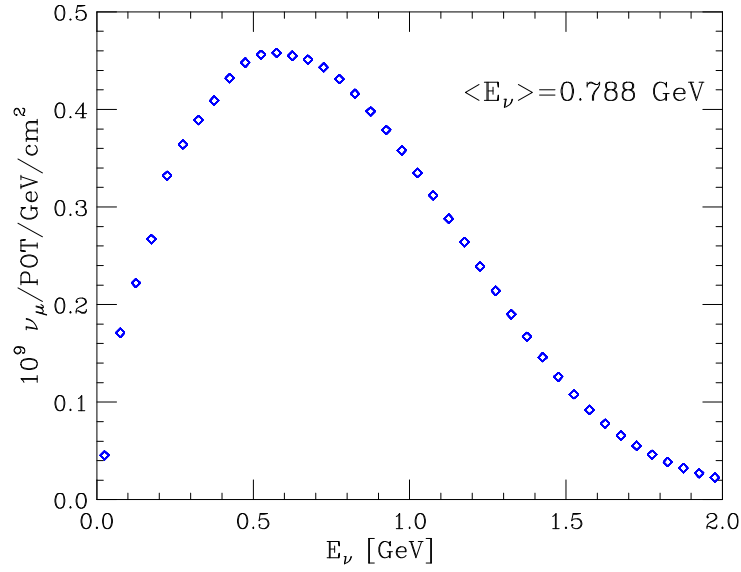


Figura 1.2. Dipendenza dall'energia del flusso di neutrini utilizzato dall'esperimento MiniBooNE [14].

La sua determinazione accurata richiede perciò, in primo luogo, una buona conoscenza di tutti i canali accessibili tramite la reazione elementare neutrino-neutrone. Inoltre, è di fondamentale importanza tenere conto del fatto che il neutrone che interagisce con il neutrino non si comporta come una particella libera in quiete, e che la presenza del mezzo nucleare gioca un ruolo importante. La distribuzione in energia e impulso dei nucleoni nel nucleo bersaglio, descritta dalla funzione spettrale che discuteremo nel capitolo seguente, è il secondo elemento necessario per lo sviluppo di un modello realistico dell'interazione neutrino-nucleo, indispensabile per la ricostruzione dell'energia della particella incidente.

Capitolo 2

Diffusione Leptone-Nucleo

La sezione d'urto è la grandezza fondamentale che si utilizza per descrivere i processi di scattering come quelli tra leptoni carichi e nucleoni o nuclei, che abbiamo studiato. Iniziamo questo capitolo con lo scrivere l'espressione della sezione d'urto tra elettroni e nucleoni indicando la componente adronica nella sua forma più generale compatibile con l'invarianza di Lorentz e con la conservazione della corrente. Negli esperimenti che abbiamo analizzato l'unica particella rilevata nello stato finale è l'elettrone diffuso. Di conseguenza, siamo interessati a calcolare la sezione d'urto inclusiva a energia del fascio incidente fissata, in funzione dell'energia dell'elettrone uscente ε' e dell'angolo θ tra la sua direzione e quella del fascio entrante.

Nella Sezione 2.1, deriveremo dapprima l'espressione della sezione d'urto elettrone-nucleo nel sistema di riposo del bersaglio. Discuteremo quindi la generalizzazione al caso in cui il nucleone è in moto, che risulterà utile per essere confrontata con la sezione d'urto nucleare. Per la definizione delle variabili cinematiche faremo riferimento al diagramma della Fig. 2.1

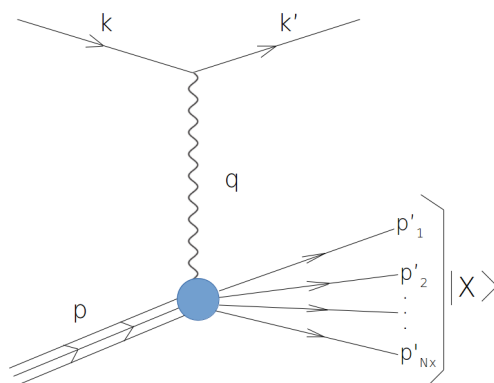


Figura 2.1. Rappresentazione schematica dell'interazione elettrone-nucleone

2.1 Sezione d'urto elettrone-nucleone

In approssimazione di Born la sezione d'urto elettrone-nucleone si può scrivere nella forma

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{q^4} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) L_{\mu\nu} W_N^{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

dove abbiamo indicato con $\alpha = e^2/(4\pi)$ la costante di struttura fine, ε è l'energia dell'elettrone entrante e q è il quadrimpulso trasferito dal fotone virtuale. I tensori leptonic ed adronico, rispettivamente $L_{\mu\nu}$ e $W_N^{\mu\nu}$, sono definiti come

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \langle k', \sigma' | J_\mu | k, \sigma \rangle \langle k, \sigma | J_\nu | k', \sigma' \rangle \\ &= 2 \left(k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - g_{\mu\nu} (k'k) \right) , \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove k e k' sono i quadrimpulsi dell'elettrone entrante e uscente, σ e σ' le relative polarizzazioni, e

$$\begin{aligned} W_N^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi m} \sum_\chi \int \prod_{i=1}^{N_\chi} \left(\frac{d^3 p'_i}{2E'_i (2\pi)^3} \right) \langle P | J_N^\mu | \chi \rangle \langle \chi | J_N^\nu | P \rangle \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4 \left(P + q - \sum_i^{N_\chi} p'_i \right) , \end{aligned} \quad (2.3)$$

indicando con m la massa del nucleone, con $|P\rangle$ lo stato iniziale del nucleone, dove $P = (m, \underline{0})$ indica il suo quadrimpulso in questo caso di riposo. La produttoria N_χ corre su tutti gli stati finali $|\chi\rangle$ accessibili. Abbiamo soppresso gli indici di spin per non appesantire eccessivamente la notazione. L'espressione più generale del tensore adronico compatibile con l'invarianza di Lorentz e con la conservazione della carica si può scrivere nella forma

$$W_N^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2}{m^2} \left(P^\mu - \frac{(Pq)}{q^2} q^\mu \right) \left(P^\nu - \frac{(Pq)}{q^2} q^\nu \right) . \quad (2.4)$$

Contraendo il tensore adronico $W_N^{\mu\nu}$ con quello leptonic $L_{\mu\nu}$ otteniamo

$$L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = 2 \left\{ 2W_1 (k'k) + \frac{W_2}{m^2} \left[2(pk)(pk') - m^2(k'k) \right] \right\} . \quad (2.5)$$

Nel sistema di quiete del nucleone iniziale ed in cui l'elettrone uscente forma un angolo θ con la direzione del fascio incidente possiamo scrivere la contrazione dei tensori come

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} &= 2 \left[4W_1 \varepsilon\varepsilon' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{W_2}{m^2} \left(2m^2\varepsilon\varepsilon' - 2m^2\varepsilon\varepsilon' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \\ &= 4\varepsilon\varepsilon' \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(2W_1 \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + W_2 \right) . \end{aligned}$$

Andando quindi a sostituire questo risultato nella formula della sezione d'urto, Eq. (2.1), otteniamo

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left(2W_1 \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + W_2 \right) , \quad (2.6)$$

dove abbiamo utilizzato la definizione della sezione d'urto di Mott

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{2E^2 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} .$$

Per quanto riguarda invece l'espressione della sezione d'urto per il processo in cui il nucleone ha un impulso $\mathbf{P} \neq 0$ dobbiamo tenere conto del diverso sistema di riferimento nello sviluppare l'espressione (2.5) e inserire il corretto fattore di flusso F nella (2.1)

$$F = 4\sqrt{(Pk)^2 - m_e m} = 4\sqrt{(P_0\mathbf{k} - \varepsilon\mathbf{P})^2 - (\mathbf{P} \wedge \mathbf{k})^2} . \quad (2.7)$$

Nella (2.7), P_0 è l'energia del nucleone nello stato iniziale e la massa dell'elettrone m_e viene trascurata. Possiamo scrivere l'espressione (2.5) nella seguente maniera (valida in generale)

$$L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = 2 \left\{ 4W_1 \varepsilon\varepsilon' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{W_2}{m^2} \left[(Pk)(Pk') - 2P^2\varepsilon\varepsilon' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} , \quad (2.8)$$

dove θ è ancora l'angolo compreso tra la direzione dell'elettrone entrante e quello uscente. Possiamo inoltre sviluppare il prodotto $(Pk)(Pk')$ come

$$(Pk)(Pk') = \varepsilon\varepsilon' \left\{ P_0^2 - P_0 \left[\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{P})}{\varepsilon} + \frac{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{P})}{\varepsilon'} \right] + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{P})(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{P})}{\varepsilon\varepsilon'} \right\} .$$

Scegliamo, senza perdita di generalità, il sistema di riferimento tale che i vettori \mathbf{k} e \mathbf{k}' giacciono sul piano xz in maniera tale che la loro differenza $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ abbia la sola componente q_z non nulla ($q_x = q_y = 0$), come indicato nella figura 2.2.

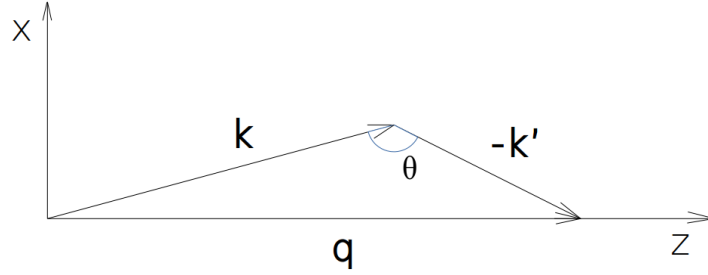


Figura 2.2. Rappresentazione schematica degli impulsi dell'elettrone

Utilizzando i calcoli svolti in appendice A, che riportano le formule esplicite per i prodotti scalari in questo sistema di riferimento, possiamo esprimere il secondo membro della (2.8) nella forma

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = & 2 \left\{ 4W_1 \varepsilon\varepsilon' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2 \frac{W_2}{m^2} \varepsilon\varepsilon' \left[P_0^2 - 2P_0P_z \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \right. \right. \\ & + P_x^2 \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + P_z^2 \frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - P_z^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - P^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \\ & \left. \left. + \frac{P_x \sin(\theta)}{|\mathbf{q}|} (\varepsilon + \varepsilon') + \frac{P_x P_z}{2|\mathbf{q}|^2} \sin(2\theta) (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se riordiniamo i termini in $\sin^2(\theta/2)$ e $\cos^2(\theta/2)$ possiamo scrivere la precedente Eq. (2.9) nella forma

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = & 4\varepsilon\varepsilon' \left\{ W_1 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{W_2}{m^2} \left[\left(P_0^2 - P^2 - P_z^2 \right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \right. \right. \\
& + \left. \left(P_0^2 - 2P_0P_z \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} - P_x^2 \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} + P_z^2 \frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2} \right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{P_x \sin(\theta)}{|\mathbf{q}|} (\varepsilon + \varepsilon') + \frac{P_x P_z}{2|\mathbf{q}|^2} \sin(2\theta) (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \right] \right\}. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Possiamo ora sostituire il momento trasverso $P_x^2 + P_y^2$ con l'equivalente $|\mathbf{P} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2$ e indicare il quadrato di binomio nella seconda riga di (2.10). Troviamo così

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = & 4\varepsilon\varepsilon' \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ 2 \left(W_1 + \frac{W_2}{2m^2} |\mathbf{P} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2 \right) \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \right. \\
& + \frac{W_2}{m^2} \left[\frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4} \left(P_0 - \omega \frac{(Pq)}{q^2} \right)^2 - \frac{q^2}{2|\mathbf{q}|^2} |\mathbf{P} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2 + \right. \\
& \left. \left. + \frac{P_x \sin(\theta)}{|\mathbf{q}| \sin^2(\theta/2)} (\varepsilon + \varepsilon') + \frac{P_x P_z}{2|\mathbf{q}|^2} \frac{\sin(2\theta)}{\sin^2(\theta/2)} (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \right] \right\}. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

In definitiva otteniamo l'espressione della sezione d'urto in questo sistema di riferimento in cui il nucleone è in moto

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = & \frac{1}{F} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left\{ 2 \left(W_1 + \frac{W_2}{2m^2} |\mathbf{P} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2 \right) \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \right. \\
& + \frac{W_2}{m^2} \left[\frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4} \left(P_0 - \omega \frac{(Pq)}{q^2} \right)^2 - \frac{q^2}{2|\mathbf{q}|^2} |\mathbf{P} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2 + \right. \\
& \left. \left. + \frac{P_x \sin(\theta)}{|\mathbf{q}| \sin^2(\theta/2)} (\varepsilon + \varepsilon') + \frac{P_x P_z}{2|\mathbf{q}|^2} \frac{\sin(2\theta)}{\sin^2(\theta/2)} (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \right] \right\},
\end{aligned}$$

con il fattore di flusso F specificato in Eq. (2.7).

2.2 Sezioni d'urto d'elicità

Mostriamo in questo paragrafo la relazione che intercorre tra le funzioni di struttura W_1 e W_2 che compaiono in (2.6) e le sezioni d'urto per fotoni virtuali γ^* di polarizzazione longitudinale (σ_L) e trasversa (σ_T). Sia ϵ il vettore di polarizzazione del fotone virtuale che deve soddisfare la relazione di ortogonalità $\epsilon_i^\mu q_\mu = 0$ (nello spazio di Minkowski) con il vettore q_μ . Trattandosi di un fotone virtuale i vettori di

polarizzazione ϵ_i^μ soddisfano le relazioni

$$(\epsilon_L \cdot \epsilon^*_L) = -1 ,$$

$$(\epsilon_R \cdot \epsilon^*_R) = -1 ,$$

$$(\epsilon_S \cdot \epsilon_S) = 1 ,$$

e naturalmente sono mutuamente ortogonali¹. Una costruzione esplicita dei vettori ϵ_i^μ , nel caso particolare di 3-impulso \mathbf{q} del fotone γ^* disposto nel verso positivo dell'asse z , verrà data nella Sezione 3.1.

Le sezioni d'urto di elicità sono definite come

$$\sigma_i = \frac{4\pi\alpha}{K} \epsilon_i^{*\mu} \epsilon_i^\nu W_{\mu\nu} , \quad (2.12)$$

dove indichiamo con K il fattore di flusso del fotone virtuale, che nella convenzione di Hand può essere scritto come

$$K = \omega + \frac{q^2}{2m} . \quad (2.13)$$

Inserendo la forma generale del tensore adronico data dall'eq. (2.4) nella formula della sezione d'urto di elicità (2.12) si ottengono le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \frac{4\pi\alpha^2}{K} W_1 , \\ \sigma_L + \sigma_T &= \frac{4\pi\alpha^2}{K} \left(1 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right) W_2 . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si è indicato con $\sigma_T = (\sigma_L + \sigma_R)/2$ la media dei contributi corrispondenti alle polarizzazioni Left e Right.

Valgono naturalmente anche le relazioni inverse, che legano i fattori di forma alle sezioni d'urto:

¹Nel testo si usano le due convenzioni equivalenti $\epsilon_{R,L,S}$ ed anche $\epsilon_{\pm 1,0}$

$$W_1 = \frac{K}{4\pi\alpha^2} \sigma_T ,$$

$$W_2 = \frac{K}{4\pi\alpha^2} \left(\frac{Q^2}{\omega^2 + Q^2} \right) (\sigma_T + \sigma_L) .$$

Qui, come nel resto della tesi, si utilizza la definizione $Q^2 = -q^2$. Introducendo la funzione $R = \sigma_L/\sigma_T$ possiamo scrivere la relazione tra i fattori di forma W_1 e W_2 che utilizzeremo nel seguito

$$\frac{W_1(\omega, Q^2)}{W_2(\omega, Q^2)} = \frac{1}{1 + R} \left(1 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right) . \quad (2.15)$$

Riportiamo per finire l'espressione della sezione d'urto (2.6) scritta in termini delle sezioni d'urto di elicit 

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} = \Gamma \left[\sigma_T(W^2, Q^2) + \epsilon \sigma_L(W^2, Q^2) \right] , \quad (2.16)$$

dove i coefficienti Γ e ϵ sono definiti dalle

$$\Gamma = \frac{\alpha E'(W^2 - m^2)}{(2\pi)^2 Q^2 m E (1 - \epsilon)} ,$$

$$\epsilon = \left[1 + 2 \left(1 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right) \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{-1} .$$

2.3 Diffusione Elettrone-Nucleo in Approssimazione Impulsiva

Come abbiamo visto nella sezione precedente, il calcolo della sezione d'urto, in generale richiede la descrizione dello stato fondamentale del bersaglio, della corrente responsabile delle interazioni con le particelle incidenti e di tutti i possibili stati finali. Negli esperimenti che abbiamo analizzato, un fascio di elettroni (sonda) viene fatto collidere con da un bersaglio costituito da nuclei. In questo caso, la sezione d'urto si pu  ancora scrivere nella forma (2.1), sostituendo a $W_N^{\mu\nu}$ il tensore che descrive la risposta elettromagnetica del nucleo bersaglio

$$\begin{aligned}
W_A^{\mu\nu} = & \frac{1}{4\pi M_A} \sum_{\chi} \int \prod_{i=1}^{N_{\chi}} \left(\frac{d^3 p'_i}{2E'_i (2\pi)^3} \right) \langle 0 | J_A^{\mu\dagger} | \chi \rangle \langle \chi | J_A^{\nu} | 0 \rangle \\
& \times (2\pi)^4 \delta^4 \left(P_0 + q - \sum_i p'_i \right) .
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Nella (2.17), P_0 rappresenta il 4-impulso dell'nucleo nello stato iniziale $|0\rangle$ di riposo $P_0 = (M_A, 0)$, $q = (\omega, \mathbf{q})$ è il momento trasferito dal fotone e $|\chi\rangle$, E'_i e p'_i rispettivamente lo stato finale adronico e le energie e gli impulsi delle particelle che lo costituiscono. Le sommatorie sugli stati di polarizzazione non sono esplicitate, al fine di rendere più leggibile la formula.

Calcoli di $W_A^{\mu\nu}$ per momenti trasferiti non troppo alti, tipicamente $|\mathbf{q}| \lesssim 0.5$ GeV, possono essere effettuati nel formalismo della teoria a molti corpi nucleare, usando funzioni d'onda non relativistiche per descrivere gli stati iniziali e finali, ed espandendo l'operatore di corrente in potenze di $(|\mathbf{q}|/m)$. Per valori più elevati di \mathbf{q} , corrispondenti a energie incidenti maggiori di ~ 1 GeV, la descrizione degli stati finali $|\chi\rangle$ in termini di nucleoni non relativistici non è più possibile. Tuttavia, poiché la risoluzione spaziale dell'interazione, $\lambda \approx \pi/|\mathbf{q}|$, diminuisce al crescere del momento trasferito, per $\lambda \ll d$, dove $d \sim 1.5$ fm denota la distanza media tra due nucleoni nel nucleo bersaglio, è ragionevole assumere che l'interazione elettromagnetica coinvolga un solo nucleone. Questa è l'ipotesi alla base dell'approssimazione impulsiva (AI).

Nel regime cinematico nel quale l'approssimazione impulsiva è applicabile, la sezione d'urto nucleare si riduce alla somma incoerente di sezioni d'urto elementari elettrone-nucleone, come schematicamente illustrato dal diagramma della Fig. 2.3.

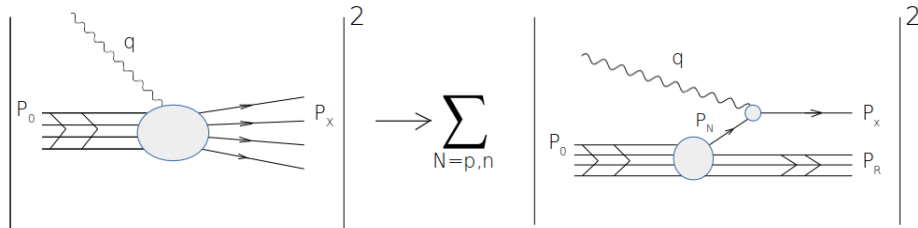


Figura 2.3. Rappresentazione schematica della sezione d'urto nucleare nella regione cinematica in cui è applicabile l'approssimazione impulsiva.

Ripartiamo dall'Eq. (2.17), e scriviamo lo stato finale come prodotto dello stato adronico prodotto al vertice d'interazione elettromagnetica, $|x\rangle$, e lo stato che descrive il nucleo residuo, $|R\rangle$. Troviamo

$$|\chi\rangle \approx |x, \mathbf{P}_x\rangle |R, \mathbf{P}_R\rangle \quad ,$$

dove \mathbf{P}_x è l'impulso totale dello stato $|x\rangle$. L'approssimazione impulsiva interviene modificando l'elemento di matrice $\langle 0|J_A^{\mu\dagger}|X\rangle$ in maniera che l'interazione avvenga ogni volta ed incoerentemente con un singolo nucleone. Si considera quindi una relazione di completezza per stati di singolo nucleone libero

$$\sum_{N=p,n} \int d^3P |N, \mathbf{P}_N\rangle \langle N, \mathbf{P}_N| = 1 \quad , \quad (2.18)$$

e si semplifica l'operatore di corrente J^μ come somma di correnti di singolo nucleone

$$J^\mu \approx \sum_i j_i^\mu \quad .$$

Dopo avere inserito la relazione di completezza (2.18) si può quindi scrivere l'elemento di matrice

$$\begin{aligned} \langle 0|J_A^{\mu\dagger}|X\rangle &= \left(\frac{m}{\sqrt{|\mathbf{P}_R|^2 + m^2}} \right)^{1/2} \langle 0|R, \mathbf{P}_R\rangle |N, -\mathbf{P}_R\rangle \\ &\quad \times \langle N, -\mathbf{P}_R|j_N^\mu|x, \mathbf{P}_x\rangle \quad , \end{aligned}$$

dove m è la massa del nucleone. Il fattore di normalizzazione covariante $\left(m/\sqrt{|\mathbf{P}_R|^2 + m^2} \right)^{1/2}$ viene messo in evidenza dall'elemento di matrice $\langle 0|R, \mathbf{P}_R\rangle |N, -\mathbf{P}_R\rangle$, poichè quest'ultimo si calcola in approssimazione non relativistica.

Possiamo quindi ricomporre il tensore del nucleo, introducendo le modifiche previste dall'approssimazione impulsiva, nella forma

$$\begin{aligned} W_A^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi M_A} \sum_{x,N,R} \int d^3P_R d^3P_N |\langle 0|R, \mathbf{P}_R\rangle |N, -\mathbf{P}_R\rangle|^2 \left(\frac{m}{\sqrt{|\mathbf{P}_R|^2 + m^2}} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \prod_{i \in x} \left(\frac{d^3p'_i}{2E'_i(2\pi)^3} \right) \langle N, -\mathbf{P}_R|j_N^\mu|x, \mathbf{P}_x\rangle \langle x, \mathbf{P}_x|j_N^\nu|N, -\mathbf{P}_R\rangle \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{P}_R - \mathbf{P}_x) \delta(\omega + E_0 + E_R - E_x) \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dove si è indicato con $E_0 = M_A$ l'energia iniziale (massa) del nucleo bersaglio, con E_R l'energia del nucleo residuo con A-1 nucleoni, e con E_x l'energia totale dello stato finale adronico prodotto al vertice d'interazione, il cui impulso totale è \mathbf{P}_x

A questo punto è opportuno spezzare la delta della conservazione dell'energia, nell'ultima riga di (2.19), in due funzioni delta introducendo l'integrazione su una variabile fittizia E :

$$\delta(\omega + E_0 + E_R - E_x) = \int dE \delta(E - m + E_0 - E_R) \delta(\omega - E_x - E + m) .$$

Si può modificare quindi l'espressione del tensore atomico mettendo in evidenza la funzione spettrale P_N definita come

$$P_N(\mathbf{P}, E) = \sum_R |\langle 0|R, -\mathbf{P}|N, \mathbf{P}\rangle|^2 \delta(E - m + E_0 - E_R) . \quad (2.20)$$

La funzione spettrale (2.20) indica la probabilità di estrarre dal nucleo un nucleone N ($N=p,n$) con impulso \mathbf{P} e di lasciare il sistema rimanente in uno stato eccitato con energia di eccitazione E . Se indichiamo esplicitamente la funzione spettrale nel tensore atomico possiamo scrivere

$$W_A^{\mu\nu} = \int d^3P dE P(\mathbf{P}, E) \left(\frac{m}{\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + m^2}} \right)^{1/2} [Z w_n^{\mu\nu} + (A - Z) w_p^{\mu\nu}] , \quad (2.21)$$

dove abbiamo indicato con $w_N^{\mu\nu}$ il tensore

$$w_N^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M_A} \sum_x \int \prod_{i \in x} \left(\frac{d^3 p'_i}{2E'_i (2\pi)^3} \right) \langle N, \mathbf{P} | j_N^\mu | x, \mathbf{P} + \mathbf{q} \rangle \langle x, \mathbf{P} + \mathbf{q} | j_N^\nu | N, \mathbf{P} \rangle \quad (2.22)$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{P}_R - \mathbf{P}_x) \delta(\omega - E_x - E + m) ,$$

con Z il numero di protoni. Si noti che abbiamo assunto che le funzioni spettrali per protone e neutrone siano uguali a parità di impulso ed energia $S_n = S_p = S(\mathbf{P}, E)$. Questa ipotesi è valida nel caso di nuclei isoscalari, con $Z = A/2$.

Prescrizione di De Forest. L'espressione del tensore atomico nell'approssimazione impulsiva scritta in (2.21) presenta alcuni problemi che la rendono ambigua senza ulteriori specificazioni: nel tensore $w_N^{\mu\nu}$ la particella entrante $|N, \mathbf{P}\rangle$ non è sul "mass-shell" perché la delta della conservazione dell'energia che compare in (2.22) non vincola l'energia del nucleone a essere quella di particella libera

Per ovviare a questa difficoltà si può utilizzare l'approssimazione di De Forest [15] che prevede di sostituire l'energia ω del fotone con

$$\tilde{\omega} = E_x - E_P ,$$

con E_x l'energia dello stato finale $|x\rangle$ e $E_P = \sqrt{|\mathbf{P}|^2 + m^2}$, in modo che

$$\tilde{\omega} = \omega + m - E - E_P \quad . \quad (2.23)$$

Introduciamo il nuovo 4-impulso del fotone $\tilde{q} = (\tilde{\omega}, \mathbf{q})$ e al posto della dipendenza da q del tensore adronico $w_N^{\mu\nu}(P, q)$ sostituiamo il 4-vettore \tilde{q} . Possiamo indicare il tensore $w^{\mu\nu}(P, \tilde{q})$ modificando l'espressione (2.4)

$$w^{\mu\nu}(P, \tilde{q}) = w_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu}{\tilde{q}^2} \right) + \frac{w_2}{m^2} \left(P^\mu - \frac{(P\tilde{q})}{\tilde{q}^2} \tilde{q}^\mu \right) \left(P^\nu - \frac{(P\tilde{q})}{\tilde{q}^2} \tilde{q}^\nu \right) \quad . \quad (2.24)$$

L'interpretazione della (2.23) è semplice: una parte dell'energia del fotone è impiegata per separare il nucleone dal nucleo e dunque l'energia effettivamente trasferita nell'interazione elettromagnetica, $\tilde{\omega}$, è minore di quella di partenza ω . Un parametro utile per indicare la "off-shellness" del tensore è la differenza $\omega - \tilde{\omega} = E + E_P - m$; se infatti il nucleone non fosse legato avrebbe lo stesso impulso del nucleo cioè zero e quindi la sua energia cinetica $E_P - m$ sarebbe nulla ed inoltre il sistema residuo di $A - 1$ nucleoni si verrebbe a trovare nello stato fondamentale con energia di eccitazione $E = 0$.

Sorge a questo punto il problema della conservazione della carica che non è più assicurata dalla forma del tensore (2.24). Sempre seguendo la prescrizione di De Forest [15] possiamo imporre a mano la conservazione della corrente definendo un nuovo tensore $\tilde{w}_N^{\mu\nu}$ che soddisfi la condizione

$$q_\mu \tilde{w}_N^{\mu\nu} = q^\nu \tilde{w}_{N\mu\nu} = 0 \quad . \quad (2.25)$$

La definizione data da (2.25) non è però univoca e la convenzione è quella di identificare le componenti temporali di $\tilde{w}_N^{\mu\nu}$ con quelle temporali $w_N^{\mu\nu}$ come da (2.24), mentre quelle longitudinali sono dedotte dalla (2.25). La cinematica è la stessa di quella indicata nella sezione precedente in cui si considera l'impulso trasferito dal fotone parallelo all'asse $\hat{\mathbf{z}}$: $q^\mu = (\omega, 0, 0, q)$.

La condizione (2.25) si traduce quindi nel tensore $\tilde{w}_N^{\mu\nu}$ di questa forma

$$\tilde{w}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \frac{\omega}{q} w_{00} \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \frac{\omega}{q} w_{10} \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \frac{\omega}{q} w_{20} \\ \frac{\omega}{q} w_{00} & \frac{\omega}{q} w_{01} & \frac{\omega}{q} w_{02} & \left(\frac{\omega}{q}\right)^2 w_{00} \end{pmatrix} \quad , \quad (2.26)$$

e le funzioni $w_{\mu\nu}$, come già specificato, sono date dalla Eq. (2.24).

Sezione d'urto. In conclusione, la sezione d'urto inclusiva per il processo leptone-nucleo si può scrivere nella forma

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} = \frac{\alpha^2 E'}{q^4 E} L^{\mu\nu} \int d^3P dE S(\mathbf{P}, E) \left(\frac{m}{\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + m^2}} \right)^{1/2} \left[Z w_n^{\mu\nu} + (A - Z) w_p^{\mu\nu} \right] , \quad (2.27)$$

con il tensore leptonic

$$L^{\mu\nu} = 2 (k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} (k'k)) .$$

Il calcolo esplicito del prodotto $L_{\mu\nu} \tilde{w}_N^{\mu\nu}$ è svolto in appendice B. Riportiamo qui il risultato:

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} \tilde{w}_{\mu\nu} = & \left(4EE' \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \left\{ \left[W_1 + \frac{W_2}{2m^2} |\mathbf{p} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2 \right] 2 \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right. \\ & \left. + W_1 \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} \left(\frac{q^2}{\tilde{q}^2} - 1 \right) + \frac{W_2}{m^2} \left[\frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(p\tilde{q})}{\tilde{q}^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} |\mathbf{p} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2 \right] \right\} . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Sostituendo la formula all'interno della sezione d'urto si ottiene

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left[2W_1^A \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + W_2^A \right] .$$

Dove abbiamo indicato implicita la formula per la sezione d'urto di Mott

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{2E^2 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} ,$$

ed i fattori di forma nucleari W_1^A e W_2^A si possono dedurre dalla (B.1)

$$W_1^A = \int d^3 P dE S(\mathbf{P}, E) \left(\frac{m}{\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + m^2}} \right)^{1/2} \left(W_1 + W_2 \frac{1}{2m^2} |\mathbf{P} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2 \right), \quad (2.29)$$

$$W_2^A = \int d^3 P dE S(\mathbf{P}, E) \left(\frac{m}{\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + m^2}} \right)^{1/2} \left\{ W_1 \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} \left(\frac{q^2}{\tilde{q}^2} - 1 \right) \right. \\ \left. + W_2 \frac{1}{m^2} \left[\frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(p\tilde{q})}{\tilde{q}^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} |\mathbf{P} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2 \right] \right\}, \quad (2.30)$$

dove abbiamo indicato con W_1 e W_2

$$W_1 = ZW_1^p + (A - Z)W_1^n, \quad (2.31)$$

$$W_2 = ZW_2^p + (A - Z)W_2^n. \quad (2.32)$$

2.4 Funzione spettrale nucleare

Consideriamo un sistema di A nucleoni la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana non relativistica

$$H_A = \sum_{i=1}^A \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{j>i=1}^A v_{ij} + \dots, \quad (2.33)$$

dove \mathbf{p}_i è il momento dell' i -esimo nucleone, v_{ij} è il potenziale NN e i puntini indicano la presenza di interazioni a tre corpi

A causa della complessità dello spettro energetico del sistema di $(A - 1)$ nucleoni, in generale il calcolo della funzione spettrale (2.20) nella NMBT presenta difficoltà proibitive. È stato effettuato solo per sistemi con $A = 3$ e 4 , e per la materia nucleare uniforme e isospin-simmetrica, cioè nel limite $A \rightarrow \infty$ con $Z=A/2$.

Modelli accurati della funzione spettrale di nuclei con $A > 4$ sono stati ottenuti usando l'approssimazione di densità locale (LDA). In questo approccio, $P_N(\mathbf{P}, E)$ è divisa in due parti, corrispondente a nucleoni di basso momento situati negli stati del modello a *shell*, e nucleoni ad alto momento, appartenenti a coppie fortemente correlate.

La funzione spettrale degli stati del modello a shell è stata misurata studiando i processi nei quali la diffusione di elettroni su nuclei provoca l'emissione di un nucleone, il cui impulso viene misurato in coincidenza con quello dell'elettrone diffuso. La componente dovuta alle correlazioni a corto raggio è invece calcolabile per la materia nucleare infinita a densità uniforme ρ , utilizzando la teoria a molti

corpi nucleare spettrale. Combinando i risultati di questi calcoli con le informazioni sperimentali si ottiene la funzione spettrale in tutto il range di valori di \mathbf{P} ed E .

La funzione spettrale del nucleo di ossigeno ottenuta usando la LDA è illustrata nella Fig. 2.4. Gli stati del modello a shell, i cui picchi sono chiaramente visibili, contribuiscono per $\sim 80\%$ della normalizzazione, mentre il restante $\sim 20\%$ è localizzato a grande impulso e grande energia di eccitazione. Va sottolineato che grande E e grande \mathbf{P} sono fortemente correlati. Per esempio, $\sim 50\%$ della normalizzazione a $|\mathbf{P}| = 320$ MeV è localizzato a $E > 80$ MeV.

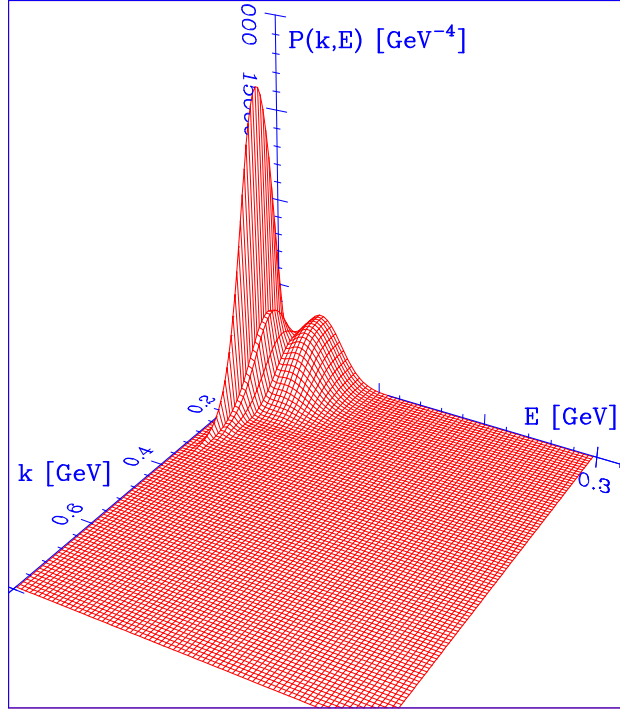


Figura 2.4. Funzione spettrale del nucleo ^{16}O ottenuta utilizzando la Local Density Approximation (LDA).

Nel caso del deutone, la funzione spettrale prende la semplice forma

$$P(\mathbf{P}, E) = n(\mathbf{P})\delta(E - E_d), \quad (2.34)$$

dove $E_d = 2.224$ MeV è l'energia di legame, la distribuzione d'impulso è definita come

$$n(\mathbf{P}) = \int d^3x e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} |\psi_d(\mathbf{x})|^2, \quad (2.35)$$

dove $\psi_d(\mathbf{x})$ è la funzione d'onda del nucleo ^2H .

La figura Fig. 2.5 mostra la distribuzione d'impulso del deutone calcolata dagli autori della Ref. [29], che abbiamo utilizzato per effettuare il fit descritto nel Capitolo 4.

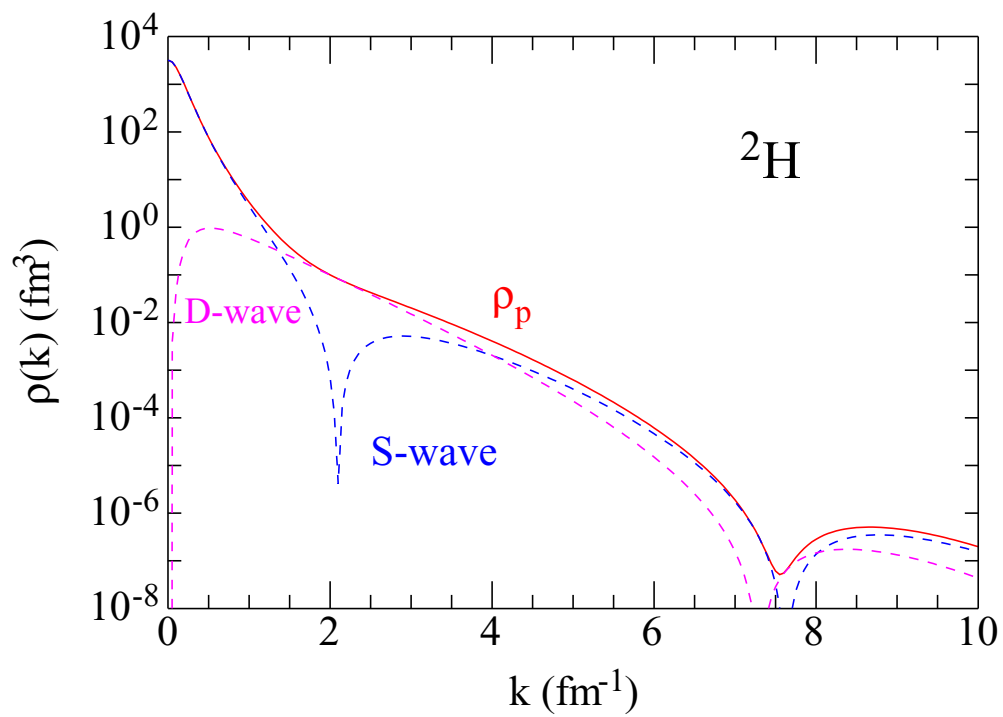


Figura 2.5. La linea rossa continua mostra la distribuzione d'impulso del deuterio utilizzata per il fit descritto nel Cap. 4.

Capitolo 3

Diffusione Inelastica Leptone-Nucleone

I meccanismi di reazione attivi nel range di energia che ci proponiamo di analizzare (da poche centinaia di MeV fino a pochi GeV) sono tre: scattering quasielastico, produzione di risonanze e scattering profondamente inelastico.

$$\sigma_{tot} = \sigma_{QE} + \sigma_{Res} + \sigma_{DIS} \quad .$$

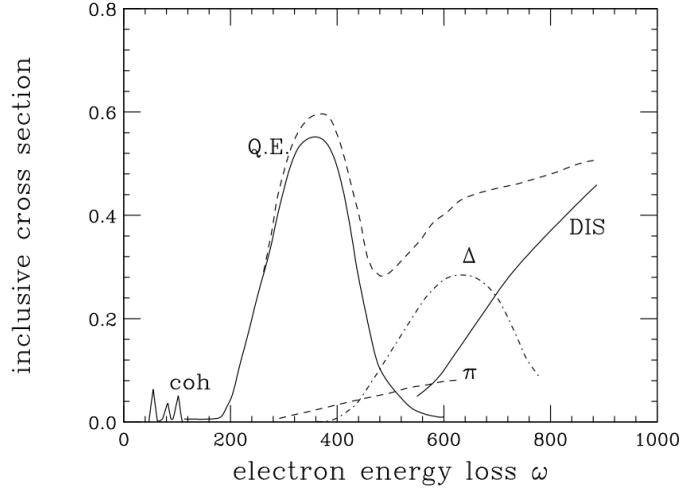
Nel caso di scattering quasielastico la reazione avviene tra l'elettrone ed un nucleone che viene estratto dal nucleo e negli stati finali ritroviamo l'elettrone, il nucleone libero ed il nucleo con A-1 nucleoni (A era il numero di massa del nucleo originario), $e^- N \rightarrow e^- N$. Gli altri due processi sono invece di tipo inelastico e la massa invariante dello stato adronico finale è maggiore di quella iniziale del nucleone. Il cut-off cinematico con cui si discriminano questo tipo di processi è la presenza di almeno un pione nello stato finale. Nel regime inelastico si può avere produzione di risonanze, quindi processi del tipo

$$e^- N \rightarrow e^- R \rightarrow e^- N' \pi \quad ,$$

oppure scattering profondamente inelastico, schematizzato dal processo

$$e^- N \rightarrow e^- X \quad ,$$

con stati finali X che sono i risultati dell'adronizzazione dei frammenti del nucleone. La figura che segue offre uno schema tipico della composizione della sezione d'urto nucleare nel regime in cui è applicabile l'approssimazione impulsiva, in funzione dell'energia trasferita ω .



3.1 Produzione di Risonanze

La regione delle risonanze viene comunemente divisa in due parti: si separa la $\Delta(1232MeV)$ dalle altre risonanze che costituiscono la seconda regione delle risonanze. Le risonanze che si presentano nel range d'energia che abbiamo studiato sono la già elencata $P_{33}(1232)$ ($\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$), quindi le risonanze $P_{11}(1440)$ (P_{11}^+, P_{11}^0), $D_{13}(1520)$ (D_{13}^+, D_{13}^0) e $S_{11}(1535)$ (S_{11}^+, S_{11}^0). Per lo studio delle particelle con spin 3/2 come la Δ e la $D_{13}(1520)$ viene impiegata la funzione d'onda di Rarita-Schwinger [17]. La funzione generale per particelle di spin 3/2 si costruisce come sempre dalla trasformata di Fourier degli autostati dell'impulso \hat{P} , che a loro volta sono costituiti dal prodotto tensoriale di uno spinore di Dirac (U) e di un vettore di polarizzazione (e) dello stesso impulso p .

$$U(p, \sigma) = \sqrt{p_0 + M_R} \begin{pmatrix} u_\sigma \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p_0 + M_R} u_\sigma \end{pmatrix} .$$

I vettori bidimensionali sono tali che $u_{1/2}^T = (1 ; 0)$ e $u_{-1/2}^T = (0 ; 1)$ e M_R indica la massa della risonanza. Per il vettore di polarizzazione abbiamo:

$$e_\mu^{R,L} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0; 1, \pm i, 0) \quad , \quad (3.1)$$

$$e_\mu^S = \frac{1}{M_R} (p; 0, 0, p_0) \quad , \quad (3.2)$$

nel caso semplice di impulsi \mathbf{p} orientati nel senso dell'asse z : $|\mathbf{p}| = p_z$. Gli autostati di elicità della particella a spin 3/2 si possono quindi scrivere grazie ai coefficienti

di Clebsch-Gordan (nel caso particolare di 3-impulso lungo l'asse z) nella seguente maniera

$$\begin{aligned}
\Phi_\mu(p, 3/2) &= \epsilon_\mu^R U(p, 1/2) \quad , \\
\Phi_\mu(p, 1/2) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon_\mu^S U(p, 1/2) + \sqrt{\frac{1}{3}} \epsilon_\mu^R U(p, -1/2) \quad , \\
\Phi_\mu(p, -1/2) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon_\mu^S U(p, -1/2) + \sqrt{\frac{1}{3}} \epsilon_\mu^L U(p, 1/2) \quad , \\
\Phi_\mu(p, -3/2) &= \epsilon_\mu^L U(p, -1/2) \quad .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

L'analisi delle risonanze viene compiuta, secondo la tecnica più moderna [18, 19] discriminando le ampiezze di elicità del fotone virtuale.

Per ogni risonanza si possono scrivere le sezioni d'urto relative alle polarizzazioni del fotone:

$$\begin{aligned}
\sigma_i(W) &= \frac{1}{K} \left(\frac{2\pi^2\alpha}{2m} \right) \sum_{s_1 s_2} \left| \langle R, s_1 | \epsilon_i^\mu J_\mu^{em} | N, s_2 \rangle \right|^2 \\
&\quad \times \frac{M_R \Gamma_R / \pi}{\left[(W^2 - M_R^2)^2 + M_R^2 \Gamma_R^2 \right]} \quad .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nella (3.4) W indica la massa invariante dello stato adronico finale, ϵ_i^ν è il vettore di polarizzazione del fotone che si satura con l'operatore di corrente elettromagnetica J_{em}^ν e la somma corre sui valori degli spin (s_1, s_2) degli adroni. Se si sceglie un sistema di riferimento in cui il vettore \mathbf{q} è orientato nel senso positivo dell'asse z possiamo mantenere la definizione già data per i vettori di polarizzazione trasversi in Eq. (3.1) ($\epsilon_{R,L}^\mu = e_{R,L}^\mu$), per il vettore longitudinale la definizione va modificata in modo da tenere conto del 4-impulso del fotone:

$$\epsilon_S^\mu = \frac{1}{\sqrt{Q^2}} (|\mathbf{q}|; 0, 0, \omega) \quad .$$

Per il fattore di flusso K del fotone virtuale, adottando come solito la convenzione di Hand già utilizzata in (2.13) possiamo scrivere l'equivalente

$$K = \frac{W^2 - m^2}{2m} \quad .$$

La forma funzionale utilizzata per l'ampiezza della risonanza è la seguente:

$$\Gamma_R = \Gamma_0 \left(\frac{p_\pi(W)}{p_\pi(M_R)} \right)^{2\ell+1} , \quad (3.5)$$

dove ℓ è il momento angolare della risonanza e Γ_0 è l'ampiezza di decadimento della risonanza in pioni e nucleone. L'impulso del pione p_π nel centro di massa si calcola

$$p_\pi(M_R) = \frac{\sqrt{(M_R^2 - m^2 - m_\pi^2)^2 - 4m^2m_\pi^2}}{2M_R} . \quad (3.6)$$

Le sezioni d'urto di elicità, al picco $W = M_R$, si possono dedurre dalla formula (3.4):

$$\begin{aligned} \sigma_T(W = M_R) &= \frac{2m}{M_R \Gamma_R} (A_{1/2}^2 + A_{3/2}^2) , \\ \sigma_S(W = M_R) &= \frac{2m}{M_R \Gamma_R} \frac{Q^2}{|\mathbf{q}|^2} S_{1/2}^2 , \end{aligned}$$

dove i valori A_i ed $S_{1/2}$ indicano l'ampiezza di probabilità per processi con l'intervento di fotoni di spin 1 e 0 rispettivamente, che si possono scrivere come:

$$\begin{aligned} A_{1/2} &= \sqrt{\frac{\pi\alpha}{m(W^2 - m^2)}} \langle R, \frac{1}{2} | \varepsilon_R^\mu J_\mu^{em} | N, -\frac{1}{2} \rangle , \\ A_{3/2} &= \sqrt{\frac{\pi\alpha}{m(W^2 - m^2)}} \langle R, \frac{3}{2} | \varepsilon_R^\mu J_\mu^{em} | N, \frac{1}{2} \rangle , \\ S_{1/2} &= \sqrt{\frac{\pi\alpha}{m(W^2 - m^2)}} \frac{|\mathbf{q}|}{\sqrt{Q^2}} \langle R, \frac{1}{2} | \varepsilon_S^\mu J_\mu^{em} | N, \frac{1}{2} \rangle . \end{aligned}$$

Per quanto riguarda invece l'operatore di corrente elettromagnetica possiamo dire da un punto di vista generale, che soddisfi l'invarianza di Lorentz e la conservazione della corrente, che il suo valore inserito tra gli stati della risonanza a spin 3/2 ed il nucleone assume la forma:

$$\langle R | J_{em}^\mu | N \rangle = \bar{\Phi}_\nu(p') d_R^{\nu\mu} u(p) \quad ,$$

dove $\Phi_\nu(p')$ rappresenta la risonanza e $u(p)$ è lo spinore del nucleone con i relativi impulsi. Il tensore $d_R^{\mu\nu}$ costituisce l'operatore corrente elettromagnetica in questa rappresentazione e la sua forma esplicita è la seguente

$$d_R^{\mu\nu} = \left\{ g^{\mu\nu} \left[\frac{C_3^R}{m} \not{q} + \frac{C_4^R}{m^2} (p'q) + \frac{C_5^R}{m^2} (pq) + C_6^R \right] + \right. \\ \left. - q^\mu \left[\frac{C_3^R}{m} \gamma^\nu + \frac{C_4^R}{m^2} p'^\nu + \frac{C_5^R}{m^2} p^\nu \right] \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^5 \end{pmatrix} \quad .$$

L'alternativa da moltiplicare a destra dell'espressione (1 oppure γ^5) si deve adeguare alla parità della risonanza: l'unità deve accompagnare le risonanze con parità negativa ed il γ^5 quelle con parità positiva come la Δ .

Il caso di risonanze di spin 1/2 è naturalmente più semplice perché non c'è bisogno del termine $A_{3/2}^R$ e per descrivere l'operatore di corrente bastano due fattori di forma g_1 e g_2 , ad esempio quelli scelti con questa parametrizzazione:

$$\langle R_{1/2} | J_\mu^{em} | N \rangle = u(p') \left[\frac{g_1^R}{(m + M_R)^2} (Q^2 \gamma^\mu + \not{q} q^\mu) + \right. \\ \left. + \frac{g_2^R}{m + M_R} i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^5 \end{pmatrix} u(p) \quad .$$

In questo caso nell'ampiezza di transizione, per risonanze con parità positiva, compare l'identità, mentre per quelle con parità negativa il γ^5 .

A titolo di esempio riportiamo le curve relative alle ampiezze $A_{1/2}$, $A_{3/2}$ e $S_{1/2}$ della risonanza $D_{13}(1520)$ estrapolate da Lalakulich, Paschos e Piranishvili [19].

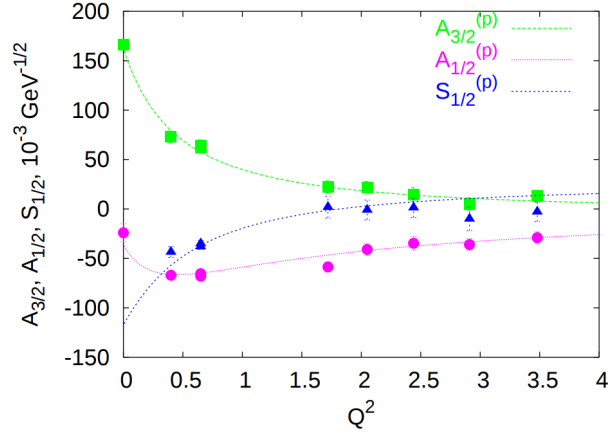


Figura 3.1. Ampiezze $A_{1/2}$, $A_{3/2}$ e $S_{1/2}$ per la risonanza $D_{13}(1520)$ [19].

Nello stesso lavoro [19] sono estrapolate le forme funzionali dei fattori di forma C_i^R che abbiamo utilizzato per confrontare le sezioni d'urto calcolate con questo metodo con i dati sperimentali.

Le ampiezze di elicità possono essere ulteriormente indagate dal punto di vista della simmetria di isospin: sfruttando i coefficienti di Clebsch-Gordan (scritti per esempio nelle eq. (3.3)) si può suddividere l'ampiezza di elicità in rappresentazioni d'isospin tenendo conto della natura isovettoriale oppure isoscalare del fotone (nell'algebra dell'isospin può avere componente $|1\ 0\rangle$ isovettoriale oppure $|0\ 0\rangle$ isoscalare).

$$A_p = A(\gamma p \rightarrow R^+) = b - \sqrt{\frac{1}{3}}a^1 + \sqrt{\frac{2}{3}}a^3 \quad ,$$

$$A_n = A(\gamma n \rightarrow R^0) = b + \sqrt{\frac{1}{3}}a^1 + \sqrt{\frac{2}{3}}a^3 \quad .$$

Indichiamo con b il contributo da fotoni isoscalari e con a^1 e a^3 quello di fotoni isovettoriali per le risonanze di spin $1/2$ e $3/2$.

Da queste regole si può dedurre subito l'interessante proprietà che l'ampiezza di transizione del nucleone verso la risonanza Δ di isospin $3/2$ ha lo stesso valore sia per il protone che per il neutrone, cioè $\sqrt{2/3} a^3$. Per le altre risonanze di isospin $1/2$ non vale un discorso così semplice perché l'ampiezza è data dalla combinazione lineare dei termini b e a^1 .

3.2 Diffusione Profondamente Inelastica

Dal punto di vista sperimentale lo scattering profondamente inelastico (Deep Inelastic Scattering) è caratterizzato dalla presenza di almeno due pioni nello stato finale adronico dell'interazione.

L'interpretazione teorica dello scattering profondamente inelastico (DIS) si fa più semplice con l'aumentare del momento trasferito dal fotone al nucleone: come detto nell'introduzione la risoluzione spaziale della sonda è proporzionale all'inverso dell'impulso trasferito, così si può assumere che ad impulso sufficientemente alto si entri in contatto singolarmente con i costituenti del nucleone. Il verificarsi di questo fenomeno è messo in evidenza dallo scaling di Bjorken: si registra cioè che a valori di Q^2 sufficientemente alti la sezione d'urto della sonda con il nucleone diventa quella tipica delle interazioni tra particelle puntiformi (senza struttura interna). Nel caso quindi di particelle puntiformi la sezione d'urto assume la forma semplice riportata in Eq. (2.6) in cui si considerino i seguenti fattori di forma

$$2 W_1^{point} = \frac{Q^2}{2m^2} \delta \left(\omega - \frac{Q^2}{2m^2} \right) ,$$

$$W_2^{point} = \delta \left(\omega - \frac{Q^2}{2m^2} \right) .$$

Si può considerare il processo inelastico (per Q^2 sufficientemente alto) come la somma incoerente di interazioni elastiche con particelle puntiformi.

Introducendo la variabile di Bjorken $x_{BJ} = Q^2/2m\omega$ è possibile semplificare la dipendenza delle funzioni ωW_2 e mW_1 alla sola x_{BJ} invece che alle due variabili (ad esempio ω e Q^2 nel sistema del laboratorio) che sono necessarie nel caso generale.

Si definiscono quindi le due funzioni F_1 e F_2 nella seguente maniera

$$\omega W_2 \rightarrow F_2(x_{BJ}) ; \quad mW_1 \rightarrow F_1(x_{BJ}) ,$$

in cui il limite è da intendere per $Q^2 \rightarrow \infty$ e $\omega \rightarrow \infty$ mantenendo costante la variabile di Bjorken x_{BJ} .

L'interpretazione di questo risultato (scaling di Bjorken) è da ricercare all'interno del modello a partoni: in questo modello infatti il nucleone, ma in generale qualunque adrone è considerato un sistema composto da *partoni*, cioè particelle puntiformi che a Q^2 sufficientemente alto, in virtù della libertà asintotica della QCD, possono essere considerate non interagenti. Tali *partoni* nel linguaggio dell'algebra di flavour SU(3) possono essere quark di valenza oppure quark di mare. I quark di valenza sono quelli assegnati dalle regole di SU(3), quindi per esempio il protone avrà due quark up di valenza (u_v) ed uno down di valenza (d_v) mentre il neutrone avrà due d_v ed un

u_v ; i quark di mare (q_s) sono tutti e sei quelli esistenti e possono essere originati da gluoni di Bremsstrahlung emessi dai quark di valenza oppure da altri quark di mare. Nell'infinito momentum frame la x_{BJ} rappresenta la frazione di impulso trasportata dal partone, rispetto all'impulso totale dell'adrone a cui appartiene. Se indichiamo con $q_i(x)$ la probabilità che ha il partone q di trasportare la frazione x di impulso le funzioni di struttura F_1 e F_2 assumono la forma semplice data da:

$$F_1(x_{BJ}) = \sum_i \int dx e_i^2 q_i(x) \frac{x_{BJ}}{2x^2} \delta\left(1 - \frac{x_{BJ}}{x}\right) ,$$

$$F_2(x_{BJ}) = \sum_i \int dx e_i^2 q_i(x) \delta\left(1 - \frac{x_{BJ}}{x}\right) .$$

Dalle definizioni delle funzioni di struttura F_1 e F_2 si deduce una proprietà fondamentale che è valida nel limite di Bjorken, cioè a Q^2 molto alto con x_{BJ} costante, tale proprietà è la relazione di Callan-Gross:

$$F_2(x) = 2x F_1(x) .$$

Dove e_i indica la carica elettrica dell' i -esimo partone . Tenendo conto della distinzione dei partoni in quark di valenza e quark di mare possiamo esplicitare le funzioni di struttura per i nucleoni

$$\frac{1}{x} F_2^N(x) = \frac{4}{9} \left(u^N(x) + \bar{u}^N(x) \right) + \frac{1}{9} \left(d^N(x) + \bar{d}^N(x) \right) + \frac{1}{9} \left(s^N(x) + \bar{s}^N(x) \right) + \dots$$

con la somma che continua sugli altri tre flavour dei quark.

3.3 Parametrizzazione delle Funzioni di Struttura dei Nucleoni

Nel corso di questo lavoro sono stati analizzati i principali fit presenti in letteratura per i fattori di forma inelastici dei nucleoni: Bodek e Ritchie [22, 23] e Bosted e Christy [26]. Daremo ora una breve descrizione dei fit per quanto riguarda le forme funzionali e la parametrizzazione che utilizzano. Alla fine del capitolo sono graficate le sezioni d'urto di esperimenti di scattering di elettroni su protoni confrontate con i fit discussi.

3.4 Parametrizzazione di Bodek & Ritchie

Nel lavoro di Bodek e Ritchie [22, 23] si ricava una forma funzionale per $F_2 = \omega W_2^n$ come funzione della massa invariante dello stato adronico finale e del quadrato del momento trasferito. I limiti cinematici forniti in [22] per la validità del fit sono $1 < Q^2 < 10 \text{ GeV}^2$ nel momento trasferito e $1.2 < W^2 < 10 \text{ GeV}^2$: i dati analizzati provengono dello Stanford Linear Accelerator Center (SLAC).

La funzione W_1 viene calcolata a partire da W_2 grazie alla relazione (2.15) assumendo un valore di $R = \sigma_L/\sigma_T$ costante e pari a 0.18 .

L'espressione di $\omega W_2(W^2, Q^2)$ è

$$\omega W_2 = A(W, Q^2) f(\phi_r) x \quad ,$$

dove x rappresenta la variabile di Bjorken $x = Q^2/2m\omega$ e ϕ_r è una correzione dell'inverso di x , proposta da Rittenberg e Rubinstein [24].

$$\phi_r = \frac{2m\omega + a^2}{Q^2 + b^2} ; \quad f(\phi_r) = \phi_r \sum_3^7 c_n \left(1 - \frac{1}{\phi_r}\right)^n \quad .$$

Si noti che nel limite di Q^2 e ω^2 molto grandi, a x costante, la variabile $\phi_r \rightarrow x^{-1}$ e si ristabilisce lo scaling di Bjorken.

La funzione $A(W, Q^2)$ si compone di due parti che possiamo considerare come la componente risonante e di background (non risonante) del fit.

$$A(W, Q^2) = A^R + A^{NR} \quad .$$

3.4.1 Componente risonante: A^R .

Le risonanze che contribuiscono al calcolo della funzione A^R sono la $P_{33}(1232)$ (Δ), la $D_{13}(1520)$, la $F(1720)$ e la $P(1953)$ ¹. La forma funzionale della A^R è data da una funzione della massa invariante dello stato adronico finale che moltiplica la somma delle funzioni Breit-Wigner di ognuna della 4 risonanze; si noti che per la risonanza Δ l'Eq. 3.7 presenta una correzione al termine di Breit-Wigner che dipende esplicitamente da Q^2 :

¹Per il fit di Bodek & Ritchie non è necessaria la conoscenza dello spin e dell'isospin delle risonanze

$$A^R(W, Q^2) = \left[(1 - c_0) + (1 - c_0) \left(1 - e^{-c_1(W^2 - c_2^2)} \right) \right] \times \sum_{i=1}^4 \frac{\Gamma_i / \pi}{\left[(W - M_i^2)^2 + \Gamma_i^2 \right]} \left(\frac{c_3^i + \delta_{i,1} (c_7 Q^2 + c_8 Q^4)}{2m} \right) , \quad (3.7)$$

dove si è indicato con Γ_i l'ampiezza totale di decadimento² della i -esima risonanza, che viene scritta nella forma

$$\Gamma_i = \frac{\Gamma_i^0}{2} \left(\frac{p_\pi(W)}{p_\pi(M_i)} \right)^{2\ell+1} \left[\frac{1 + \left(\frac{p_\pi(M_i)}{0.16421} \right)^{2\ell}}{1 + \left(\frac{p_\pi(W)}{0.16421} \right)^{2\ell}} \right] ,$$

con la stessa notazione di Eq. 3.5.

La sola massa M_3 deve essere sostituita all'interno del fit con la funzione della variabile Q^2

$$M_3 \rightarrow \left(1 + \frac{c_9}{1 + c_{10} Q^2} \right) M_3 ,$$

per ottenere un accordo migliore con i dati.

3.4.2 Componente non risonante: A^{NR} .

Indichiamo ora la forma funzionale della componente di Background (non risonante) della funzione $A(W, Q^2)$

$$A^{NR}(W, Q^2) = B \left\{ 1 + (1 - B) \left[c_{13} + c_{14} (x - c_{15})^2 \right] \right\} ,$$

dove abbiamo indicato con $B(W)$ la seguente funzione della massa invariante

$$B(W) = \left[c_0 \left(1 - e^{-c_{11}(W - c_{12})} \right) + (1 - c_0) \left(1 - e^{-c_1(W^2 - c_2^2)} \right) \right] .$$

²si considera solamente il decadimento della risonanza in pione e nucleone

Per calcolare la sezione d'urto del deuterio le sezioni d'urto di protone e neutrone liberi vengono moltiplicate per la funzione di smearing che tiene conto dell'effetto del legame (seppur piccolo) che esiste tra i nucleoni del deuterio. Si può scrivere quindi

$$\sigma_d = \tilde{\sigma}_n + \tilde{\sigma}_p \quad ,$$

dove la somma separa i contributi alla sezione d'urto del deuterio nei termini provenienti dai diversi nucleoni. La funzione di smearing S_N si definisce con il rapporto di tali sezioni d'urto $\tilde{\sigma}_N$ rispetto a quelle su nucleoni liberi

$$S_n = \frac{\sigma_n}{\tilde{\sigma}_n} ; \quad S_p = \frac{\sigma_p}{\tilde{\sigma}_p} \quad .$$

Nel caso del protone la funzione S_p si ottiene dalla sezione d'urto del deuterio, Eq. (2.27). Le smearing function per neutrone e protone vengono considerate simili e il rapporto $S_n/S_p = U$ è una funzione modulare prossima a 1.

3.5 Parametrizzazione di Bosted & Christy

Il fit descrive le funzioni di struttura del protone per scattering inelastico nella regione cinematica compresa tra $0 \leq Q^2 < 8 \text{ GeV}^2$ e con massa invariante $1.1 < W < 3.1 \text{ GeV}$, ottenute dalle sezioni d'urto misurate utilizzando il fascio di elettroni disponibile alla Thomas Jefferson National Accelerator Facility (JLab).

In [26] Bosted & Christy utilizzano due fit separati per le sezioni d'urto longitudinali e trasverse, che concorrono alla sezione d'urto totale nella maniera indicata in Eq. (2.16). A loro volta le σ_L e σ_T (definite in (2.14)) si compongono di due parti, una risonante ed una non risonante.

$$\sigma_{L,T}(Q^2, W^2) = \sigma_{L,T}^R(Q^2, W^2) + \sigma_{L,T}^{NR}(Q^2, W^2) \quad .$$

Sebbene la forma del fit sia fisicamente motivabile, lo scopo del lavoro di Bosted & Christie è quello di rappresentare al meglio la sezione d'urto dello scattering elettrone-protone e non quello di ricavare i parametri fisici dei processi che intercorrono, come ad esempio le masse o le ampiezze di decadimento delle risonanze. Procediamo quindi a descrivere la forma delle componenti risonanti e non risonanti del fit.

3.5.1 Componente risonante: σ^R

La componente risonante del fit ha la seguente forma

$$\sigma_{T,L}^R = W \sum_{i=1}^7 \left[\frac{K_i K_i^{CM}}{K K^{CM}} \right] \frac{\Gamma_i^{tot} \Gamma_i^\gamma}{\Gamma_i \left[(W^2 - M_i^2)^2 + (M_i^2 \Gamma_i^{tot})^2 \right]} \quad (3.8)$$

$$\times \left(A_{T,L}^i(Q^2) \right)^2 .$$

La sommatoria corre sulle sette risonanze prese in considerazione dal fit. Si indicano con K e K^{cm} le energie del fotone virtuale nella convenzione di Hand (Eq. (2.13)) nel sistema del laboratorio e del centro di massa. K_i e K_i^{cm} indicano le stesse quantità in cui sia stata sostituita la massa del protone m , con quella della i -esima risonanza M_i .

$$K = \frac{W^2 - m^2}{2m} ; \quad K^{cm} = \frac{W^2 - m^2}{2W}$$

$$K_i = \frac{W^2 - M_i^2}{2M_i} ; \quad K_i^{cm} = \frac{W^2 - M_i^2}{2W} . \quad (3.9)$$

Γ_i^{tot} è l'ampiezza totale del decadimento definita da

$$\Gamma_i^{tot} = \sum_{j=1}^3 \beta_i^j \Gamma_i^j ,$$

con β_i^j il branching-fraction della i -esima risonanza nel canale di decadimento j , la cui ampiezza parziale è Γ_i^j . La sommatoria corre sui tre modi di decadimento delle risonanze che sono il decadimento in uno e due π ed il decadimento nell' η . Le ampiezze parziale Γ_i^j relative ad i modi di decadimento elencati sono

$$\Gamma_i^j = \Gamma_i \left[\frac{p(W)}{p(M_i)} \right]^{2\ell+1} \left[\frac{p^2(M_i) + X_i^2}{p^2(W) + X_i^2} \right]^\ell , \quad (3.10)$$

dove X_i è un parametro del fit, Γ_i è l'ampiezza intrinseca della risonanza i -esima e l'impulso del mesone (π o η) nel centro di massa $P(W)$ è già stato definito nell'Eq. 3.6, come il momento angolare ℓ .

Abbiamo indicato in Eq. (3.10) l'ampiezza parziale relativa al decadimento in un mesone finale e di seguito indichiamo quella relativa a due pioni (3.11) e quella del fotone (3.12) virtuale che compare in (3.8).

L'ampiezza in due π è quindi:

$$\Gamma_i^{2\pi} = \frac{W \Gamma_i}{M_i} \left[\frac{p(W)}{p(M_i)} \right]^{2\ell+4} \left[\frac{p^2(M_i) + X_i^2}{p^2(W) + X_i^2} \right]^{\ell+2} . \quad (3.11)$$

L'ampiezza per il fotone virtuale è:

$$\Gamma_i^\gamma = \Gamma_i \left[\frac{K^{cm}}{K^{cm}|_{M_i}} \right]^2 \left[\frac{(K^{cm}|_{M_i})^2 + X_i^2}{(K^{cm})^2 + X_i^2} \right] . \quad (3.12)$$

Gli ultimi termini che mancano da specificare sono le ampiezze di transizione risonante trasverse e longitudinali, per le quali è stata scelta la seguente forma funzionale

$$A_T^i(Q^2) = \frac{A_T^i(0)}{(1 + Q^2/0.91)^{c_i}} \left(1 + \frac{a_i Q^2}{1 + b_i Q^2} \right) ,$$

$$A_L^i(Q^2) = A_L^i(0) \frac{Q^2}{(1 + d_i Q^2)} e^{-e_i Q^2} .$$

Si può notare il comportamento regolare di A_T e A_L nel limite $Q^2 \rightarrow 0$; per tale valore A_T tende linearmente al valore di fotoproduzione $A_T(0)$ mentre $A_L \rightarrow 0$; altro vincolo fisico rispettato dalla forma funzionale del fit è quello $A_L \rightarrow 0$ per Q^2 molto alto (per conservazione dell'elicità nello scattering con particelle di spin 1/2), che è garantito appunto dalla presenza dell'esponenziale inverso nella definizione di A_L . Nella tabella sono presentati i dati delle sette risonanze considerate nel fit ed i relativi branching-fraction:

Risonanza	$\beta_{1\pi}$	$\beta_{2\pi}$	β_η
$P_{33}(1232)$	1.0	0.0	0.0
$P_{11}(1440)$	0.65	0.35	0.0
$D_{13}(1520)$	0.65	0.35	0.0
$S_{11}(1535)$	0.45	0.10	0.45
$F_{15}(1680)$	0.65	0.35	0.0
$S_{15}(1650)$	0.4	0.5	0.1
$F_{37}(1950)$	0.5	0.5	0.0

3.5.2 Componente non risonante: σ^{NR}

Per la componente non risonante del fit la forma funzionale è puramente empirica.

$$\sigma_T^{NR} = x' \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma_T^{NR,i}(0)}{[Q^2 + a_i^T]^{(b_i^T + c_i^T Q^2 + d_i^T Q^4)}} (W - m_\pi)^{i+\frac{1}{2}} .$$

Con m_π la massa del pione, $Q_0^2 = 0.05 \text{ GeV}^2$ e la definizione di x' è la seguente

$$x' = \left(1 + \frac{W^2 - (m + m_\pi)^2}{Q^2 + Q_0^2} \right)^{-1} .$$

Scriviamo ora la componente longitudinale della sezione non risonante

$$\sigma_L^{NR} = \sigma_L^{NR}(0) \frac{(1 - x')^{[a^L t + b^L]}}{(1 - x)} \frac{Q^{2c^L}}{(Q^2 - Q_0^2)^{(1+c^L)}} x'^{(d^L + e^L t)} ,$$

dove t che compare all'esponente di $(1 - x')$ è una funzione lentamente variabile di Q^2

$$t = \frac{\log(\log(\frac{Q^2 + m_0}{0.33^2}))}{\log(\frac{m_0}{0.33^2})} ,$$

con i valori $Q_0 = 0.125 \text{ GeV}$ e $m_0 = 4.2802 \text{ GeV}$.

3.6 Confronto con i dati sperimentali

Si riporta nelle Fig. 3.2-3.4 il confronto tra le sezioni d'urto misurate a SLAC e Jlab ed i fit discussi nelle sezioni precedenti, al fine di valutarne l'accuratezza.

La regione cinematica coperta dai dati corrisponde a $0.1 \lesssim Q^2 \lesssim 2.7 \text{ GeV}^2$ e $1.1 \lesssim W \lesssim 3 \text{ GeV}$.

Le curve rosse rappresentano il fit di Bosted & Christy (BC) e sono indicati oltre alla sezione d'urto complessiva (curva rossa continua) anche la componente risonante (rossa tratteggiata) e quella non risonante (rossa punteggiata). La curva blu rappresenta invece il modello delle risonanze di Lalakulich, Paschos e Piranishvili (LPP) e la curva celeste il fit di Bodek & Ritchie (BR).

Si può immediatamente osservare il fatto che le curve ottenute con i fit di BR e BC offrono un'ottimo modello per descrivere le sezioni d'urto elettrone-protone nel range cinematico di nostro interesse, cioè nel regime di validità dell'approssimazione impulsiva, ed in alcune zone le curve sono addirittura sovrapponibili. Il fit BC appare tuttavia in grado di descrivere in maniera migliore la struttura del protone per quanto riguarda la forma delle risonanze e questo ci viene confermato anche dal confronto dei valori del χ^2 per i dati presenti in questa regione d'energie³. Per quanto riguarda i fattori di forma di LPP per le risonanze essi non sembrano riprodurre in maniera accurata i dati delle sezioni d'urto che abbiamo riportato nelle figure seguenti perché, sebbene la componente delle risonanze costituisca solo una parte della sezione d'urto, e che quindi per fare un rigoroso confronto vada aggiunto un modello per il background non risonante, appare chiaro dalla Fig. 3.4 che la sezione d'urto per le sole risonanze è spesso maggiore di quella sperimentale e questo

³Il valore del χ^2 di BR viene dieci volte più grande di quello di BC per i dati graficati in Fig. 3.2-3.4

naturalmente non è curabile con un modello per il background. Si può ipotizzare che i modelli migliori per descrivere gli esperimenti in questa regione cinematica siano quelli globali come BR e BC per i quali, sebbene la forma funzionale del fit distingua tra componente risonante e non risonante, questa distinzione non viene fatta in maniera fisicamente rigorosa, in maniera cioè da adottare i parametri fisici reali (masse, ampiezze di decadimento) delle risonanze.

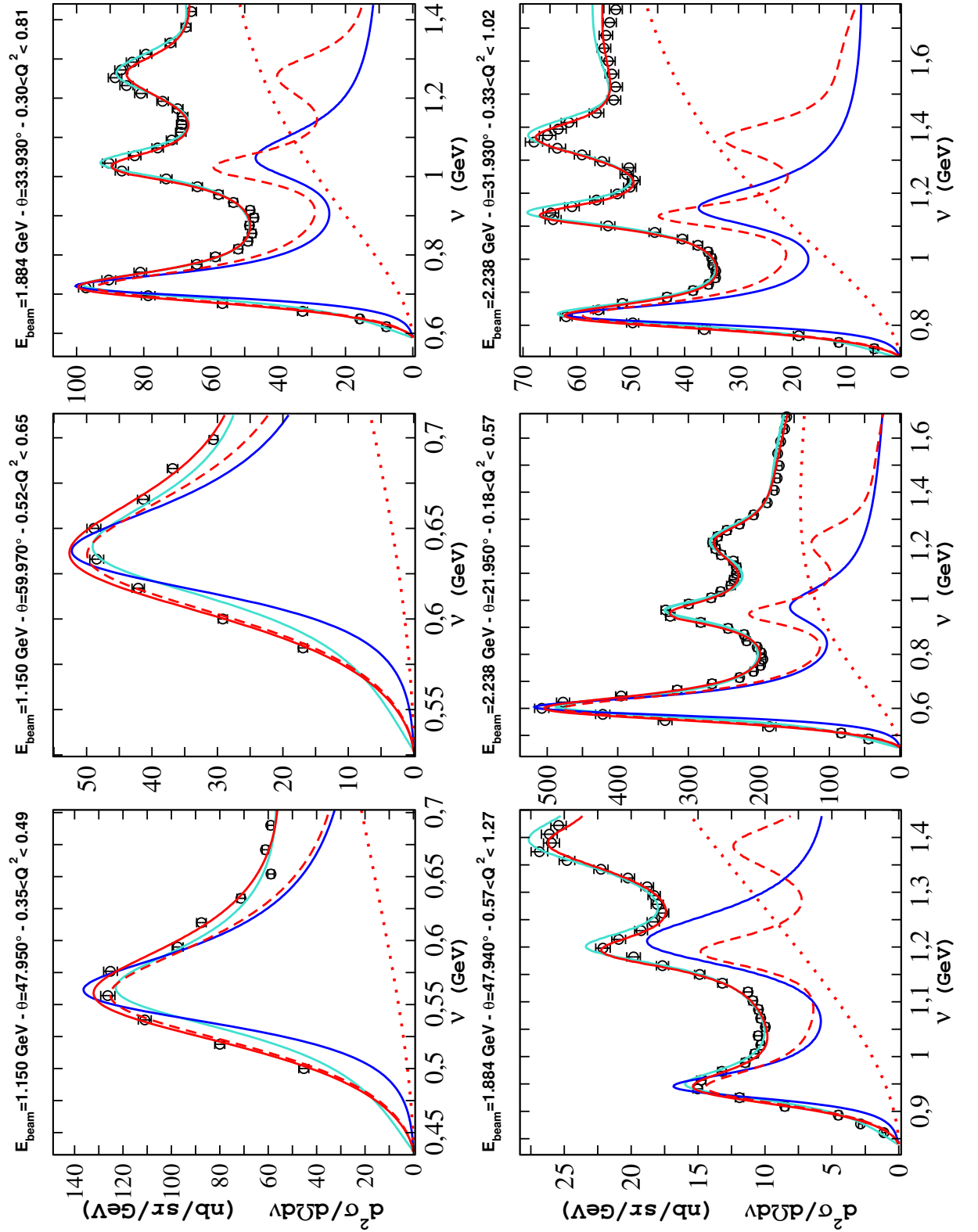


Figura 3.2. Confronto tra modello teorico e dati sperimentali dell'esperimento E94-110 presso JLab [21]; curva rossa continua BC_{tot} , curva rossa tratteggiata BC_{res} , curva rossa punteggiata BC_{nonres} , curva blu LPP e curva celeste BR.

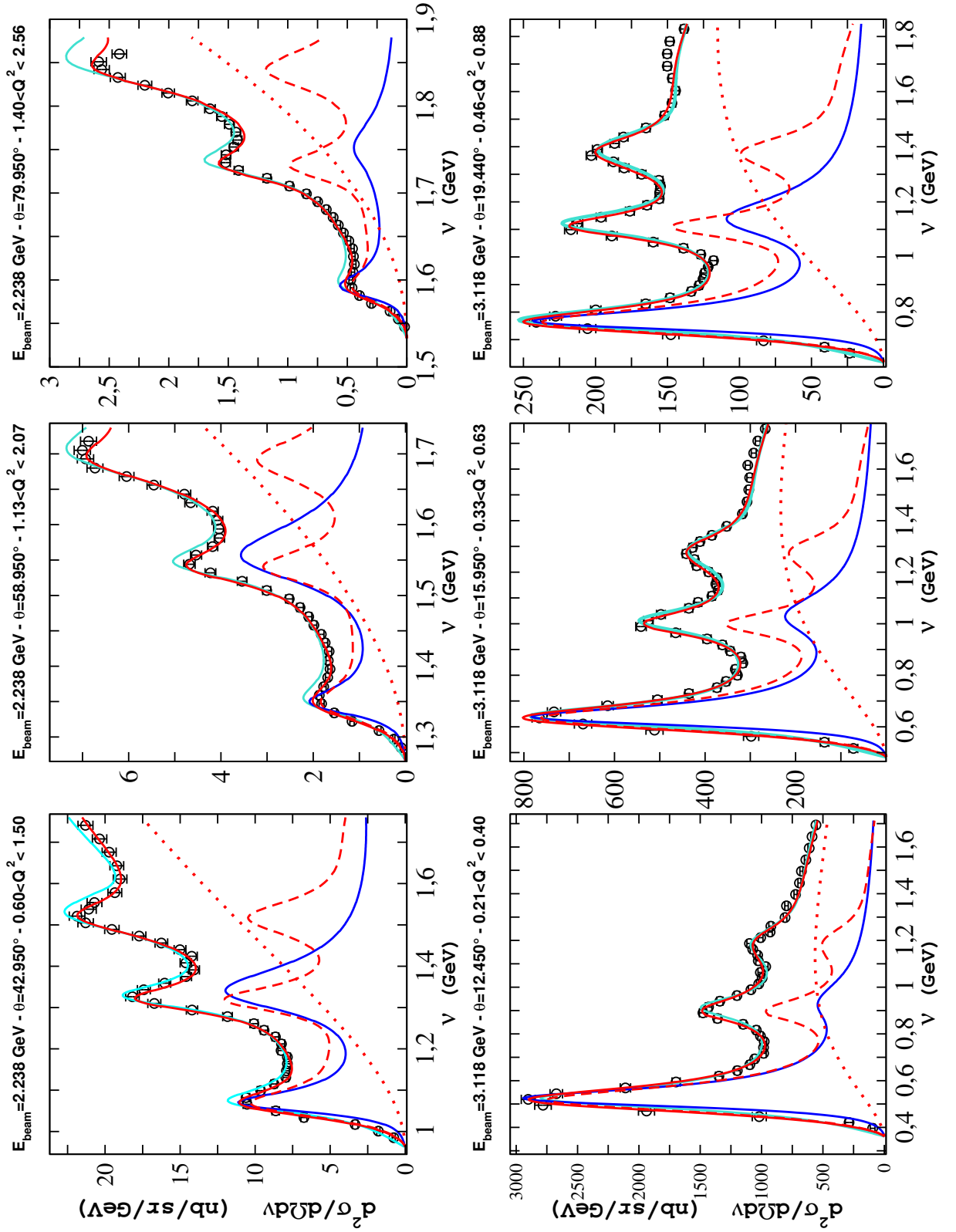


Figura 3.3. Confronto tra modello teorico e dati sperimentali dell'esperimento E94-110 presso JLab [21]; curva rossa continua BC_{tot} , curva rossa tratteggiata BC_{res} , curva rossa punteggiata BC_{nonres} , curva blu LPP e curva celeste BR .

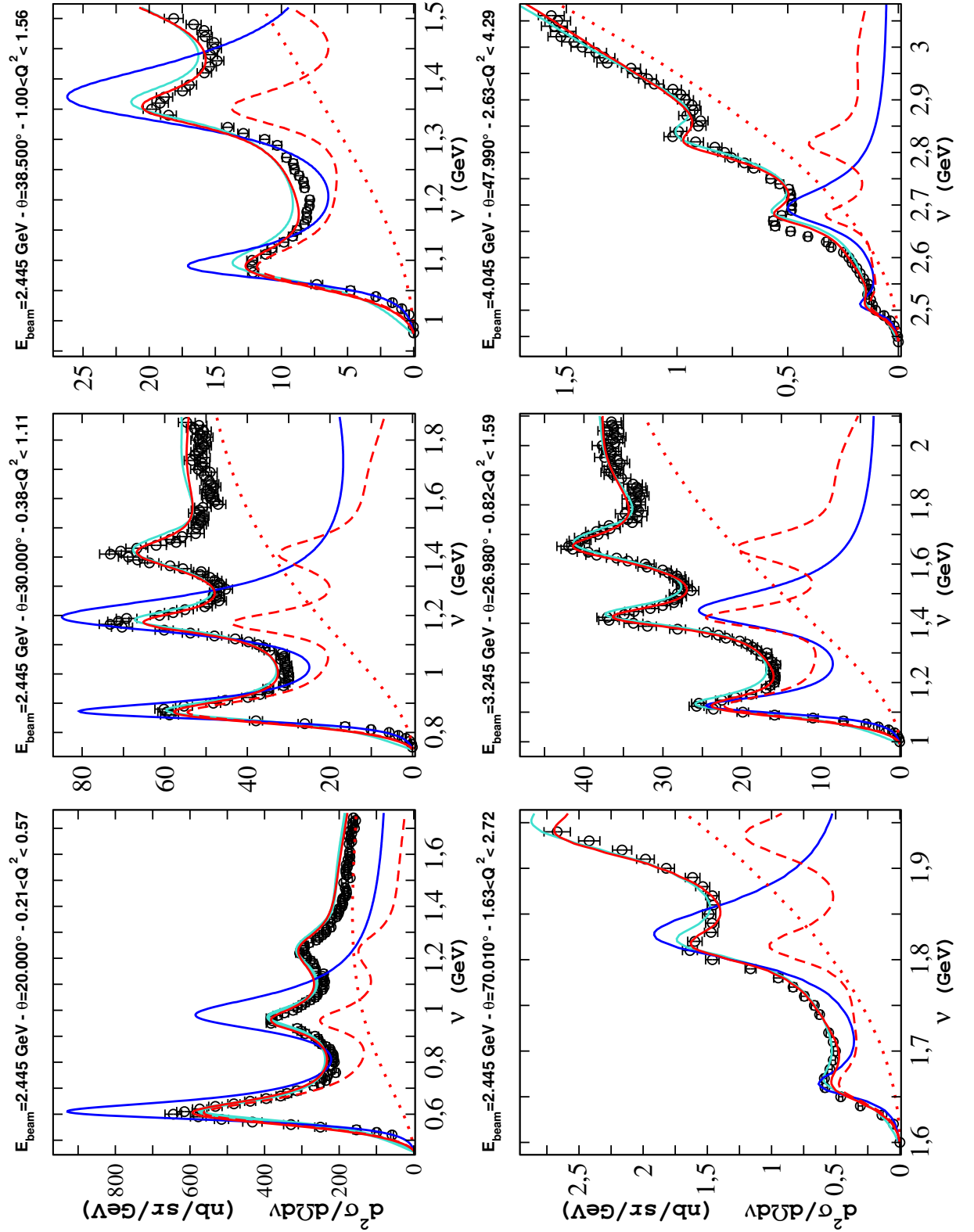


Figura 3.4. Confronto tra modello teorico e dati sperimentali misurati a JLab [27]; curva rossa continua BC_{tot} , curva rossa tratteggiata BC_{res} , curva rossa punteggiata BC_{nonres} , curva blu LPP e curva celeste BR .

Capitolo 4

Funzioni di Struttura del Neutrone

Mentre per i fattori di forma del protone, nella regione delle risonanze, esistono in letteratura fit accurati, come abbiamo visto nella Sezione 3.3, sembra non esserci la stessa accuratezza per i fattori di forma del neutrone. Tra i fit per neutrone più utilizzati in letteratura c'è quello di BR [22, 23], che utilizza una forma funzionale identica a quella del protone, che abbiamo descritto nella Sezione 3.4. L'accuratezza della descrizione del fattore di forma del neutrone di BR si può stimare dal confronto tra le sezioni d'urto elettrone-deutone misurate e quelle calcolate usando l'Eq. (2.27) ed il fit di BR sia per il protone che per il neutrone, rappresentate dalle linee verdi di Fig. 4.1.

Si vede chiaramente che i dati sono molto sottostimati nella regione corrispondente all'eccitazione della risonanza Δ .

La linea blu è stata ottenuta usando la parametrizzazione di BC della sezione d'urto del *deutone*. Benché l'accordo con i dati sia in questo caso molto migliore, il lavoro di BC non fornisce i fattori di forma del neutrone, ma solo la sezione d'urto del deuterio.

La conoscenza del fattore di forma del neutrone è necessaria per il calcolo delle sezioni d'urto di nuclei più pesanti, come il carbonio e l'ossigeno—per i quali esistono modelli accurati della funzione spettrale—nel formalismo dell'approssimazione impulsiva discusso nel Cap. 2.

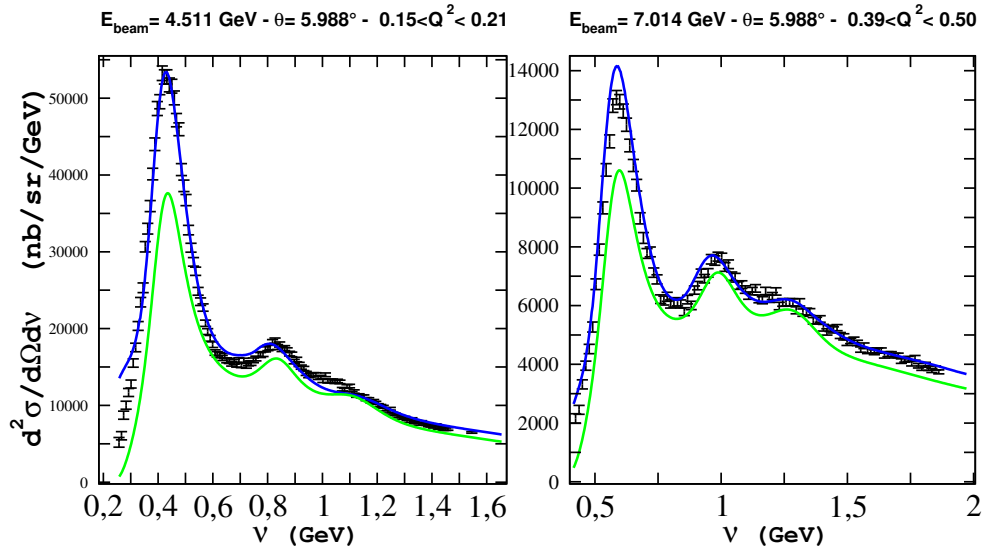


Figura 4.1. Sezione d'urto per deuterio confrontata con l'andamento calcolato con fit BR (curva verde) e con una curva di riferimento (blu). Dati dell'esperimento E49A6 [28] presso SLAC .

Nella Fig. 4.1 si vede che la parametrizzazione di BR sottostima largamente la sezione d'urto alla risonanza Δ . Questa discrepanza deve essere imputata principalmente a dei fattori di forma del neutrone poco accurati, dal momento che per il protone l'accordo con i dati sperimentali è molto buono, come si vede dai dati della Sezione 3.6. Il calcolo della sezione d'urto mediante l'introduzione della smearing function costituisce l'elemento di criticità dei lavori di BR.

L'altezza della risonanza $\Delta(1232)$ è sensibilmente più bassa nel caso del neutrone rispetto al protone, incompatibilmente con la simmetria di isospin, come si può vedere dal grafico di $\omega W_2(W^2, Q^2)$ riportato in Fig. 4.2 . Questo aspetto è stato messo in evidenza da Benhar e Meloni [25].

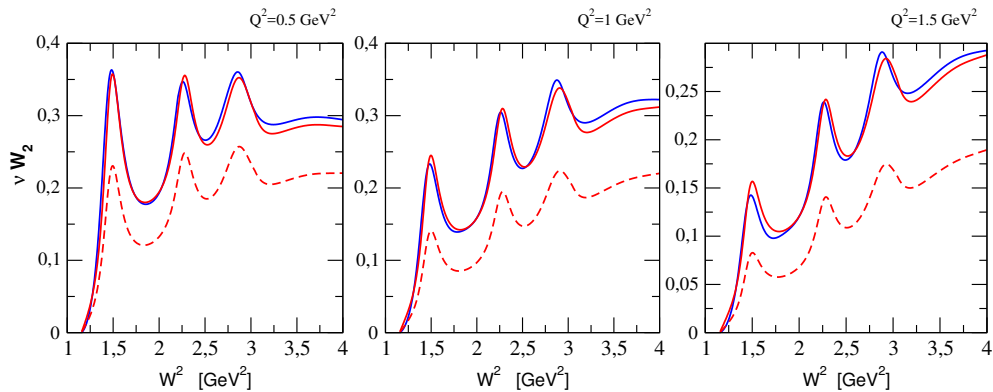


Figura 4.2. andamento di ωW_2 in funzione di W^2 per vari valori di Q^2 ; curva rossa continua protone di BR, curva rossa tratteggiata neutrone di BR e curva blu continua protone di BC.

Non ritenendo soddisfacente il fit di BR abbiamo cercato di tenere fede alla forma funzionale delle funzioni di struttura del deuterio che si ottengono dall'integrazione dei fattori di forma dei nucleoni liberi con la funzione spettrale, come in Eq. (2.29) ed Eq. (2.30), utilizzando la distribuzione d'impulso del deuterio calcolata in [29]. Per la forma funzionale del fit abbiamo scelto di utilizzare quella del protone di BC [26] che prevede due fit indipendenti per la sezione d'urto longitudinale σ_L e trasversa σ_T , ognuno dei quali necessita di cinquanta parametri.

Abbiamo utilizzato il solo fit di σ_T ed abbiamo dedotto σ_L dal rapporto R. La funzione R è stata presa dal protone con una piccola modifica: sono stati introdotti due parametri di riscaldamento degli argomenti della funzione in questo modo:

$$R(Q^2, W^2) \rightarrow R(a_0 Q^2, W_{min}^2 + a_1 (W^2 - W_{min}^2)) \quad ,$$

dove $W_{min} = (m + m_\pi)$ è il minimo valore di W per lo scattering inelastico. Abbiamo utilizzato, come anticipato, le formule (2.29) e (2.30) per il calcolo della sezione d'urto del deuterio ed abbiamo variato i (50+2) parametri del fit di σ_T e di R al fine di minimizzare il χ^2 calcolato utilizzando 2625 dati sperimentali di sezioni d'urto di deuterio. Il χ^2 finale che abbiamo ottenuto è 33400 (per gli stessi dati il χ^2 del fit di BC del deuterio è 37700) e quindi il χ^2 ridotto di 14. Il range di utilizzo del nostro fit $1.1 < W^2 < 3.5 \text{ GeV}^2$ e $Q^2 < 3 \text{ GeV}^2$ è minore di quello indicato da Bosted e Christy per il protone, e riflette i limiti cinematici del calcolo della sezione d'urto del deuterio.

I dati sperimentali delle sezioni d'urto utilizzati per la minimizzazione del χ^2 sono stati quelli relativi agli esperimenti JLab E99 [27], SLAC E49A6 e E49A10 [28], SLAC E49B [22], SLAC E61 [30], SLAC E8920 [31]. La Fig. 4.3 mostra una visione d'insieme dei dati sperimentali delle sezioni d'urto impiegate nel calcolo del χ^2 .

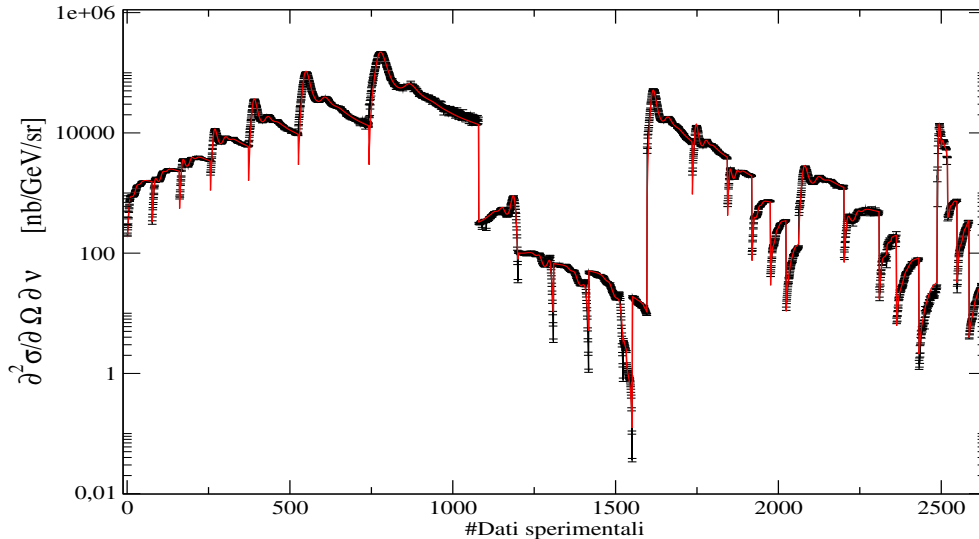


Figura 4.3. Dati sperimentali utilizzati per il calcolo del fit del neutrone. Sono indicati in ordine di acquisizione ed il fatto che riproducano l'immagine della sezione d'urto dipende dal fatto che sono stati presi ordinatamente per ω crescenti, la curva rossa è la sezione d'urto finale ottenuta dal fit.

Nelle Fig. 4.4-4.7 riportiamo alcuni confronti tra le sezioni d'urto misurate e quelle calcolate usando le funzioni di struttura del protone di BC e quelle del neutrone risultante dal nostro fit (curva azzurra). Le curve rosse rappresentano le sezioni d'urto calcolate con il protone ed il neutrone di BR, mentre quella blu è la curva relativa al fit di BC del deutone come spiegato precedentemente.

Ripetiamo che le funzioni azzurre e rossa differiscono da quella blu (fit di BC per il deutone) in quanto sono calcolate a partire dalle funzioni di struttura del protone e del neutrone con il metodo dell'approssimazione impulsiva, Eq. (2.27). Il fit di BC per il deutone è invece un fit complessivo della sezione d'urto e non porta informazioni riguardo alle sezioni d'urto dei nucleoni.

Il quadro che emerge dalle Fig. 4.4-4.7 suggerisce che la nostra parametrizzazione fornisca una descrizione accurata nella regione in cui sono chiaramente visibili i picchi corrispondenti all'eccitazione delle risonanze. D'altra parte si osservano alcune discrepanze nella regione di $W^2 > 3.5 \text{ GeV}^2$ dove è dominante la diffusione profondamente inelastica.

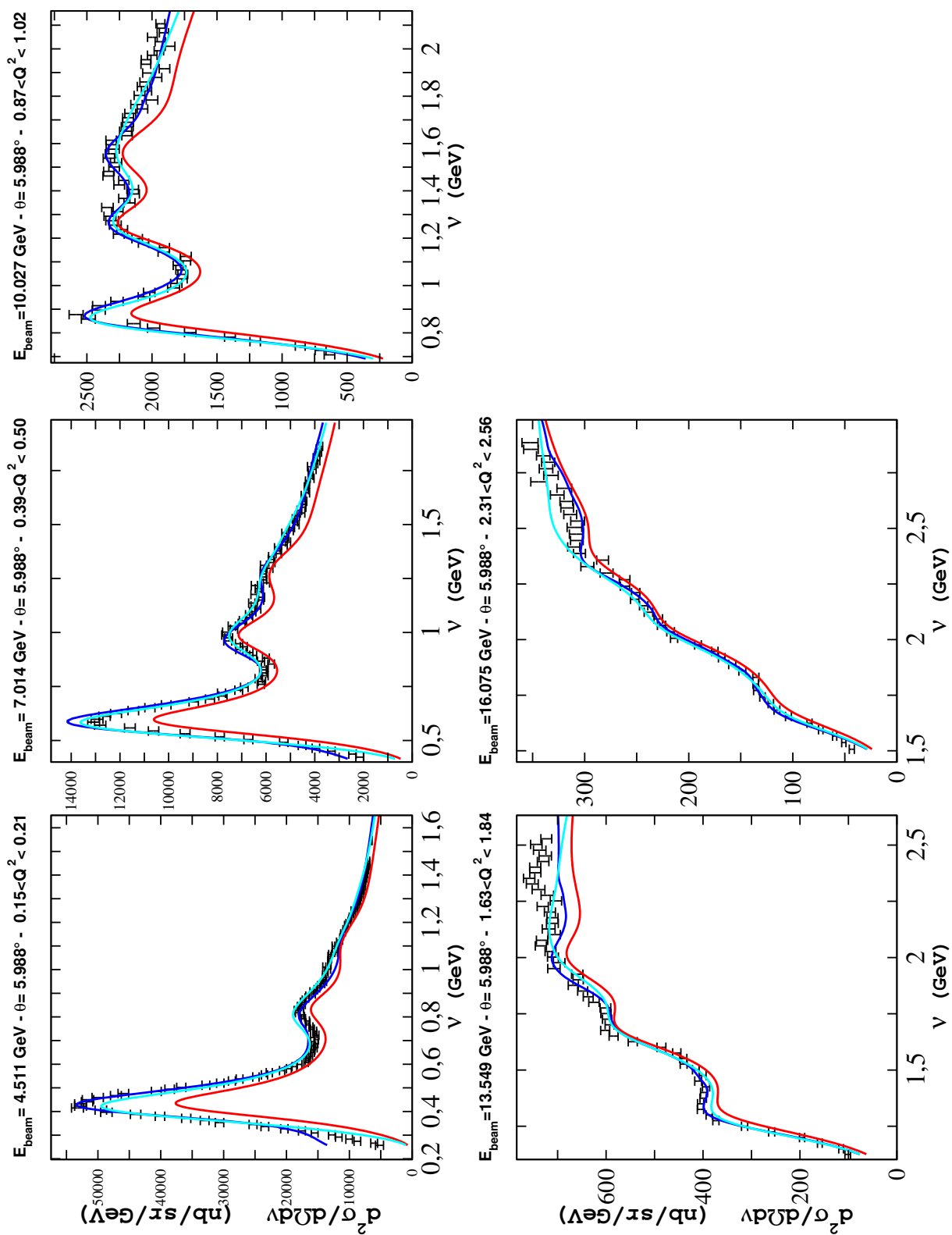


Figura 4.4. Sezione d'urto elettrone-deuterio da esperimento E49A6 presso SLAC[28]. Il significato delle curve è esposto nel capitolo

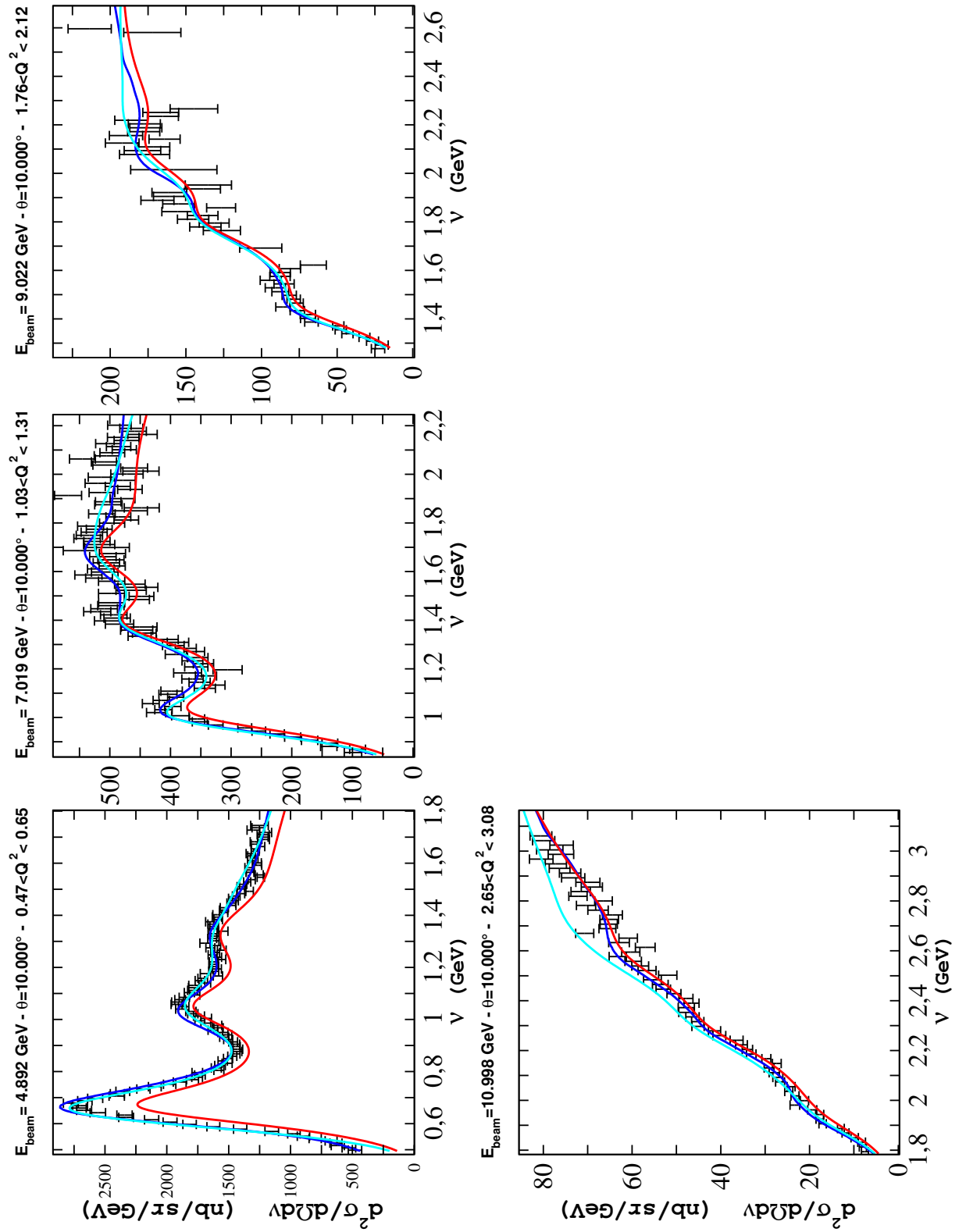


Figura 4.5. Sezione d'urto elettrone-deuterio da esperimento E49A10 presso SLAC [28].

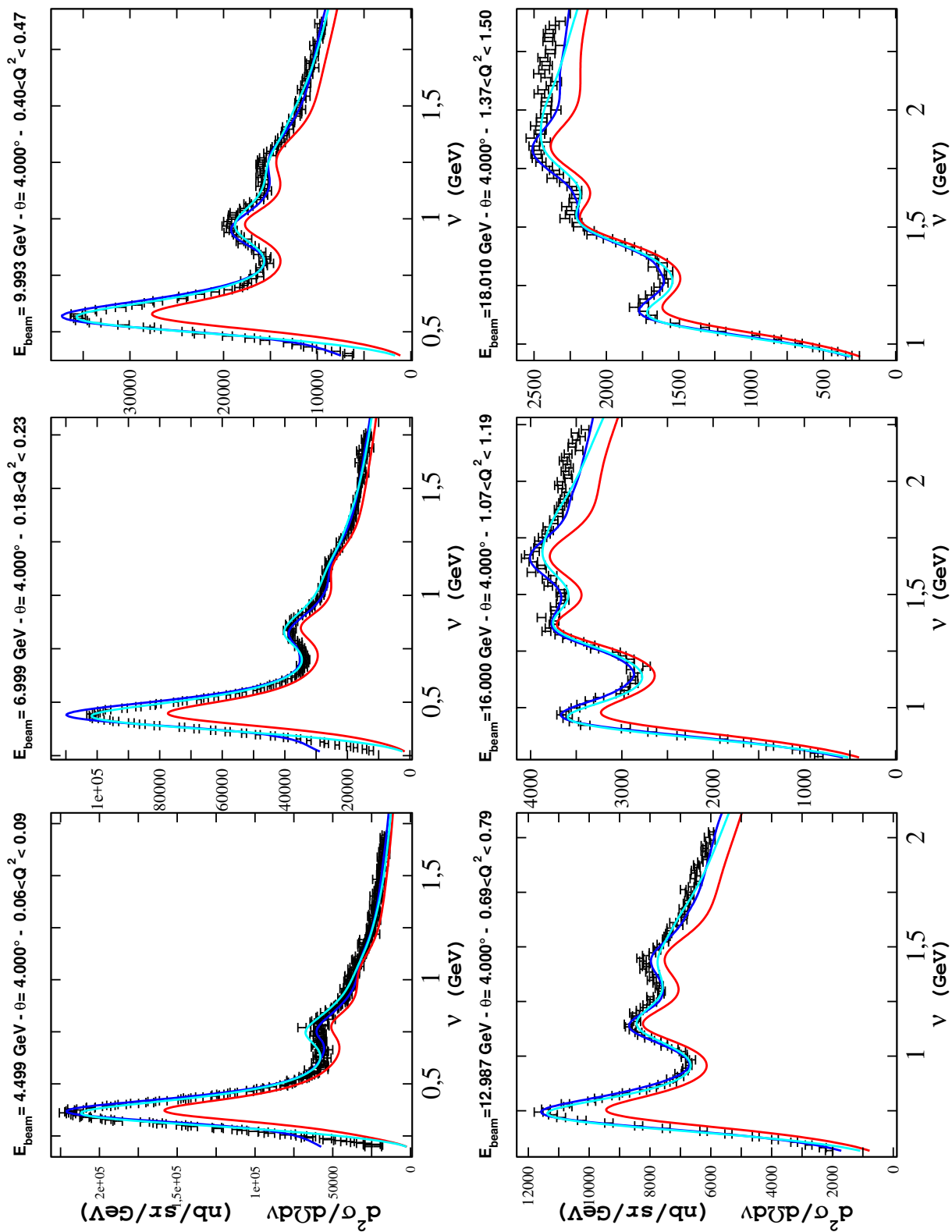


Figura 4.6. Sezione d'urto elettrone-deuterio da esperimento E61 presso SLAC [30]

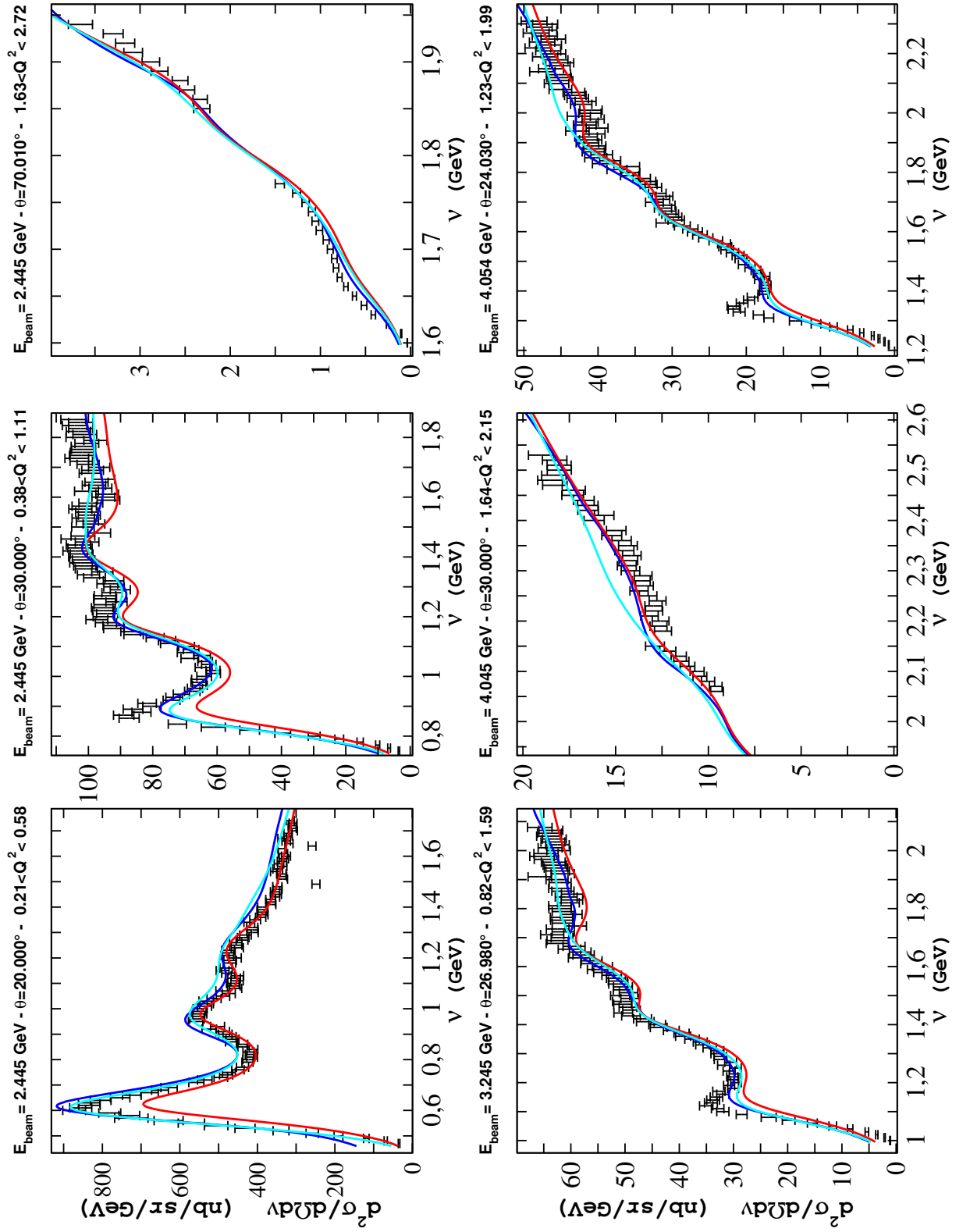


Figura 4.7. Sezione d'urto elettrone-deuterio da esperimento E99 presso JLab [27]

Conclusioni e Prospettive

Le funzioni di struttura elettromagnetiche del neutrone, nella regione cinematica corrispondente alla produzione di risonanze e alla diffusione profondamente inelastica, sono state determinate da un fit dei dati disponibili nel database delle sezioni d'urto elettrone-deutone misurate a SLAC e JLab.

Le funzioni di struttura dei nucleoni sono necessarie per il calcolo delle sezioni d'urto nucleari nella regione cinematica corrispondente a momento trasferito $|\mathbf{q}| \gtrsim 0.5 \text{ GeV}$, nella quale sono applicabili l'approssimazione impulsiva ed il formalismo basato sulla funzione spettrale.

Calcoli accurati delle sezioni d'urto elettromagnetiche su nuclei come il carbonio e l'ossigeno—largamente utilizzati come rivelatori di neutrini—rappresentano un primo passo nello sviluppo di modelli della risposta nucleare alle interazioni deboli.

La necessità di un fit *globale*—che includa cioè sia la produzione di risonanze che la diffusione profondamente inelastica—nasce dalla difficoltà di separare in modo indipendente dal modello i contributi di questi due canali di reazione. In particolare, la descrizione del settore profondamente inelastico in termini di distribuzioni di partoni, generalmente usata nelle simulazioni, non sembra essere giustificata nelle regioni di basso Q^2 , tipicamente $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$, rilevanti per l'osservazione delle oscillazioni dei neutrini.

Rispetto alla precedenti analisi di Bodek e Ritchie [23], quella da noi effettuata si basa su maggiore quantità di dati a basso Q^2 , fino a $Q^2 \sim 0.1 \text{ GeV}^2$, la cui inclusione modifica significativamente le funzioni di struttura del neutrone. In questo senso, i nostri risultati si possono considerare complementari a quella della Ref. [23], che forniscono una descrizione marginalmente migliore dei dati nella regione di alto Q^2 e grande massa invariante dello stato finale, dove domina la componente profondamente inelastica.

Lo scopo ultimo del progetto che abbiamo iniziato con questo lavoro di Tesi, è l'estensione al calcolo del contributo della corrente debole vettoriale alle sezioni d'urto neutrino-nucleo. La descrizione quantitativa di queste sezioni d'urto è essenziale per ridurre l'errore sistematico negli esperimenti che si propongono di osservare le oscillazioni dei neutrini, in quanto permette una ricostruzione più accurata dell'energia del neutrino.

Appendice A

Calcolo del tensore adronico per nucleoni in moto

Sono riportati in questa sezione i calcoli espliciti per i fattori $\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{P})}{\varepsilon} + \frac{(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{P})}{\varepsilon'}$ e $\frac{(\mathbf{k}\mathbf{P})(\mathbf{k}'\mathbf{P})}{\varepsilon\varepsilon'}$ che compaiono del prodotto dei tensori leptonic e adronico del capitolo ??.

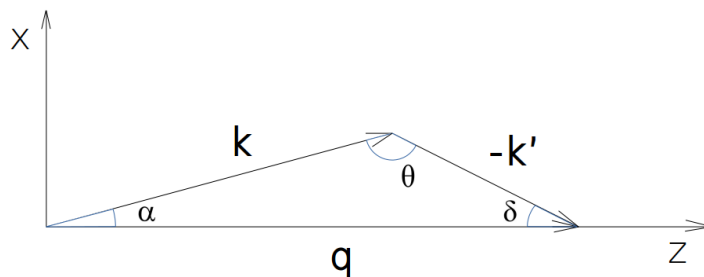


Figura A.1. schema degli impulsi dell'elettrone

Riferendoci alla figura possiamo scrivere le seguenti relazioni

$$k_x = |k| \sin(\alpha) ; \quad k_z = |k| \cos(\alpha)$$

$$k'_x = |k'| \sin(\delta) ; \quad k'_z = -|k'| \cos(\delta)$$

Sfruttando inoltre il teorema dei seni (Eulero)

$$\sin(\alpha) = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{q}|} \sin(\theta) ; \quad \sin(\delta) = \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{q}|} \sin(\theta) .$$

Dal momento che non c'è impulso trasferito al fotone nella direzione x allora

$$k_x = k'_x = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{|\mathbf{q}|} \sin(\theta)$$

mentre per le componenti parallele a \mathbf{q} vale

$$\begin{aligned} k_z &= \frac{\varepsilon}{|\mathbf{q}|} \sqrt{|\mathbf{q}|^2 - \varepsilon'^2 \sin^2(\theta)} = \frac{\varepsilon}{|\mathbf{q}|} \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\varepsilon' \cos(\theta) - \varepsilon'^2 + \varepsilon'^2 \cos^2(\theta)} \\ &= \frac{\varepsilon}{|\mathbf{q}|} (\varepsilon - \varepsilon' \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Analogo discorso per la variabile k'_z

$$\begin{aligned} k'_z &= \frac{\varepsilon'}{|\mathbf{q}|} \sqrt{|\mathbf{q}|^2 - \varepsilon^2 \sin^2(\theta)} = \frac{\varepsilon'}{|\mathbf{q}|} \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\varepsilon' \cos(\theta) - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \cos^2(\theta)} \\ &= \frac{\varepsilon'}{|\mathbf{q}|} (-\varepsilon' + \varepsilon \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Possiamo a questo punto calcolare i prodotti scalari che compaiono in (2.8)

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{P})}{\varepsilon} + \frac{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{P})}{\varepsilon'} &= \frac{P_x \sin(\theta)}{|\mathbf{q}|} (\varepsilon + \varepsilon') + \frac{P_z}{|\mathbf{q}|} (-\varepsilon' + \varepsilon \cos(\theta) + \varepsilon - \varepsilon' \cos(\theta)) \\ &= \frac{P_x \sin(\theta)}{|\mathbf{q}|} (\varepsilon + \varepsilon') + 2 \frac{P_z}{|\mathbf{q}|} \omega \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Il secondo termine che ci interessa è

$$\begin{aligned}
\frac{(\mathbf{k}\mathbf{P})(\mathbf{k}'\mathbf{P})}{\varepsilon\varepsilon'} &= \frac{P_x^2 k_x k'_x + P_z^2 k_z k'_z + P_x P_z (k_x k'_z + k_z k'_x)}{\varepsilon\varepsilon'} \\
&= \frac{P_z^2}{|\mathbf{q}|^2} (\varepsilon - \varepsilon' \cos(\theta)) (-\varepsilon' + \varepsilon \cos(\theta)) + \frac{P_x^2}{|\mathbf{q}|^2} \varepsilon \varepsilon' \sin^2(\theta) \\
&\quad + \frac{P_x P_z}{|\mathbf{q}|^2} \sin(\theta) \cos(\theta) (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \\
&= P_z^2 \left[\frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - P_x^2 \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&\quad + \frac{P_x P_z}{2|\mathbf{q}|^2} \sin(2\theta) (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2)
\end{aligned}$$

Appendice B

Calcolo del prodotto $L_{\mu\nu}\tilde{w}_N^{\mu\nu}$

Occupiamoci di calcolare il prodotto tra i tensori leptonic e adronico definiti in eq. (2.2) ed in eq. (2.26). Indichiamo per comodità il tensore adronico $\tilde{w}_{\mu\nu}$

$$\tilde{w}_{\mu\nu} = W_1 A_{\mu\nu} + \frac{W_2}{m^2} B_{\mu\nu}$$

Gli elementi di $A_{\mu\nu}$, con $\mu, \nu < 3$, non nulli sono:

$$A_{00} = \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{q}^2} - 1 \right)$$

$$A_{11} = A_{22} = 1$$

Gli elementi di $B_{\mu\nu}$, con $\mu, \nu < 3$, non nulli sono:

$$B_{00} = \left(P_0 - \tilde{\omega} \frac{(P\tilde{q})}{\tilde{q}^2} \right)^2$$

$$B_{01} = \left(P_0 - \tilde{\omega} \frac{(P\tilde{q})}{\tilde{q}^2} \right) P_x$$

$$B_{02} = \left(P_0 - \tilde{\omega} \frac{(P\tilde{q})}{\tilde{q}^2} \right) P_y$$

$$B_{12} = P_x P_y ; \quad B_{11} = P_x^2 ; \quad B_{22} = P_y^2$$

Per quanto riguarda gli elementi del tensore leptónico $L_{\mu\nu}$ valgono le equazioni:

$$\begin{aligned}
L_{00} &= 4\varepsilon\varepsilon' \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
L_{03} &= 4\varepsilon\varepsilon' \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}\right) \\
L_{33} &= 4\varepsilon\varepsilon' \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}\right)^2 \\
L_{11} &= 4\varepsilon\varepsilon' \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}\right) \\
L_{22} &= 4\varepsilon\varepsilon' \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
L_{02} = L_{12} &= 0; \quad L_{01} = 2(\varepsilon k'_x + \varepsilon' k_x)
\end{aligned}$$

Per calcolare le grandezze L_{03} , L_{33} e L_{11} sono state sfruttate le identità ricavate nell'appendice A.

Il prodotto dei tensori $L_{\mu\nu}\tilde{w}^{\mu\nu}$ risulta essere

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}\tilde{w}^{\mu\nu} &= W_1 \left\{ A_{00} \left[L_{00} - 2\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}L_{03} + \left(\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}\right)^2 L_{33} \right] + L_{11}A_{11} + L_{22}A_{22} \right\} + \\
&+ \frac{W_2}{m^2} \left\{ B_{00} \left[L_{00} - 2\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}L_{03} + \left(\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}\right)^2 L_{33} \right] + B_{02} \left[-2L_{02} + 2\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}L_{23} \right] + \right. \\
&\left. + B_{01} \left[-2L_{01} + 2\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}L_{13} \right] + B_{11}L_{11} + B_{22}L_{22} + 2B_{12}L_{12} \right\}
\end{aligned}$$

Andando a sostituire valori calcolati all'inizio del capitolo otteniamo

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}\tilde{w}^{\mu\nu} &= 4\varepsilon\varepsilon' \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ W_1 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2}\right)^2 \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{q}^2} - 1\right) - \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} + 2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \right. \\
&\left. + \frac{W_2}{m^2} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2}\right)^2 \left(P_0 - \tilde{\omega} \frac{(P\tilde{q})}{\tilde{q}^2}\right)^2 + P_x^2 \left(\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}\right) + P_y^2 \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Per arrivare in fine al risultato

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu}\tilde{w}_{\mu\nu} = & \left(4EE'\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \left\{ \left[W_1 + \frac{W_2}{2m^2}|\mathbf{p} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2 \right] 2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right. \\
& \left. + W_1 \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} \left(\frac{q^2}{\tilde{q}^2} - 1 \right) + \frac{W_2}{m^2} \left[\frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(p\tilde{q})}{\tilde{q}^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} |\mathbf{p} \wedge \hat{\mathbf{q}}|^2 \right] \right\} .
\end{aligned}
\tag{B.1}$$

I termini proporzionali a P_x o P_y , come B_{01} e B_{02} non sono stati trascritti nel prodotto dei tensori perché lo scopo del calcolo è la sezione d'urto ed in tale formula questi termini vengono moltiplicati per la funzione spettrale che è una funzione del modulo di $|\mathbf{P}|$, quindi tali termini verrebbero eliminati dall'integrazione con la funzione spettrale perché dispari per scambio $P_x \rightarrow -P_x$.

Bibliografia

- [1] Proceedings of the *First Workshop on Neutrino-Nucleus Interactions in the Few-GeV Region*, Eds. J.G. Morfin, M. Sakuda, and Y. Suzuki, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.), **112** (2002).
- [2] H. Bethe e R. Peierls, Nature **133**, 532 (1934).
- [3] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.* (MiniBooNE Collaboration), Phys. Rev. D **81**, 092005 (2010).
- [4] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.* (MiniBooNE Collaboration), Phys. Rev. D **82**, 092005 (2010).
- [5] O. Benhar, P. Huber, C. Mariani, and D. Meloni, Phys. Rep. **700**, 1 (2017).
- [6] O. Benhar, D. Day, and I. Sick, Rev. Mod. Phys. **80**, 189 (2008).
- [7] <https://hallcweb.jlab.org/resdata/database/>
- [8] F. Reines e C.L. Cowan, Nature **178**, 446 (1956).
- [9] W. Pauli, Letter to L Meitner and her colleagues, December 1930. In *Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u.a. Band II: 1930-1939* (Springer, Heidelberg, 1985).
- [10] G. Danby *et al.*, Phys. Rev. Lett. **9**, 36 (1962).
- [11] K. Kodama *et al.* (DONUT Collaboration), Phys. Rev. D **78**, 052002 (2008).
- [12] B. Pontecorvo, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33**, 549 (1957); JETP **6**, 429 (1957).
- [13] K. Abe *et al.* (T2K Collaboration), Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. **A 659**, 106 (2011)
- [14] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.* (MiniBooNE Collaboration), Phys. Rev. Lett. **102**, 101802 (2009).
- [15] T. de Forest, Nucl. Phys. **A392**, 232-248 (1983)
- [16] L. Lovitch and S. Rosati, Phys. Rev. **140**, B877 (1965)
- [17] W. Rarita and J. Schwinger. On a theory of particles with half integral spin. Phys. Rev. **60**, 61 (1941).

-
- [18] O. Lalakulich, E. A. Paschos, and G. Piranishvili, Phys. Rev. D **74**, 014009 (2006)
- [19] O. Lalakulich and E. A. Paschos, Phys. Rev. D **71**, 074003 (2005)
- [20] A. Bodek, Un-ki Yang, *Axial and Vector Structure Functions for Electron- and Neutrino- Nucleon Scattering Cross Sections at all Q^2 using Effective Leading order Parton Distribution Functions*, arXiv:1011.6592 [hep-ph]
- [21] Yongguang Liang, Ph.D Thesis, American University (2003)
- [22] A. Bodek *et al*, Phys. Rev. D, **20**(1979)1471
- [23] A. Bodek and J. L. Ritchie, Phys. Rev. D, **23**(1981)1070
- [24] V. Rittenberg and H. R. Rubinstein, Phys. Lett. **35B**(1972)501
- [25] O. Benhar and D. Meloni, Phys. Rev. Lett. **97**(2006)192301
- [26] M. E. Christy and P. E. Bosted, Phys. Rev. C, **81**(2010)055213
- [27] Maria Niculescu, Ph.D Thesis, Hampton University (1999)
- [28] J. S. Poucher, Ph. D. thesis, MIT (1971)
- [29] R. Schiavilla. V. R. Pandharipande, R. B. Wiring, Nucl. Phys. A **449** (1986)219
- [30] S. Stein *et al* Phys. Rev. D **12**(1975)1884
- [31] S. P. Malace *et al* Phys. Rev. C **80**(2009)035207