



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E
NATURALI

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN FISICA

Studio delle interazioni
neutrino-nucleo
ad energie intorno a 1 GeV

CANDIDATA

ALESSIA DI GIULIO

RELATORE INTERNO

PROF. OMAR BENHAR NOCCIOLI

ANNO ACCADEMICO 2013/2014

Indice

Introduzione	III
1 I neutrini oltre il Modello Standard	1
1.1 I neutrini di Dirac	2
1.2 La teoria di Majorana	3
1.3 Mixing dei neutrini	4
1.3.1 Il meccanismo see-saw	6
1.3.2 mixing per tre generazioni: la matrice PMNS	7
1.4 Oscillazioni dei neutrini nel vuoto	11
1.5 Esperimenti sui neutrini	18
1.5.1 MiniBooNE	20
2 Struttura e dinamica nucleare	23
2.1 Interazione nucleare	23
2.2 Teoria di Yukawa e potenziali fenomenologici	25
2.3 Modello a gas di Fermi	29
2.4 Teoria a molti corpi non relativistica	32
3 Interazione di corrente carica neutrino-nucleone	35
3.1 Sezione d'urto inclusiva $\nu - N$	35
3.2 Diffusione quasi elastica	37
3.3 Produzione di risonanze	43
3.4 Scattering profondamente anelastico	46
4 Interazione neutrino-nucleo	51
4.1 Approssimazione impulsiva	51
4.1.1 CCQE	55
4.2 La funzione spettrale	58

5 Risultati numerici	61
5.1 Calcolo della sezione d'urto nucleare col metodo Monte Carlo	61
5.2 Confronto con MiniBooNE	65
Conclusioni	73
Appendice A	75
Ringraziamenti	77
Bibliografia	79

Introduzione

L'interesse per lo studio delle interazioni dei neutrini con i nuclei è cresciuto in maniera considerevole negli ultimi anni, dopo che i risultati sperimentali hanno fornito prove convincenti dell'esistenza delle oscillazioni di *flavour* [1, 2, 3]. Gli esperimenti che si propongono di misurare i parametri di oscillazione dei neutrini si basano infatti sulle osservazioni delle loro interazioni con i nuclei. È noto che i neutrini interagiscono solo debolmente, con sezioni d'urto piccolissime dell'ordine di 10^{-38} cm² per nucleone (come mostrato in Figura 1), sei ordini di grandezza inferiori rispetto alle sezioni d'urto corrispondenti degli elettroni.

L'impiego di nuclei pesanti nelle nuove generazioni di esperimenti è stato quindi motivato dalla necessità di raccogliere un numero statisticamente significativo di eventi. D'altra parte, questa scelta pone problemi molto complessi per quanto riguarda l'interpretazione dei segnali osservati, in quanto richiede una caratterizzazione quantitativa della risposta nucleare alle interazioni deboli. Tali problemi non si presentavano negli esperimenti del passato, effettuati usando come bersagli idrogeno e deuterio.

La conoscenza dell'energia del neutrino, generalmente distribuita secondo un flusso che copre un ampio intervallo di valori, è fondamentale per la determinazione del periodo di oscillazione. La sua ricostruzione risulta però possibile solamente attraverso l'osservazione delle particelle prodotte al vertice di interazione. In questo senso lo studio dei processi di corrente carica risulta molto più efficiente rispetto ai processi in corrente neutra, grazie alla presenza dei leptoni carichi nello stato finale.

È opinione largamente condivisa che la precisione dei moderni esperimenti rende la descrizione degli effetti nucleari una delle maggiori fonti di errore sistematico [4]. Un modo possibile per ridurre questa incertezza, oltre allo sviluppo di modelli teorici più accurati, è l'utilizzo di fasci di neutrini prodotti dai moderni acceleratori per studiare direttamente le sezioni d'urto con i nuclei. Esperimenti di questo tipo sono attualmente in corso [5, 6, 7].

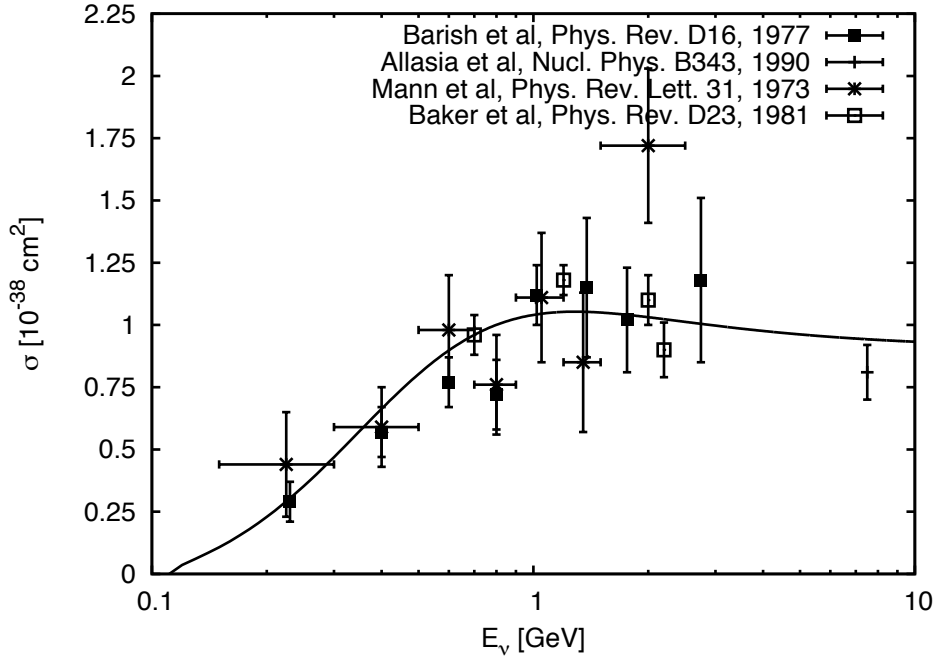


Figura 1: Sezione d'urto totale per il processo $\nu_\ell + n \rightarrow \ell^- + p$. I dati sono ottenuti da scattering su deuterio negli esperimenti con camere a bolle.

In questa lavoro di Tesi, viene affrontato lo studio degli effetti nucleari sulla sezione d'urto dei processi di corrente carica neutrino-nucleo per energie dei neutrini ~ 1 GeV. L'approccio usato si basa sull'approssimazione impulsiva, che risulta applicabile nel momento in cui il quadrimpulso \mathbf{q} trasferito nel processo di diffusione è tale che la risoluzione spaziale della sonda $\lambda \sim \mathbf{q}^{-1}$ risulta molto minore della distanza media tra i nucleoni del bersaglio. Poiché all'aumentare del momento trasferito la sonda diviene sensibile ad una regione di dimensione sempre più piccola all'interno del nucleo, questo può essere considerato come un insieme di nucleoni individuali. In queste condizioni, l'interazione coinvolge un solo nucleone ed il sistema residuo di $(A - 1)$ nucleoni evolve in maniera indipendente dalle particelle prodotte al vertice elementare. La sezione d'urto nucleare si riduce quindi alla somma incoerente delle sezioni d'urto di interazione col singolo nucleone, la cui distribuzione in impulso ed energia risulta descritta dalla funzione spettrale, che è una caratteristica intrinseca del nucleo ed è determinata dal modello che si utilizza per descrivere le forze nucleari.

La Tesi è strutturata come segue.

Nel Capitolo 1, verranno introdotte le principali nozioni relative alla fisica del neutrino, la cui descrizione, a fronte dell'evidenza sperimentale delle oscillazioni di flavour, non può essere affrontata all'interno del Modello Standard della Fisica delle particelle elementari. Dopo aver quindi illustrato la teoria di Dirac e di Majorana per i neutrini massivi, verrà descritto il meccanismo di mixing e le sue implicazioni per il fenomeno delle oscillazioni. La parte finale di questo Capitolo è dedicata alle problematiche sperimentali legate alla rivelazione dei neutrini e ad una sintetica descrizione dell'esperimento MiniBooNE.

Nel Capitolo 2, si introdurranno gli elementi di dinamica nucleare necessari ad affrontare la descrizione dell'interazione neutrino-nucleo. Si vedrà come l'uso di modelli semplificati a particelle indipendenti, come il modello a Gas di Fermi, possano in prima approssimazione descrivere gli aspetti essenziali della struttura nucleare. Il limite di questi modelli consiste nel non tener conto delle forti correlazioni esistenti tra protoni e neutroni; si discuterà quindi la possibilità di ottenere una descrizione più accurata e di come questo possa essere fatto all'interno della *Nuclear Many-Body Theory*.

Il Capitolo 3, sarà dedicato alla trattazione dei processi elementari di interazione neutrino-nucleone; verranno in particolare ricavate le sezioni d'urto relative ai tre canali di reazione principali, rispettivamente diffusione quasi elastica, eccitazione di risonanze barioniche e diffusione profondamente anelastica.

Nel Capitolo 4, attraverso gli elementi acquisiti nei precedenti, si ricaverà l'espressione della sezione d'urto nucleare in approssimazione impulsiva, che è possibile ottenere a partire dalla sezione d'urto elementare integrando con un peso dato dalla funzione spettrale.

Nel Capitolo 5, verrà delineato in dettaglio come, attraverso l'uso di una funzione spettrale realistica, è stato possibile calcolare la sezione d'urto quasi elastica di neutrini su carbonio con il metodo Monte Carlo. Verranno esposti i risultati dei calcoli numerici ed il loro confronto con le misure effettuate dall'esperimento MiniBooNE e verranno indicati i possibili sviluppi futuri di questo lavoro.

1 I neutrini oltre il Modello Standard

I neutrini sono le particelle più elusive finora scoperte. Risultano essere i soli fermioni elementari ad interagire esclusivamente attraverso l'interazione debole poiché, in quanto leptoni privi di carica elettrica, sono insensibili sia all'interazione forte che a quella elettromagnetica.

Il Modello Standard delle particelle elementari (MS) che descrive l'interazione forte, elettromagnetica e debole delle particelle elementari è una teoria di gauge basata sul gruppo di simmetria locale $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. La simmetria di colore è la simmetria esatta su cui si basa la cromodinamica quantistica (QCD), mentre la teoria elettrodebole si basa sul sottogruppo $SU(2)_L \times U(1)_Y$. I neutrini ν_l (e gli antineutrini $\bar{\nu}_l$) risultano sempre prodotti nei processi di interazione debole in stati *left-handed* (LH) (*right-handed* (RH)) e vengono quindi descritti da spinori a chiralità definita $\nu_{lL}(x)$ ($\bar{\nu}_{lR}(x)$) dove $l = e, \mu, \tau$; questi nella teoria elettrodebole sono raggruppati in doppietti di isospin debole assieme al leptone carico dello stesso *flavour*

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}. \quad (1.0.1)$$

Non esiste attualmente nessuna evidenza sperimentale dell'esistenza di neutrini RH (antineutrini LH) che nel formalismo del MS sono descritti da singoletti di $SU(2)_L$. Non accoppiandosi con i bosoni deboli W^\pm e Z^0 non interagiscono con la materia e vengono per questo chiamati *sterili*. I risultati sperimentali degli ultimi anni hanno fornito prove convincenti dell'esistenza di oscillazioni, ovvero di transizioni in volo tra i diversi stati di flavour dei neutrini; questo implica che i neutrini non sono particelle *massless* come descritte nel MS ed è naturale supporre che l'ordine di grandezza della loro massa sia legato all'esistenza di una nuova scala di massa fondamentale.

In questo Capitolo, verrà esposto come il neutrino massivo possa essere descritto attraverso la nota teoria di Dirac, in cui particella e antiparticella sono distinte, oppure attraverso la teoria di Majorana, in cui la particella risulta identica alla sua antiparticella. Sulla base dei dati esistenti è impossibile stabilire se il neutrino sia una particella di Dirac o di Majorana, anche se questo è di fondamentale importanza per capire l'origine delle masse.

1.1 I neutrini di Dirac

Si consideri la densità lagrangiana per le particelle fermioniche massive

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) , \quad (1.1.1)$$

da cui si deriva la nota equazione di Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 . \quad (1.1.2)$$

È sempre possibile scrivere un generico campo spinoriale $\psi(x)$ in termini delle sue componenti LH e RH:

$$\psi = \psi_R + \psi_L , \quad (1.1.3)$$

dove

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}\psi = \mathcal{P}_R\psi , \quad (1.1.4a)$$

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}\psi = \mathcal{P}_L\psi . \quad (1.1.4b)$$

sono i cosiddetti *spinori di Weyl*.

Scrivendo la lagrangiana in termini dei campi ψ_R e ψ_L

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - m\bar{\psi}_R\psi_L - m\bar{\psi}_L\psi_R , \quad (1.1.5)$$

e derivando le equazioni del moto

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R = m\psi_L , \quad (1.1.6a)$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L = m\psi_R , \quad (1.1.6b)$$

risulta evidente come la loro evoluzione spazio-temporale sia accoppiata dal termine di massa. Nel limite in cui il fermione abbia massa nulla, si ottengono due equazioni disaccoppiate

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0, \quad (1.1.7a)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = 0, \quad (1.1.7b)$$

le cosiddette equazioni di Weyl, secondo cui un fermione a massa nulla può essere descritto da un solo campo a chiralità definita con due sole componenti indipendenti. La teoria a due componenti incorporata nel Modello Standard descrive i neutrini *massless* tramite spinori di Weyl LH e gli antineutrini con spinori RH. Come precedentemente detto, è ormai un'evidenza sperimentale che i neutrini siano particelle massive sebbene la loro massa sia diversi ordini di grandezza più piccola di quella dell'elettrone, il leptone carico più leggero. Il termine di massa per i neutrini può essere generato dal Meccanismo di Higgs in modo analogo ai leptoni carichi

$$\mathcal{L}_{mass}^D = -m_D \bar{\nu} \nu \quad (1.1.8)$$

$$= \frac{y^\nu v}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R), \quad (1.1.9)$$

dove y^ν è la costante di accoppiamento di Yukawa e v è il valore di aspettazione sul vuoto del campo di Higgs. Come risulta evidente l'unica estensione necessaria è l'introduzione della componente RH, ν_{lR} , del campo del neutrino. ¹

1.2 La teoria di Majorana

Noto che uno spinore a due componenti risulta sufficiente a descrivere un fermione a massa nulla, viene naturale chiedersi se sia veramente necessario uno spinore di Dirac a quattro componenti per descrivere una particella fermionica massiva, la risposta è negativa a patto di assumere la condizione di Majorana

$$\psi = \psi^C = \mathcal{C} \bar{\psi}^T, \quad (1.2.1)$$

dove \mathcal{C} indica l'operatore di coniugazione di carica. Operando sull'equazione (1.2.1) con l'operatore di proiezione \mathcal{P}_L si ottiene

$$\psi_L = \psi_R^C, \quad (1.2.2)$$

¹La teoria non fornisce restrizioni sul numero dei neutrini *sterili* ν_{lR} , perciò l'introduzione di tre campi RH, uno per ogni generazione, non è l'unica estensione possibile del MS.

che indica chiaramente come le componenti a chiralità definita per una particella di Majorana siano tra loro dipendenti e come questa possa essere descritta da un unico spinore a due componenti:

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L + \mathcal{C}\bar{\psi}_L^T. \quad (1.2.3)$$

Il termine di massa che si ottiene per i neutrini in questa teoria è dunque

$$\mathcal{L}_{mass}^M = -\frac{1}{2}m_M(\bar{\nu}_R\nu_L + \bar{\nu}_L\nu_R) \quad (1.2.4)$$

$$= -\frac{1}{2}m_M(\bar{\nu}_L^C\nu_L + \bar{\nu}_L\nu_L^C). \quad (1.2.5)$$

Risulta evidente come particella e antiparticella coincidano e, poiché questo può valere solamente per fermioni privi di carica elettrica, esclusivamente i neutrini tra tutte le particelle elementari possono essere descritti da un campo spinoriale di Majorana. È di fondamentale importanza notare come la lagrangiana di massa \mathcal{L}_{mass}^M non sia invariante per trasformazioni di gauge globali del gruppo $U(1)$

$$\nu_L \longrightarrow \nu_L e^{i\phi}, \quad (1.2.6)$$

si ottiene infatti

$$\mathcal{L}_{mass}^M \longrightarrow \mathcal{L}_{mass}^M = \frac{1}{2}m_M(e^{2i\phi}\nu_L^T\mathcal{C}^\dagger\nu_L + e^{-2i\phi}\nu_L^\dagger\mathcal{C}\nu_L^*), \quad (1.2.7)$$

che indica come la conservazione del numero leptonic totale possa essere violata compatibilmente col fenomeno delle oscillazioni di flavour.

1.3 Mixing dei neutrini

L'unico neutrino di cui si ha evidenza sperimentale è ν_L poiché prodotto nelle interazioni deboli di corrente carica, se viene considerato come l'unico esistente la lagrangiana di massa può contenere solamente il termine di Majorana (1.2.4)²; se si ipotizza anche l'esistenza del campo chirale RH, che si ricorda è permessa dalle simmetrie del MS, è allora possibile avere oltre al termine di massa di Majorana per ν_R , anche il termine di Dirac (1.1.8). La lagrangiana di massa più generale che si può scrivere,

²Il neutrino è quindi una fermione di Majorana

considerando per semplicità una sola generazione di neutrini, è dunque la seguente

$$\mathcal{L}_{mass}^{M+D} = \mathcal{L}^D + \mathcal{L}_L^M + \mathcal{L}_R^M + \quad (1.3.1)$$

$$= -m_D(\bar{\nu}_R\nu_L - \bar{\nu}_L\nu_R) - \frac{1}{2}m_L(\bar{\nu}_L^C\nu_L + \bar{\nu}_L\nu_L^C) - \frac{1}{2}m_R(\bar{\nu}_R^C\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_R^C), \quad (1.3.2)$$

che può essere riscritta in forma compatta

$$\mathcal{L}_{mass}^{M+D} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^C & \bar{\nu}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} + h.c. . \quad (1.3.3)$$

A causa della presenza dei termini fuori diagonale, i campi ν_L e ν_R non hanno massa definita; per ottenere gli autostati di massa occorre naturalmente diagonalizzare la matrice \mathcal{M}

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}; \quad (1.3.4)$$

e questo può essere fatto tramite una trasformazione unitaria U sui campi chirali

$$N_L = U n_L, \quad (1.3.5)$$

dove

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} \quad (1.3.6)$$

è la matrice colonna dei campi a massa definita, e U deve essere tale da soddisfare

$$U^T \mathcal{M} U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (1.3.7)$$

Con la trasformazione (1.3.5) la lagrangiana diviene:

$$\mathcal{L}^{M+D} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \bar{\nu}_k \nu_k, \quad (1.3.8)$$

con

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^C \quad (1.3.9)$$

campo massivo di Majorana.

Nel caso appena visto di una sola generazione di neutrini con entrambe le componenti chirali presenti, la diagonalizzazione del più generico termine di massa implica l'esistenza di due neutrini massivi di Majorana ν_1 e ν_2 , di cui gli autostati di flavour risultano una combinazione lineare.

Limitandosi al caso in cui \mathcal{M} sia reale, la matrice U diventa

$$U = \mathcal{O}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad (1.3.10)$$

con $\rho_k = \pm 1$. scegliendo in modo opportuno la matrice \mathcal{O} in modo che

$$\mathcal{O}^T \mathcal{M} \mathcal{O} = \begin{pmatrix} m'_1 & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix}, \quad (1.3.11)$$

si ottiene i seguenti autovalori per la matrice di massa

$$m'_{1,2} = \frac{1}{2}(m_L + m_R \mp \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D}) \quad (1.3.12)$$

e la seguente condizione per 'angolo di mixing

$$\tan \theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \quad (1.3.13)$$

È facile notare come il ruolo della matrice ρ sia quello di cambiare segno agli autovalori caso in cui risultasse $m'_{1,2} < 0$,

$$U^T \mathcal{M} U = \rho^T \mathcal{O}^T \mathcal{M} \mathcal{O} \rho = \begin{pmatrix} \rho_1^2 m'_1 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 m'_2 \end{pmatrix}, \quad (1.3.14)$$

questo per assolvere alla richiesta di masse fisiche reali e positive.

1.3.1 Il meccanismo see-saw

Si consideri il caso particolare in cui

$$m_L = 0, \quad (1.3.15a)$$

$$m_D \ll m_R. \quad (1.3.15b)$$

Assumere $m_L = 0$ è naturale dal momento che un termine di massa di majorana del tipo (1.2.4) risulta proibito dalle simmetrie del MS; per quanto riguarda la seconda condizione, il termine m_D , generato dal meccanismo di Higgs, risulta invece *protetto* dalle simmetrie del MS e quindi ci si aspetta che il suo ordine di grandezza sia paragonabile a quello della massa del leptone carico della stessa famiglia, (o del quark

della stessa generazione), contrariamente il valore di m_R non può essere stimato all'interno del Modello Standard e per questa ragione si ritiene sia generato da effetti di altissima energia ($10^{14} - 10^{16} \text{ GeV}$), all'interno di teorie estese che si riducono al Modello Standard nel limite di bassa energia. Considerando le condizioni (1.3.15) si ottiene dall'equazione (1.3.12):

$$m_1 = \frac{m_D^2}{m_R}, \quad (1.3.16a)$$

$$m_2 = m_R, \quad (1.3.16b)$$

È evidente come ν_2 risulti molto pesante rispetto a ν_1 la cui massa viene soppressa di un fattore m_D/m_R rispetto a m_D ; questo è il cosiddetto meccanismo *see-saw* che agisce appunto come un'*altalena* tanto più pesante risulta ν_2 , tanto più leggero è ν_1 . L'angolo di mixing risulta

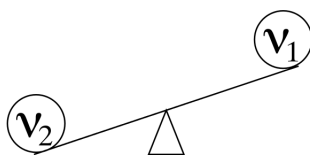


Figura 1.1: Illustrazione del meccanismo see-saw.

$$\tan \theta = 2 \frac{m_D}{m_R} \ll 1 \quad (1.3.17)$$

ed essendo molto piccolo implica che il neutrino leggero ν_1 è essenzialmente composto da ν_L mentre ν_2 è composto essenzialmente dal neutrino sterile ν_R . Il meccanismo *see-saw* fornisce in sostanza una spiegazione plausibile al perché i leptoni carichi e i quark abbiamo una massa molto più grande di quella dei neutrini osservabili.

1.3.2 mixing per tre generazioni: la matrice PMNS

Poiché il Modello Standard comprende tre generazioni di leptoni, il problema che si presenta è del tutto analogo a quello dei quark in cui gli autostati di interazione e di massa non coincidono e risultano legati tra loro dalla matrice di mixing CKM.

Poichè per una trattazione completa è necessario affrontare il problema delle masse considerando tutti e tre gli autostati di flavour, la lagrangiana di massa viene riscritta in presenza dei tre campi LH $\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$ e, per convenzione, di tre campi RH $\nu_{s_1 R}, \nu_{s_2 R}, \nu_{s_3 R}$, assumendo la seguente forma:

$$\mathcal{L}_{mass}^{M+D} = \mathcal{L}^D + \mathcal{L}_L^M + \mathcal{L}_R^M, \quad (1.3.18)$$

con

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{s=s_1, s_2, s_3} \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{sR} M_{s\alpha}^D \nu_{\alpha L} + h.c., \quad (1.3.19a)$$

$$\mathcal{L}_L^M = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{\alpha L}^C M_{\alpha\beta}^L \nu_{\beta L} + h.c., \quad (1.3.19b)$$

$$\mathcal{L}_R^M = -\frac{1}{2} \sum_{s, s'=s_1, s_2, s_3} \bar{\nu}_{sR}^C M_{ss'}^R \nu_{s'L} + h.c.. \quad (1.3.19c)$$

In forma compatta si ottiene

$$\mathcal{L}_{mass}^{M+D} = -\frac{1}{2} \bar{N}_L \mathcal{M}^{D+M} N_L + h.c. \quad (1.3.20)$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^C & \bar{\nu}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^L & M^{D^T} \\ M^D & M^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} + h.c.., \quad (1.3.21)$$

dove N_L raggruppa i 3 + 3 campi LH e \mathcal{M}^{D+M} è la matrice di massa simmetrica 6×6 . Come visto in precedenza, la diagonalizzazione della matrice richiede una trasformazione unitaria sui campi LH di flavour del tipo

$$N_L = V_L^\nu n_L, \quad (1.3.22)$$

dove n_L indica il vettore dei campi a massa definita ν_{kL} , e V è la matrice unitaria che deve essere tale da soddisfare

$$(V_L^\nu)^T \mathcal{M}^{D+M} V_L^\nu, \quad M_{kj} = m_k \delta_{kj}. \quad (1.3.23)$$

Il termine di massa di Dirac-Majorana diagonalizzato diventa

$$\mathcal{L}_{mass}^{M+D} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 m_k \bar{\nu}_{kL}^C \nu_{kL} + h.c. \quad (1.3.24)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 m_k \bar{\nu}_k \nu_k, \quad (1.3.25)$$

avendo indicato con ν_k i campi massivi di Majorana.

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^C. \quad (1.3.26)$$

Il meccanismo *see-saw*, presentato nella sezione precedente per una generazione di neutrini, può naturalmente essere generalizzato al caso di tre famiglie, l'unica complicazione è chiaramente la natura matriciale degli elementi di $\mathcal{M}^{\mathcal{D}+\mathcal{M}}$. Posto $M^L = 0$, se gli autovalori di M^R risultano maggiori di tutti gli elementi di M^D la matrice di massa può essere diagonalizzata a blocchi:

$$W^T \mathcal{M}^{\mathcal{D}+\mathcal{M}} W \simeq \begin{pmatrix} M_{light} & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix}, \quad (1.3.27)$$

con [8]

$$W \simeq \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} M^{D\dagger} (M^R M^{R\dagger})^{-1} M^D & [(M^R)^{-1} M^D]^\dagger \\ -(M^R)^{-1} M^D & 1 - \frac{1}{2} (M^R)^{-1} M^D M^{D\dagger} (M^{R\dagger})^{-1} \end{pmatrix}, \quad (1.3.28)$$

e

$$M_{light} \simeq -M^{D\dagger} (M^R)^{-1} M^D, \quad (1.3.29a)$$

$$M_{heavy} \simeq M^R. \quad (1.3.29b)$$

Le (1.3.29a) e (1.3.29b) realizzano il meccanismo *see-saw* nel caso completo di tre generazioni, gli autovalori di M^R corrispondono alle masse *pesanti*, mentre gli autovalori di M_{light} a quelle *leggere* poiché risultano soppressi rispetto agli elementi di M^D di un fattore $M^{D\dagger} (M^R)^{-1}$; più sono grandi gli elementi di M^R più sono ridotti quelli di M_{light} . In virtù del fatto che i termini fuori diagonale della matrice V sono di ordine $M^{D\dagger} (M^R)^{-1}$, M_{light} e M_{heavy} risultano disaccoppiate a basse energie ed è possibile diagonalizzare separatamente i due blocchi tramite

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \mathbf{V} \end{pmatrix}, \quad (1.3.30)$$

per questo è possibile concentrarsi solamente sulla matrice U che rende diagonale la matrice di massa dei neutrini *attivi* coinvolti nei processi deboli di corrente carica.

$$\mathbf{U}^\dagger M_{light} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (1.3.31)$$

La matrice \mathbf{U} , nota come U_{PMNS} (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata), è la matrice unitaria che collega gli stati a massa definita e gli autostati leptonici LH e che porta al mixing effettivo

$$\nu_{lL} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{U}_{lk} \nu_{kL}. \quad (1.3.32)$$

Una matrice complessa 3×3 dipende in generale da $N^2 = 9$ parametri complessi, ovvero $2N^2 = 18$ parametri reali, ma la condizione di unitarietà impone 9 vincoli che riducono i parametri indipendenti di una qualunque matrice unitaria a 9, che può quindi essere parametrizzata da

$$\frac{1}{2}N(N-1) \quad \text{angoli}, \quad (1.3.33a)$$

$$\frac{1}{2}N(N+1) \quad \text{fasi}. \quad (1.3.33b)$$

Nel caso in questione, si parla quindi di 3 angoli e 6 fasi, di cui 3 possono essere eliminate con una ridefinizione di fase dei campi leptonici carichi, questo è possibile poiché compaiono accoppiati ai campi dei neutrini nella lagrangiana di interazione di corrente carica:

$$\mathcal{L}_I^{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1,2,3} \bar{l}_{\alpha L} \gamma^\rho \mathbf{U}_{\alpha k} \nu_{kL} W^\dagger_\rho. \quad (1.3.34)$$

Se i neutrini massivi ν_k sono particelle di Dirac il numero delle fasi fisicamente rilevanti si riduce a $\frac{1}{2}(N-2)(N-1) = 1$ poiché essendo il termine di massa invariante sotto trasformazioni di fase i campi possono essere ridefiniti. Nel caso in cui i neutrini siano invece fermioni di Majorana le due fasi non possono essere eliminate. In generale la matrice PMNS può essere riscritta come

$$\mathbf{U} = U^D D^M, \quad (1.3.35)$$

dove D^M è la matrice diagonale che contiene le due fasi di Majorana, λ_{21} e λ_{31} ,

$$D^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda_{31}} \end{pmatrix}, \quad (1.3.36)$$

mentre U^D è la matrice di mescolamento che contiene la fase di Dirac δ_{13} e viene usualmente parametrizzata come segue

$$U^D = R_{23}W_{13}R_{12} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}c_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (1.3.37)$$

dove $\cos \theta_{ij} \equiv c_{ij}$, $\sin \theta_{ij} \equiv s_{ij}$ e R_{23} , R_{12} , W_{13} indicano rispettivamente due rotazioni reali e una rotazione sul piano complesso.

1.4 Oscillazioni dei neutrini nel vuoto

Nell'interazione debole di corrente carica (CC) un neutrino viene emesso o assorbito contestualmente all'emissione o assorbimento di un leptone o antileptone carico (e, μ, τ), e ciò permette di classificarlo come appartenente alla stessa famiglia del leptone carico. Gli autostati di flavour ν_{lL} e di massa ν_k , come visto nella sezione precedente, sono legati dall'Eq. (1.3.32), se gli autostati di massa non sono degeneri ($m_1 \neq m_2 \neq m_3$), la fase di ciascun ν_k evolverà nel tempo in modo differente, ovvero un autostato leptonic descritto da una particolare combinazione lineare evolverà in una diversa combinazione lineare nel tempo, non più corrispondente all'autostato leptonic iniziale. Il cambiamento di famiglia durante la propagazione nel vuoto, causato dalla diversa evoluzione degli autostati di massa, può produrre una variazione periodica nella composizione in termini di autostati di flavour e si parla quindi di *oscillazioni di neutrini nel vuoto*.

Se un neutrino viene prodotto con un determinato flavour ν_l esiste una probabilità non nulla di rivelare, a sufficiente distanza, un neutrino con flavour differente ν_l'

$$\mathcal{P}(\nu_l \rightarrow \nu_l') \neq 0 \quad (1.4.1)$$

Per ricavare l'espressione della probabilità di transizione $\mathcal{P}(\nu_l \longrightarrow \nu_{l'})$ consideriamo un processo del tipo

$$A \rightarrow B + l^+ + \nu_l, \quad (1.4.2)$$

in cui un antileptone carico l^+ è prodotto insieme al neutrino associato ν_l . Lo stato del neutrino prodotto è dato da

$$|\nu_l\rangle \propto \sum_k |\nu_k\rangle \langle \nu_k, l^+ | j_{CC}^\rho | 0 \rangle J_\rho^{A \rightarrow B}, \quad (1.4.3)$$

dove j_{CC}^ρ è la corrente debole carica e $J_\rho^{A \rightarrow B}$ è la corrente responsabile della transizione $A \rightarrow B$. Dalla (1.3.32), trascurando gli effetti di massa nei processi di assorbimento e produzione, è possibile porre

$$\langle \nu_k, l^+ | j_{CC}^\rho | 0 \rangle J_\rho^{A \rightarrow B} \propto U_{lk}^*, \quad (1.4.4)$$

ottenendo

$$|\nu_l\rangle = \sum_k U_{lk}^* |\nu_k\rangle. \quad (1.4.5)$$

Invertendo la precedente relazione si ottiene l'espressione degli autostati di massa in funzione di quelli di interazione

$$|\nu_k\rangle = \sum_l U_{lk} |\nu_l\rangle. \quad (1.4.6)$$

che inserita nell'espressione della corrente carica

$$J_{CC}^\rho = 2 \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}_{lL} \gamma^\rho \nu_{lL}. \quad (1.4.7)$$

porta al seguente risultato

$$J_{CC}^\rho = 2 \sum_{l=e,\mu,\tau} \sum_{k=1,2,3} \bar{l}_{lL} \gamma^\rho U_{lk} \nu_{lL}. \quad (1.4.8)$$

Dalla precedente equazione segue quindi che la matrice di mixing, U_{PMNS} , compare solamente nei processi di interazione carica, mentre per quanto riguarda le correnti deboli neutre

$$J_{nC}^\rho = 2 \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL} \gamma^\rho \nu_{lL}, \quad (1.4.9)$$

é evidente come queste non siano coinvolte nei cambiamenti di sapore.

Nel vuoto gli stati $|\nu_k\rangle$ sono gli autostati dell'hamiltoniana libera

$$\mathcal{H}|\nu_k\rangle = E_k|\nu_k\rangle, \quad (1.4.10)$$

con autovalori

$$E_k = \sqrt{\underline{p}^2 + m_k^2}. \quad (1.4.11)$$

L'equazione di Schrodinger

$$i\frac{d}{dt}|\nu_k(t)\rangle = \mathcal{H}|\nu_k(t)\rangle, \quad (1.4.12)$$

implica che il lo stato a massa definita evolve secondo

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t}|\nu_k\rangle. \quad (1.4.13)$$

Considerando ora la (1.4.5), che descrive lo stato a flavour definito all'intante e al punto di produzione, e la (1.4.13), possiamo scrivere l'evoluzione temporale di $|\nu_l(t)\rangle$ come segue

$$\begin{aligned} |\nu_l(t)\rangle &= \sum_k U_{lk}^* |\nu_k(t)\rangle \\ &= \sum_k U_{lk}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

$$= \sum_{\nu'=e,\mu,\tau} \left(\sum_k U_{lk}^* e^{-iE_k t} U_{\nu'k} \right) |\nu'\rangle; , \quad (1.4.15)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la relazione (1.4.6); questo mostra come la sovrapposizione di autostati di massa ν_l , che è uno stato di flavour puro a $t = 0$, diventi una sovrapposizione di stati di differente flavour. L'ampiezza di transizione $\nu_l \rightarrow \nu_{\nu'}$ è data dal coefficiente di $|\nu_{\nu'}\rangle$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\nu_l \rightarrow \nu_{\nu'}}(t) &= \langle \nu_{\nu'} | \nu_l(t) \rangle \\ &= \sum_k U_{lk}^* e^{-iE_k t} U_{\nu'k}, \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

che ci fornisce la probabilità di transizione

$$\mathcal{P}_{\nu_l \rightarrow \nu_{\nu'}}(t) = |\mathcal{A}_{\nu_l \rightarrow \nu_{\nu'}}(t)|^2 \quad (1.4.17)$$

$$= \sum_{k,j} U_{lk}^* U_{\nu'k} U_{lj} U_{\nu'j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}. \quad (1.4.18)$$

Poiché per neutrini ultrarelativistici la relazione di dispersione (1.4.11) può essere approssimata come

$$E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E} \quad \text{con} \quad E = |\underline{p}|. \quad (1.4.19)$$

si trova

$$E_k - E \simeq \frac{m_k^2 - m_j^2}{2E} = \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}, \quad (1.4.20)$$

tramite cui si ottiene la seguente forma per \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}_{\nu_l \rightarrow \nu_{l'}}(t) = \sum_{k,j} U_{lk}^* U_{l'k} U_{lj} U_{l'j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t}. \quad (1.4.21)$$

Osservando infine che negli esperimenti di oscillazione il tempo di propagazione non viene misurato si può considerare l'approssimazione $t = L$, dove L è la distanza tra sorgente e rivelatore e scrivere:

$$\mathcal{P}_{\nu_l \rightarrow \nu_{l'}}(L, E) = \sum_{k,j} U_{lk}^* U_{l'k} U_{lj} U_{l'j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L}. \quad (1.4.22)$$

La fase di oscillazione è quindi determinata, oltre che dalla differenza dei quadrati delle masse, che sono costanti fisiche, anche dall'energia E posseduta dal neutrino e dalla distanza L . L'ampiezza quindi dipende dalla fase e dagli elementi di matrice U , anch'essi costanti fisiche. Si può concludere immediatamente dalla (1.4.22) che qualunque misura di oscillazioni non fornirà informazioni sul valore assoluto delle masse m_k , ma soltanto sulle differenze Δm_{kj}^2 .

A volte risulta conveniente scrivere la probabilità separando parte reale e immaginaria del prodotto degli elementi di matrice che compare in (1.4.22); dalla condizione di unitarietà si ha

$$\sum_k |U_{lk}^*|^2 |U_{l'j}|^2 = \delta_{ll'} - 2\Re \sum_{k>j} U_{lk}^* U_{l'k} U_{lj} U_{l'j}^* \quad (1.4.23)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_l \rightarrow \nu_{l'}}(L, E) &= \delta_{ll'} - 4\Re \sum_{k>j} U_{lk}^* U_{l'k} U_{lj} U_{l'j}^* \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L \right) \\ &\quad + 2\Im \sum_{k>j} U_{lk}^* U_{l'k} U_{lj} U_{l'j}^* \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L \right), \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

É utile notare come sotto trasformazioni di CP la prima riga risulta invariante mentre la seconda riga cambia segno.

Se si prende in considerazione il caso $l = l'$ ciò che si calcola è la probabilità che dopo aver percorso una distanza L un neutrino non abbia cambiato il proprio sapore, si parla dunque di probabilità di *sopravvivenza*

$$\mathcal{P}_{\nu_l \rightarrow \nu_l}(L, E) = 1 - 4 \sum_{k>j} |U_{lk}^*|^2 |U_{lj}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L \right). \quad (1.4.25)$$

Poiché tutti i dati in prima approssimazione sono stati analizzati nello schema di mixing a due famiglie è utile studiare il caso in cui si considerino due sole generazioni di neutrini:

$$\begin{pmatrix} \nu_l \\ \nu_{l'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (1.4.26)$$

la (1.4.24) diventa

$$\mathcal{P}_{\nu_l \rightarrow \nu_l}(L, E) = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{2E} L \right). \quad (1.4.27)$$

La (1.4.27) oltre ad avere una valenza storica fornisce un criterio di classificazione per esperimenti di oscillazione; poiché le sezioni d'urto dei processi che coinvolgono i neutrini sono molto piccole affinché si abbia un segnale statisticamente differente dal fondo si deve avere

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \gtrsim 0.1 \div 1 \quad (1.4.28)$$

infatti la transizione tra diversi flavour non può essere misurata se

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \ll 1 \quad (1.4.29)$$

mentre nel caso

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \gg 1 \quad (1.4.30)$$

solamente la probabilità media di transizione è osservabile e si hanno solo informazioni circa $\sin^2 \theta$, ovvero sull'angolo di mixing.

Poiché la differenza delle masse è una costante fisica i diversi tipi di esperimenti possono essere progettati per essere sensibili a differenti valori di Δm^2 tramite

un'opportuna scelta del rapporto L/E , che è una misura dell'intervallo Δm^2 al quale l'esperimento risulta sensibile tramite la (1.4.28):

(i) *Short BaseLine experiments (SBL)*: in questa tipologia di esperimenti $L/E \lesssim 1eV^{-2}$, la distanza L tra la sorgente e il rivelatore riesce a garantire un numero di eventi relativamente grande che permette di apprezzare rapporti $\Delta m^2 L/4E > 0.1$, corrispondenti a $\Delta m^2 > 10^{-4}eV^2$

(ii) *Long BaseLine experiments (LBL) ed esperimenti con neutrini atmosferici*: in questo caso si parla di distanze L molto più grandi corrispondenti a $L/E \lesssim 10^4eV^{-2}$, ovvero $\Delta m^2 > 10^{-4}eV^2$.

(iii) *Very Long BaseLine experiments (VLBL) ed esperimenti con neutrini solari*: le distanze sono notevolmente più grandi $L/E \lesssim 10^5eV^{-2}$ e la statistica è molto bassa, si ha una sensibilità $\Delta m^2 > 10^{-5}eV^2$.

Come visto precedentemente, nel caso di mixing a tre famiglie i parametri indipendenti da determinare sono $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{13}$. Dall'analisi dei dati sperimentali finora raccolti (biblio pdg) si ottengono i seguenti valori per i parametri che regolano le oscillazioni:

Parametro	Valore
Δm_{21}^2	$(7.50 \pm 0.20) \times 10^{-5}eV^2$
$ \Delta m_{32(31)}^2 $	$(2.32_{-0.08}^{+0.12}) \times 10^{-3}eV^2$
$\sin^2(2\theta_{12})$	0.857 ± 0.024
$\sin^2(2\theta_{13})$	0.095 ± 0.010
$\sin^2(2\theta_{23})$	> 0.95

è facile rendersi conto che la differenza di massa Δm_{21}^2 tra i neutrini ν_1 e ν_2 , che sono quelli coinvolti nelle oscillazioni solari, è molto più piccola rispetto a quella esistente tra i neutrini $\nu_{2(1)}$ e ν_3 , tuttavia i dati esistenti non permettono di risolvere l'ambiguità nel segno di $\Delta m_{32(31)}^2$ e non risulta quindi possibile l'identificazione di una scala di massa assoluta. Le due possibilità per il segno di $\Delta m_{32(31)}^2$ corrispondono a due differenti tipi fondamentali di spettro di massa [9], la *gerarchia normale* (NH) in

cui ν_1 risulta il più leggero

$$m_1 \ll m_2 < m_3; \quad (1.4.31a)$$

$$\Delta m_{atm}^2 = \Delta m_{31}^2 > 0; \quad (1.4.31b)$$

$$\Delta m_{\odot}^2 \equiv \Delta m_{21}^2 > 0; \quad (1.4.31c)$$

e la *gerarchia inversa* (IH) in cui è ν_3 a risultare il più leggero

$$m_3 \ll m_1 < m_2; \quad (1.4.32a)$$

$$\Delta m_{atm}^2 = \Delta m_{32}^2 < 0; \quad (1.4.32b)$$

$$\Delta m_{\odot}^2 \equiv \Delta m_{21}^2 > 0; \quad (1.4.32c)$$

La differenza fondamentale tra le due gerarchie è che nel caso diretto il piccolo contributo di mixing dovuto a U_{e3} si trova nello stato più massivo, mentre nella gerarchia inversa in quello con massa minore.

Per quanto riguarda la fase δ di violazione CP nessun esperimento è stato finora in grado ottenere alcuna informazione e pertanto rimane attualmente completamente indeterminata.

Determinare la scala di massa assoluta, la natura dei neutrini massivi (Dirac o Majorana), e ottenere informazioni circa le fasi di violazione di CP nella matrice di mixing rimangono i problemi più urgenti e impegnativi nella ricerca nel campo della fisica del neutrino.

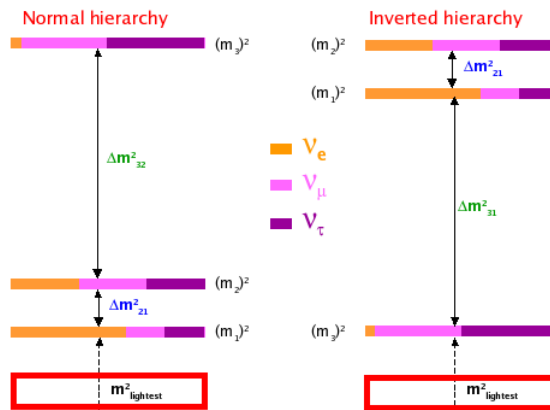


Figura 1.2: Gerarchia inversa e normale.

1.5 Esperimenti sui neutrini

Nell'ultimo decennio la scoperta e lo studio delle oscillazioni di flavour hanno rinnovato l'interesse per le interazioni neutrino-nucleo. Tali interazioni possono essere essenzialmente divise a seconda del regime energetico e classificate in processi di basse (\mathcal{O} (MeV)), medie (\mathcal{O} (1 GeV)) e alte energie (\mathcal{O} (100 GeV)). In questo lavoro l'attenzione è stata posta sul regime cinematico di medie energie poiché è quello rilevante per gli esperimenti Long BaseLine e con neutrini atmosferici.

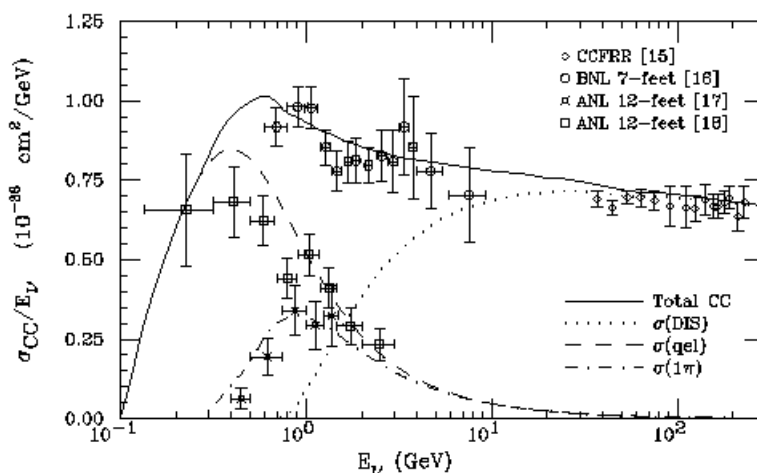


Figura 1.3: Sezione d'urto per le interazioni di corrente carica dei neutrini.

Come evidenziato dalla figura (1.3)[10], nel regime cinematico preso in considerazione, il contributo dominante alla sezione d'urto per le interazioni di corrente carica dei neutrini viene da processi quasi elastici (CCQE) del tipo $\nu_\ell + n \rightarrow \ell^- + p$, la loro analisi richiede in primis un efficiente selezione ed i criteri usati isolare questa tipologia di eventi sono fortemente influenzate sia dalla scelta del materiale usato come bersaglio, sia dalla tecnica di rivelazione.

Poiché molti dei moderni esperimenti sui neutrini sono stati costruiti in primo luogo per la misura dei parametri di oscillazione questi avevano tra i principali obiettivi quello di aumentare la rate di eventi, motivo per il quale è stato necessario l'impiego di bersagli pesanti contestualmente alla costruzione di rivelatori di grandi dimensioni. Per quanto riguarda i vari detector e quindi le tecniche usate per selezionare gli eventi

CCQE queste possono essere raggruppate in due grandi categorie: rivelatori a traccia e rivelatori Cherenkov. I primi tentano di identificare ogni particella carica in un evento nel momento in cui attraversa gli elementi attivi del detector, tipicamente scintillatori e camere a drift; i rivelatori Cherenkov sono invece grandi serbatoi riempiti di acqua o di olio minerale, usati come bersagli nucleari, ed hanno fotorivelatori a ricoprire la superficie interna in modo da raccogliere la luce emessa dalle particelle cariche, che sono principalmente leptoni poiché i protoni (neutroni nel caso di antineutrini) sono tipicamente emessi sotto soglia e non vengono osservati.

Dal campione di eventi raccolti quelli identificati come quasi elastici vengono selezionati e misurati e, se lo scattering risulta realmente di tipo QE, sia l'energia del neutrino incidente sia il quadrimpulso trasferito, Q^2 , possono essere stimati attraverso l'energia e l'angolo di scattering del leptone carico emesso.

Tutte le analisi degli eventi QE sono soggette ad un certo livello di contaminazione dovuta agli eventi di background, gli effetti nucleari giocano un ruolo essenziale sia nella stima che nella rimozione di tali eventi dal campione e possono inoltre essere causa di inefficienza per quanto riguarda la selezione iniziale.

Si ricorda che il processo fondamentale che si cerca di misurare, $\nu_\ell + n \rightarrow \ell^- + p$, per i neutrini e $\bar{\nu}_\ell + p \rightarrow \ell^+ + n$ per gli antineutrini, non riguarda nucleoni isolati ma legati all'interno degli atomi del bersaglio che, come precedentemente detto, sono principalmente nuclei di carbonio e ossigeno; la selezione è basata su ciò che risulta visibile nel detector dopo che si sono verificati i processi intranucleari, pertanto è possibile sia che alcuni processi non vengano presi in considerazione, sia che alcuni siano erroneamente selezionati, nel primo caso si parla di inefficienza, mentre gli eventi falsamente riconosciuti come QE costituiscono fonte di background del campione.

Le principali fonti di contaminazione e inefficienza derivano dagli effetti nucleari associati alle interazioni degli stati finali (FSI) quali ad esempio il rescattering degli adroni prodotti al vertice di interazione elementare che interagiscono con i nucleoni del sistema spettatore prima di riuscire ad uscire dal nucleo bersaglio. In questo modo gli eventi QE possono eludere la selezione, specialmente se la tecnica si basa sull'identificazione del singolo protone (neutrone) diffuso, poiché aumentano i nucleoni emessi e contestualmente diminuiscono le loro energie.

Allo stesso tempo è possibile che alcuni processi lascino tracce che simulano gli eventi cercati, in particolare eventi legati alla produzione di mesoni π che vengono in seguito riassorbiti dal bersaglio, questi eventi di background hanno incertezze associate molto

grandi, stimate intorno al 10% [11].

Il fatto che i nuovi esperimenti utilizzino bersagli pesanti, in cui gli effetti nucleari risultano quindi molto rilevanti, insieme al fatto che non si possa fare affidamento sull'identificazione della completa interazione, sono i motivi principali per i quali la purezza del campione di eventi non risulta così alta come negli vecchi esperimenti con le camere a bolle, d'altro canto poiché queste ultime utilizzavano deuterio la rate di eventi era nettamente inferiore.

Oltre agli effetti nucleari, possono esistere anche limitazioni poste dal rivelatore stesso, che a causa dell'incapacità di rilevare le particelle a bassa energia (in particolar modo i nucleoni) che emergono dal nucleo bersaglio o a causa dell'errata identificazione delle particelle osservate possono aggiungere potenziali fattori di background che richiedono correzioni ulteriori all'analisi dei dati.

Ovviamente, poiché lo scopo principale è quello di osservare le oscillazioni, è fondamentale conoscere la composizione in termini di flavour del fascio di neutrini e il suo spettro in energia, misure che come detto richiedono l'interazione col rivelatore stesso. Le incertezze nella conoscenza di questa interazione, ovvero nella sezione d'urto, si tradurranno direttamente in incertezze dei parametri oscillazioni, in particolare in errori nella ricostruzione dell'energia dei neutrini. Dal momento che non esiste un fascio di prova per calibrazione dell'energia di neutrini, l'energia deve essere ricostruita dalle particelle dello stato finale misurata con modelli teorici e poiché l'energia è direttamente correlata ai parametri di oscillazione, questa tecnica è fonte di errori sistematici nell'analisi.

Risulta chiaro da quanto detto finora che le incertezze principali sono legate alla sezione d'urto dei neutrini e agli effetti nucleari; un errore così grande non permette ovviamente una precisa stima dei parametri di oscillazione e si può perciò asserire che una conoscenza più precisa della sezione d'urto e una comprensione quantitativa più profonda della risposta nucleare sono prerequisiti da cui non si può prescindere per le analisi degli esperimenti sui neutrini.

1.5.1 MiniBooNE

Tra i vari esperimenti MiniBooNE (Mini Booster Neutrino Experiment) risulta avere particolare rilevanza, questo poiché ha permesso di estrarre la prima misura della

sezione d'urto doppiamente differenziale $d\sigma/dT_\mu d\cos\theta_\mu$ per lo scattering CCQE di neutrini muonici su carbonio, dove T_μ e θ_μ indicano rispettivamente l'energia cinetica e angolo di diffusione del muone uscente.

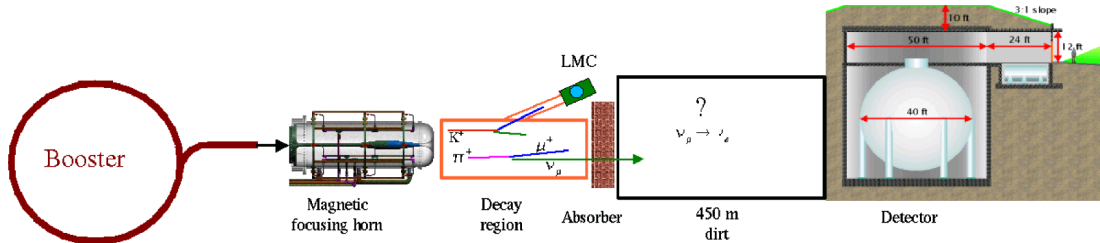


Figura 1.4: Schema dell'esperimento MiniBooNE.

L'esperimento MiniBooNE fu concepito per testare la validità dei risultati provenienti dal LSND (Liquid Scintillator Neutrino Detector) il quale aveva rilevato segnali compatibili con oscillazioni $\Delta m^2 \approx eV^2$. Questo non risultava compatibile con lo schema del mixing a tre famiglie poiché indicava l'esistenza di un quarto neutrino di massa $m \approx 1 eV$ che non interagiva debolmente. Lo schema dell'esperimento MiniBooNE è riportato in Fig. (1.4), questo è caratterizzato da una lunga *baseline* di 550 m e da una distribuzione in energia E_ν piccata attorno a 800 MeV in modo da avere la stessa risoluzione di LSND ed essere quindi sensibile allo stesso tipo di oscillazioni. Tramite il Booster a sincrotrone del Fermilab un fascio di protoni viene accelerato ad un'energia di circa 8 GeV che dopo essere stato indirizzato lungo la beamline di MiniBooNE viene fatto collidere con un bersaglio di Berillio. I mesoni prodotti, principalmente K^\pm e π^\pm , vengono selezionati in base alla carica da un campo magnetico e attraversano una zona di circa 50 m dove decadono in volo producendo neutrini muonici attraverso le reazioni seguenti

$$K^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \qquad K^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \qquad (1.5.1)$$

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \qquad \pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \qquad (1.5.2)$$

Il fascio prodotto attraversa un assorbitore che filtra tutte le particelle ad eccezione dei neutrini in modo tale che il fascio residuo sia composto in buona approssimazione da soli neutrini muonici, questi oscillando lungo la *baseline* arrivano ad incidere sul detector posto a 541 metri dal target di Berillio.

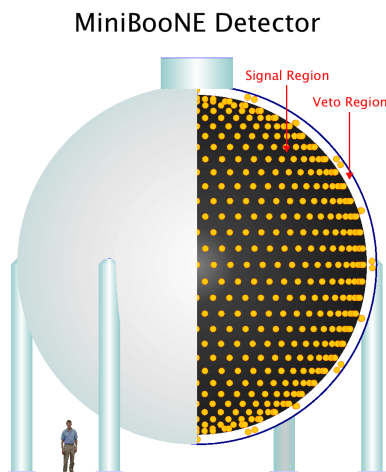


Figura 1.5: Schema del rivelatore di MiniBooNE.

Il detector di MiniBooNE (Fig. 1.5) è un rivelatore Cherenkov ad olio minerale, è costituito da una sfera di 12.2 m di diametro riempita con 800 tonnellate di CH_2 , la struttura è divisa in due regioni otticamente isolate la *signal region* e la *veto region* e la luce prodotta viene raccolta da 1520 tubi fotomoltiplicatori (PMT), 1280 dei quali si trovano nella regione interna mentre i restanti 240 sono situati nel guscio esterno.

I processi elementari alla base di MiniBooNE sono

$$\nu_\mu + n \longrightarrow \mu^- + p \qquad \bar{\nu}_\mu + p \longrightarrow \mu^+ + n, \qquad (1.5.3)$$

e interessano principalmente i nucleoni di carbonio dell'olio vegetale, il quale fornisce dunque sia il bersaglio nucleare per i neutrini in arrivo sia il mezzo tramite cui le particelle cariche prodotte nell'interazione producono luce Cherenkov misurata poi dai PMT. Nonostante la densità dell'olio sia leggermente inferiore rispetto a quella dell'acqua e quindi fornisca un numero minore di bersagli nucleari, il suo indice di rifrazione è più alto e questo abbassa la soglia per la produzione di luce Cherenkov.

Nel Capitolo 5 verrà discussa la grande discrepanza esistente tra i risultati delle simulazioni Monte Carlo e la sezione d'urto differenziale misurata da MiniBooNE per i processi CCQE e come questa possa essere dovuta alla complessità della dinamica nucleare e dei meccanismi di reazione che influiscono sulla rilevazione del segnale.

2 Struttura e dinamica nucleare

Gli esperimenti che si propongono di osservare le oscillazioni di *flavour* e di misurarne i parametri si basano in larga parte sull'uso di bersagli nucleari, questo, se da una parte permette di incrementare in maniera considerevole la statistica, dall'altra comporta dei grandi problemi poiché richiede una descrizione accurata delle interazioni neutrino-nucleo e quindi della struttura e della dinamica nucleare.

Date le difficoltà associate alla trattazione dell'interazione forte, e quindi della struttura adronica, in termini dei gradi di libertà della QCD, quark e gluoni, la struttura della materia nucleare va affidata ad una più conveniente descrizione basata sui nucleoni stessi.

Le interazioni tra nucleoni possono essere in prima approssimazione descritte tramite modelli a particelle indipendenti basati sulla sostituzione del potenziale fenomenologico NN con un *campo medio* in uno schema che prende il nome di *Modello a Shell nucleare* la cui più semplice implementazione è fornita dal *Fermi gas model* (FG); in questo schema il nucleo è visto come un gas degenere di fermioni, Neutroni e protoni, legati tra loro con energia costante.

Gli esperimenti più recenti di scattering $e - A$ hanno evidenziato i limiti di questi modelli poiché non rendono conto delle forti correlazioni esistenti all'interno dei nuclei atomici che necessitano di una descrizione più accurata tramite potenziali più realistici, questo può essere fatto all'interno del formalismo della *Nuclear Many-Body Theory* (NMBT).

2.1 Interazione nucleare

Alcune delle caratteristiche principali sulle interazioni NN possono essere dedotte analizzando la distribuzione di carica nucleare. Come mostra la fig.(2.1), la densità di carica, opportunamente normalizzata, satura per diversi nuclei ad un valore circa costante ($\rho \sim 0.16 \text{ fm}^{-3}$) indipendente quindi dal numero di massa. Questo vuol dire

semplicemente che i nucleoni non possono addensarsi indefinitamente. Si può inferire che per distanze sufficientemente piccole l'interazione NN sia repulsiva e possa essere descritta da un potenziale $v(r)$ tale che

$$v(r) > 0, \quad |r| > r_c, \quad (2.1.1)$$

con r_c raggio caratteristico della parte repulsiva della forza. Osservando inoltre che l'energia di legame per nucleone è circa la stessa per atomi con numero di massa $A \geq 20$ si deduce che le forze nucleari hanno un raggio di azione limitato dell'ordine del raggio dei nuclei che si traduce in

$$v(r) = 0, \quad |r| > r_{max}, \quad (2.1.2)$$

Un'altra caratteristica fondamentale, che può essere ricavata dagli spettri energetici dei nuclei speculari ¹, è che le forze nucleari esibiscono simmetria di carica, ovvero non distinguono protoni e neutroni; Questo altro non è che la manifestazione dell'invarianza sotto trasformazioni di spin isotopico.

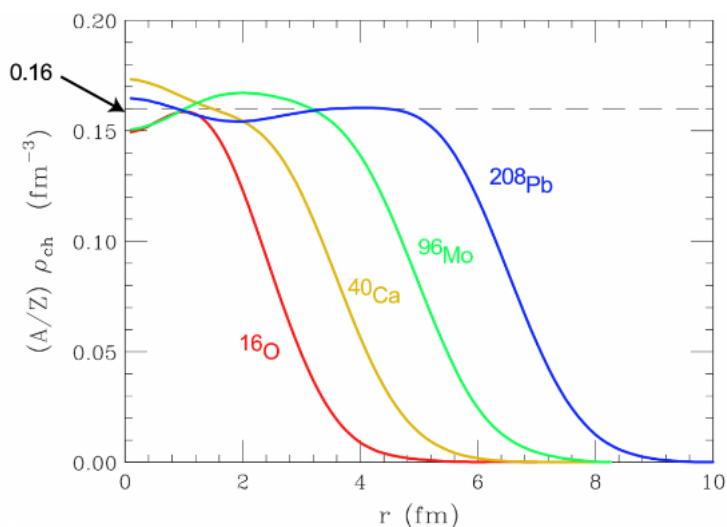


Figura 2.1: bla

Storicamente il concetto di isospin fu introdotto da Heisenberg poco dopo la scoperta del neutrone nel 1932, partendo dalla constatazione che protone e neutrone risultavano quasi degeneri in massa² egli propose di considerare le due particelle come

¹Sono chiamate speculari le coppie di nuclei con stesso valore di A in cui il numero di protoni, Z e neutroni, $N = A - Z$, risulta scambiato

² $\frac{m_n - m_p}{m_p} \simeq 0.15 \cdot 10^{-2}$

due stati di carica di un'unica particella N , il nucleone. In completa analogia con col formalismo di *spin* si introduce un numero quantico, l'isospin, conservato nelle interazioni forti ma non conservato in quelle elettromagnetiche, la cui terza componente è quella che distingue uno stato p da uno n , e assume rispettivamente il valore $T_3 = 1/2$ e $T_3 = -1/2$.

$$|p\rangle = |T = \frac{1}{2}, T_3 = \frac{1}{2}\rangle, \quad (2.1.3)$$

$$|n\rangle = |T = \frac{1}{2}, T_3 = -\frac{1}{2}\rangle. \quad (2.1.4)$$

La densità lagrangiana libera per protoni e neutroni si scrive in maniera compatta come segue

$$\mathcal{L}_N = \bar{N}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)N \quad \text{con} \quad N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

dove p e n sono i quadrispinori di Dirac associati al protone e al neutrone; la simmetria di spin isotopico corrisponde all'invarianza di \mathcal{L} sotto il gruppo $SU(2)$ delle trasformazioni di fase globali

$$U = e^{i\alpha_j \tau_j} \quad (2.1.6)$$

dove α_j è un vettore costante, mentre τ_j sono le tre matrici di isospin. Dalle regole di composizione del momento angolare si sa che le coppie $p-p$ e $n-n$ hanno momento totale $T = 1$, mentre le coppie $n-p$ possono presentirsi sia in stati di tripletto ($T = 1$) sia di singoletto ($T = 0$). L'unico stato legato di due nucleoni che esiste in natura è il nucleo di deuterio che consiste in una coppia protone-neutrone con spin e isospin totale $S = 1$ e $T = 0$ rispettivamente, la sua unicità è una chiara manifestazione del fatto che le forze nucleari siano spin-isospin dipendenti. È inoltre possibile ottenere ulteriori informazioni studiando la distribuzione di carica del deuterio che esibisce un momento di quadrupolo non nullo, indice del fatto che la distribuzione non è simmetrica e che quindi la forza nucleare non ha la caratteristica di essere una forza *centrale*.

2.2 Teoria di Yukawa e potenziali fenomenologici

La prima descrizione dell'interazione nucleare si deve a Yukawa e risale al 1935, egli propose di associare alle interazioni forti una particella scalare massiva, inseguito

identificata col mesone π , il cui scambio sarebbe responsabile delle interazioni tra nucleoni. Lo studio sperimentale delle forze nucleari ha mostrato che il mesone π si presenta in tre stati di carica quasi degeneri in massa π^0, π^+, π^- che si comportano come particelle pseudoscalari, queste informazioni possono essere incluse in un tripletto di mesoni π^a ($a = 1, 2, 3$) con lagrangiana libera

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi^a \partial^\mu \pi^a - \frac{\mu^2}{2} \pi^a \pi^a \quad (2.2.1)$$

L'interazione elettromagnetica non è invariante per trasformazioni di isospin, infatti protone e neutrone non hanno stessa carica, gli autostati di carica elettrica possono essere esplicitati nel seguente modo

$$\pi^3 = \pi^0, \quad (2.2.2a)$$

$$\pi^+ = \frac{\pi^1 - i\pi^2}{\sqrt{2}}, \quad (2.2.2b)$$

$$\pi^- = \frac{\pi^1 + i\pi^2}{\sqrt{2}}, \quad (2.2.2c)$$

e la lagrangiana assume la seguente forma

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 - \frac{\mu^2}{2} \pi^0 \pi^0 + \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- - \mu^2 \pi^+ \pi^- \quad (2.2.3)$$

Il termine di interazione in grado di descrivere le forze nucleari come mediate dai mesoni π ed invariante sotto i gruppi di Poincarè, di $SU(2)$ di isospin e sotto trasformazioni di parità assume la forma

$$\mathcal{L}_{int} = -ig \bar{N} \gamma^5 \pi^a \sigma_a N \quad (2.2.4)$$

con g costante di accoppiamento adimensionale. La lagrangiana totale

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_{int} \\ &= \bar{N} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) N + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi^a \partial^\mu \pi^a - \frac{\mu^2}{2} \pi^a \pi^a - ig \bar{N} \gamma^5 \pi^a \sigma_a N \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

costituisce quindi il primo tentativo di descrivere le forze nucleari in modo consistente con l'invarianza relativistica e con la simmetria di isospin. Utilizzando la (2.2.4) è possibile scrivere l'ampiezza invariante del processo in fig. (2.2) che descrive l'interazione tra due nucleoni tramite scambio di un pione.

$$\langle f | \mathcal{M} | i \rangle = -ig^2 \frac{\bar{u}'_{s_2}(p'_2) \gamma^5 u'_{s_2}(p'_2) \bar{u}'_{s_1}(p'_1) \gamma^5 u_{s_1}(p_1)}{k^2 - m_\pi^2} \langle \tau_1 \cdot \tau_2 \rangle, \quad (2.2.6)$$

dove $k = p'_1 - p_1 = p'_2 - p_2$, $u_{\tilde{s}}(\tilde{p})$ è lo spinore di Dirac che descrive il nucleone di quadrimpulso \tilde{p} e proiezione di spin \tilde{s} , mentre

$$\langle \tau_1 \cdot \tau_2 \rangle = \eta_{2'}^\dagger \tau \eta_2 \eta_{1'}^\dagger \tau \eta_1, \quad (2.2.7)$$

dove η_i sono gli spinori di Pauli a due componenti che descrivono lo stato di isospin delle particelle. Poiché la massa dei nucleoni è molto grande gli effetti relativistici

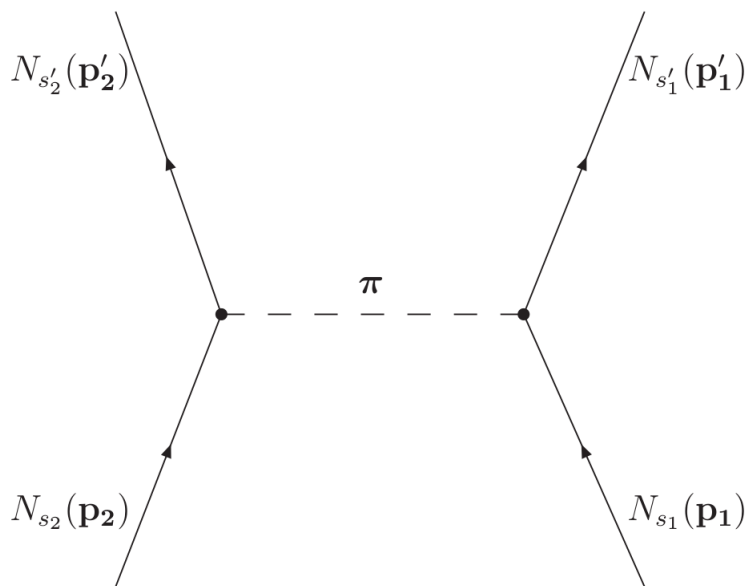


Figura 2.2: bla

all'interno del nucleo possono essere trascurati e dal limite non relativistico della (2.2.6) è possibile ottenere il potenziale che descrive l'interazione $N - \pi$

$$\begin{aligned} v_\pi &= \frac{g^2}{4m^2} (\tau_1 \cdot \tau_2) (\sigma_1 \cdot \nabla) (\sigma_2 \cdot \nabla) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \\ &= \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{m_\pi^2}{4m^2} \frac{1}{3} (\tau_1 \cdot \tau_2) \\ &\times \left\{ \left[(\sigma_1 \cdot \sigma_2) + S_{12} \left(1 + \frac{3}{m_\pi |r|} + \frac{3}{(m_\pi^2 r^2)} \right) \right] \frac{e^{-m_\pi |r|}}{m_\pi |r|} - \frac{4\pi}{m_\pi^3} (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \delta^{(3)}(r) \right\} \quad (2.2.8) \end{aligned}$$

con

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\sigma_1 \cdot r) (\sigma_2 \cdot r) - (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \quad (2.2.9)$$

É evidente che la (2.2.8) contiene tutte le caratteristiche richieste, la natura repulsiva della forza nucleare per piccole distanze è introdotta tramite la delta $\delta(r)$, l'operatore definito dalla (2.2.9) da conto della non centralità del potenziale e in più la dipendenza spin-isospin è esplicita. Il potenziale di Yukawa fornisce una buona approssimazione per distanze $|r| > 1.5fm$, mentre per la descrizione dell'interazione a corto e medio range è necessario prendere in considerazione processi più complicati come lo scambio di due pioni o di mesoni più pesanti (ρ, ω). Ovviamente quando le distanze diventano molto piccole ($|r| < 0.5fm$) l'interazione NN necessita di una descrizione in termini dei costituenti fondamentali, quark e gluoni, all'interno del formalismo della QCD.

Per avere un modello dinamico completo si usano potenziali fenomenologici che tengono conto degli effetti delle correlazioni NN sia a lungo che a corto raggio e possono essere scritti nella forma

$$v = v_\pi + v_R \quad (2.2.10)$$

dove v_π è il potenziale di scambio di un pione (OPE), mentre v_R è il potenziale residuo responsabile delle interazioni a medio e corto range. Esplicitando la dipendenza da spin e isospin

$$v_{ij} = \sum_{ST} [v_{TS}(r_{ij}) + \delta_{S1} v_{Tt}(r_{ij}) S_{ij}] P_S \Pi_T, \quad (2.2.11)$$

S e T sono spin e isospin totali della coppia di nucleoni interagenti, P_S e Π_I sono i corrispondenti operatori di proiezione mentre le funzioni v_{TS} e v_{Tt} descrivono la dipendenza radiale nei differenti canali di spin-isospin e per grandi valori della distanza $r_{ij} = |r_i - r_j|$ si riducono alle componenti corrispondenti del potenziale OPE.

Alternativamente si può scomporre il potenziale nel seguente modo

$$v_{ij} = \sum_{n=1}^6 v^{(n)}(r_{ij}) O_{ij}^{(n)} \quad (2.2.12)$$

utilizzando gli operatori

$$O_{ij}^{n \leq 6} = [1, (\sigma_i \cdot \sigma_j), S_{ij}] \otimes [1, (\tau_i \cdot \tau_j)] . \quad (2.2.13)$$

Potenziali di questo tipo sono detti potenziali v_6 ed i sei operatori sono scelti in modo da riprodurre tutte le proprietà dello stato legato di due nucleoni e dello scattering

N.N in onda S , cioè in stati di momento angolare totale pari a zero. É possibile includere nello sviluppo (2.2.12) due operatori addizionali per la descrizione dello scattering N-N in stati di onda P dipendenti dal momento angolare orbitale totale \mathbf{L}

$$O_{ij}^{n=\tau,8} = L \cdot S \otimes (\tau_i \cdot \tau_j) . \quad (2.2.14)$$

Ad oggi le parametrizzazioni del potenziale di interazione nucleare che meglio riproducono i dati di scattering NN hanno una struttura operatoriale molto più complessa, che include ben altri 10 operatori del tipo (2.2.13):

$$O_{ij}^{n=9,\dots,14} = [L, L^2(\sigma_i \cdot \sigma_j), (L \cdot S)^2] \otimes [1, (\tau_i \cdot \tau_j)] , \quad (2.2.15)$$

$$O_{ij}^{n=15,\dots,18} = [1, (\sigma_i \cdot \sigma_j), S_{ij}] \otimes [T_{ij}, (\tau_{zi}\tau_{zj})] \quad (2.2.16)$$

dove

$$T_{ij} = \frac{3}{r^2}(\tau_i \cdot r)(\tau_j \cdot r) - (\tau_i \cdot \tau_j) \quad (2.2.17)$$

potenziali di questo tipo sono detti potenziali Argonne v_{18} e tengono conto anche dei piccoli effetti della rottura di simmetria di carica dovuti alla differenza di massa tra p ed n e tra i pioni carichi e quello neutro [12] [13].

2.3 Modello a gas di Fermi

Nel modello a gas di Fermi neutroni e protoni sono visti come due sistemi indipendenti di nucleoni, essendo fermioni obbediscono naturalmente alla statistica di Fermi-Dirac e, compatibilmente con i vincoli posti dal principio di esclusione di Pauli, si assume che questi possano muoversi liberamente all'interno del nucleo. Il potenziale di cui risente ciascun nucleone è il risultato della sovrapposizione dei potenziali generati dagli altri nucleoni, che si assume abbia la forma di una buca. Il numero degli stati disponibili per un nucleone all'interno di un volume V e in un intervallo dp è pari a

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V . \quad (2.3.1)$$

Lo stato fondamentale di un nucleo corrisponde allo stato energetico più basso di un gas di Fermi allo zero assoluto, quando tutti gli stati energetici sono riempiti da nucleoni. Gli stati risulteranno occupati fino ad un momento massimo, il momento di Fermi p_F , integrando dunque la (2.3.1) si ottiene

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad (2.3.2)$$

In accordo col principio di Pauli, ogni livello energetico può ospitare due fermioni dello stesso tipo, indicando quindi con N e Z il numero di neutroni e di protoni rispettivamente e includendo la degenerazione di spin, si ha

$$N = \frac{V(p_F^n)^3 dp}{3\pi^2 \hbar^3} \quad Z = \frac{V(p_F^p)^3 dp}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (2.3.3)$$

dove p_F^n e p_F^p indicano i momenti di Fermi relativi ai due nucleoni.

Dalla parametrizzazione del raggio dei nuclei stabili

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (2.3.4)$$

dove il valore sperimentale di R_0 risulta pari a 1.14 fm, è possibile avere una stima del momento di Fermi. infatti, poiché il volume nucleare è dato da

$$V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A \quad (2.3.5)$$

per nuclei con pari numero di neutroni e protoni ($N = Z = A/2$) si ha

$$p_F^p = p_F^n = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV}. \quad (2.3.6)$$

I nucleoni si muovono quindi liberamente nel nucleo con impulso molto alto e l'energia di Fermi, relativa all'ultimo livello occupato, risulta essere

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33 \text{ MeV}, \quad (2.3.7)$$

dove M indica la massa del singolo nucleone. Poiché l'energia media di legame per nucleone vale $B/A = 8 \text{ MeV}$, la profondità della buca di potenziale risulterà essere $V_0 = E_F + B' \approx 40 \text{ MeV}$; sia E_F che V_0 risultano in buona approssimazione indipendenti dal numero atomico dello specifico nucleo.

Per nuclei simmetrici le buche di potenziale per protoni e neutroni hanno gli stessi parametri se si trascura la repulsione coulombiana³, ma nel caso generale di nuclei pesanti, in cui si ha un surplus di neutroni risulta $E_F^n > E_F^p$, ovvero $V_F^n > V_F^p$, poiché esiste un'interazione coulombiana repulsiva tra i protoni che aggiunge un termine addizionale V_C al potenziale di cui non si può non tenere conto e che fa in modo che i protoni risultino meno legati all'interno dei nuclei rispetto ai neutroni.

³Questo è possibile solo per nuclei leggeri che abbiano $N = Z$

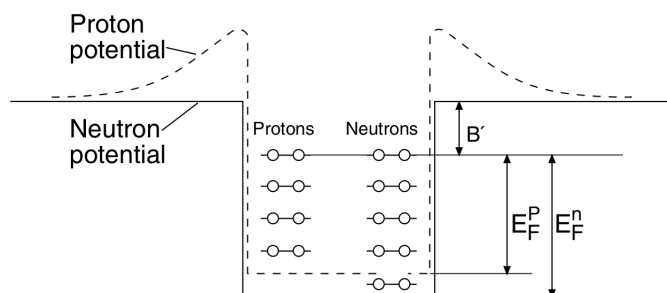


Figura 2.3: schizzo del potenziale per neutroni e protoni nel modello a gas di Fermi.[14]

L'energia cinetica media per nucleone può essere calcolata nel seguente modo:

$$\langle E_c \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_c p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M} \approx 20 \text{ MeV} , \quad (2.3.8)$$

per cui per un nucleo con N neutroni e Z protoni si ha

$$\begin{aligned} E_c(N, Z) &= N \langle E_n \rangle + Z \langle E_p \rangle \\ &= \frac{3}{10M} (N (p_F^n)^2 + Z (p_F^p)^2) . \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Riesprimendo tutto con l'ausilio delle equazioni (2.3.3) e (2.3.4) si arriva alla seguente equazione

$$E_c(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} \quad (2.3.10)$$

dove è stata nuovamente fatta l'assunzione di raggi uguali per i due fermioni. L'energia cinetica media, tenendo fisso A e facendo variare Z , o equivalentemente N , risulta avere un minimo per $N=Z$, ciò indica che per $N \neq Z$ cresce l'energia di legame si riduce. Per ottenere la dipendenza esplicita dall'esubero di neutroni si può espandere la (2.3.10) in potenze di $(N - Z)$ e ottenere una correzione all'energia cinetica proporzionale al quadrato di questa differenza; oltre alla correzione dell'energia cinetica è altrettanto importante modificare il potenziale in modo da tener conto della differenza in numero dei nucleoni.

Nella sua semplicità questo modello riesce sorprendentemente a spiegare molte delle caratteristiche dei nuclei, in particolare modo quelle associate alla distribuzione di impulso dei nucleoni, ma non tiene conto delle forti correlazioni che esistono al loro interno e che invece necessitano di una descrizione accurata.

2.4 Teoria a molti corpi non relativistica

La teoria a molti corpi non relativistica (NMBT) provvede ad una descrizione più realistica della dinamica nucleare, in questo schema il nucleo è visto come una collezione di A nucleoni puntiformi la cui dinamica risulta descritta dalla seguente hamiltoniana non relativistica

$$\mathcal{H} = \sum_i^A \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{j>i=1}^A v_{ij} + \sum_{k>j>i=1}^A V_{ijk} . \quad (2.4.1)$$

Il primo termine costituisce la parte cinetica dove p_i ed m rappresentano impulso e massa dell' i -esimo nucleone, gli altri due termini sono rispettivamente il potenziale a due e tre corpi; l'aggiunta di quest'ultimo è necessaria se si vuole riprodurre l'energia di legame degli stati a tre nucleoni. Il potere predittivo dei modelli che si basano sull'hamiltoniana (2.4.1) è stato ampiamente testato per nuclei con numero di massa $A \leq 12$ ed i vari studi sono risultati essere in eccellente accordo con i dati.

Data la natura fortemente repulsiva dell'interazione l'approccio perturbativo risulta poco praticabile e per ovviare a questo problema si è studiato un metodo variazionale in cui gli stati risultano scritti in modo da incorporare gli effetti non perturbativi derivanti dalle interazioni NN; tale approccio è fornito dalla teoria delle perturbazioni in base correlata (*Correlated Basis Function perturbation theory*, CBF).

Le funzioni d'onda di base sono definite dalla trasformazione

$$|n\rangle = \frac{F|n_{FG}\rangle}{\langle n_{FG}|F^\dagger F|n_{FG}\rangle^{\frac{1}{2}}} , \quad (2.4.2)$$

dove $|n_{FG}\rangle$ sono gli autostati del sistema non interagente mentre F è l'operatore che introduce l'effetto delle correlazioni ed è scritto nella forma

$$F = \mathcal{S} \prod_{j>i=1}^A f_{ij} , \quad (2.4.3)$$

dove l'operatore di correlazione a due corpi f_{ij} riflette la complessità del potenziale di interazione tra nucleoni (2.2.12)

$$f_{ij} = \sum_n f^{(n)}(r_{ij}) O_{ij}^n . \quad (2.4.4)$$

La presenza dell'operatore \mathcal{S} di simmetrizzazione è necessaria poiché tiene conto del fatto che $[f_{ij}, f_{jk}] = 0$. Le funzioni radiali $f^{(n)}(r_{ij})$ possono essere ricavate minimizzando il valore medio dell'hamiltoniana (2.4.1) nello stato fondamentale della base

correlata. Una volta definita la base correlata l'hamiltoniana diventa separabile

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I . \quad (2.4.5)$$

\mathcal{H}_0 sta per la parte diagonale

$$\langle m | \mathcal{H}_0 | n \rangle = \delta_{nm} \langle m | \mathcal{H} | n \rangle , \quad (2.4.6)$$

e \mathcal{H}_I rappresenta la parte non diagonale

$$\langle m | \mathcal{H}_0 | n \rangle = (1 - \delta_{nm}) \langle m | \mathcal{H} | n \rangle . \quad (2.4.7)$$

Poiché

$$\langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle \leq E_0 , \quad (2.4.8)$$

scegliendo opportunamente la forma delle funzioni di correlazione gli stati definiti dalla (2.4.2) risultano ampiamente sovrapposti agli autostati dell'Hamiltoniana ed in virtù di ciò gli elementi di matrice di \mathcal{H}_I sono piccoli. In questo modo è possibile espandere qualsiasi osservabile in serie di potenze di \mathcal{H}_I poiché l'espansione perturbativa risulta rapidamente convergente.

3 Interazione di corrente carica neutrino-nucleone

Nel presente capitolo verrà affrontato il calcolo della sezione d'urto elementare dei processi di diffusione di neutrini su nucleoni liberi poiché propedeutica al calcolo della sezione d'urto di interazione con il nucleo che verrà discusso nel capitolo successivo(4).

3.1 Sezione d'urto inclusiva $\nu - N$

Come noto i neutrini interagiscono con la materia solo debolmente con sezioni d'urto molto piccole e possono essere identificati unicamente attraverso le particelle prodotte nella reazione. Nei processi di corrente carica (CC) il neutrino viene assorbito contestualmente all'emissione del leptone carico della stessa famiglia contrariamente ai processi di corrente neutra (NC) dove il neutrino preserva la sua natura. Nel secondo caso lo studio risulta molto più impegnativo che ne primo, poiché l'identificazione dell'evento è affidata esclusivamente agli adroni dello stato finale.

Per quanto riguarda le interazioni di corrente carica, nel regime di energia preso in considerazione ($E_\nu \sim 1 \text{ GeV}$), rilevante per gli esperimenti *long-baseline*, il contributo dominante alla sezione d'urto viene dallo scattering quasi elastico (CCQE)

$$\nu_\ell + N \rightarrow \ell^- + N' , \quad (3.1.1)$$

in cui abbiamo nucleoni sia nello stato iniziale che in quello finale, dove il termine *quasi* si riferisce al fatto che il neutrino cambia la sua natura; per energie $E_\nu \gtrsim 0.5 \text{ GeV}$ diventa rilevante la produzione di risonanze barioniche

$$\nu_\ell + N \rightarrow \ell^- + R , \quad (3.1.2)$$

che decadono successivamente in mesoni e barioni, principalmente in π . Processo importante ma non dominante fino ad $E_\nu \gtrsim 2 \text{ GeV}$ è la diffusione profondamente

anelastica (DIS)

$$\nu_\ell + N \rightarrow \ell^- + X , \quad (3.1.3)$$

questa risulta dai processi di scattering elastico sui singoli partoni e il sistema adronico nello stato finale X non è più il nucleone, che viene distrutto dall'urto. In fig.(3.1) è riportata una rappresentazione schematica della risposta nucleare in funzione dell'energia trasferita ω .

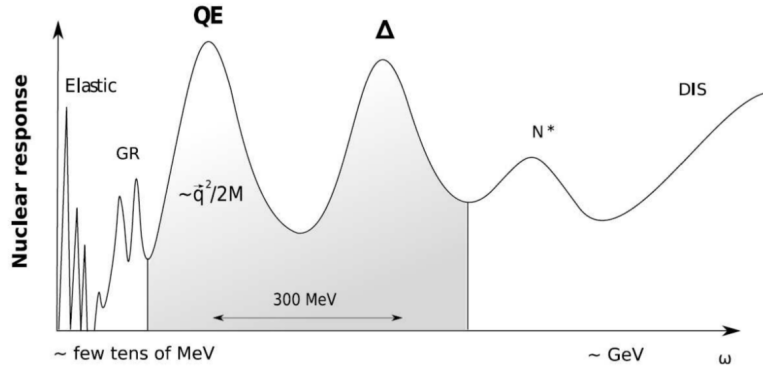


Figura 3.1: rappresentazione schematica della risposta nucleare in funzione dell'energia trasferita nel processo.

Considerando il processo tipo

$$\nu_\ell(k) + N(p) \rightarrow \ell^-(k') + X(p') , \quad (3.1.4)$$

dove X rappresenta il generico stato adronico finale, si può sviluppare il formalismo generale per il calcolo delle sezioni d'urto dei processi CC che verrà in seguito specializzato per i vari canali di reazione.

Nell'approssimazione di Born, l'elemento di matrice invariante per le interazioni di Corrente carica può essere scritto nel seguente modo

$$\mathcal{M} = \left(\frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 \bar{u}_\ell(k') \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_{\nu_\ell}(k) \frac{i}{q^2 - M_W^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2} \right) \langle X(p') | J_\nu^{CC}(0) | N(p) \rangle . \quad (3.1.5)$$

Per processi in cui si ha $|q^2| \ll M_W^2$ per il propagatore vale la seguente sostituzione

$$\frac{i}{q^2 - M_W^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2} \right) \longrightarrow \frac{i g^{\mu\nu}}{M_W^2} \quad (3.1.6)$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{M} = i \frac{g^2}{8M_W^2} \bar{u}_\ell(k') \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_{\nu_\ell}(k) \langle X(p') | J_{CC}^\mu(0) | N(p) \rangle \quad (3.1.7)$$

$$= i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_\ell(k') \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_{\nu_\ell}(k) \langle X(p') | J_{CC}^\mu(0) | N(p) \rangle . \quad (3.1.8)$$

La dinamica dell'interazione è codificata nel modulo quadro dell'elemento di matrice invariante, mediata sugli spin iniziali e sommata su quelli finali

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \sum_{s_i} \frac{1}{2} \sum_{s_f} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.1.9)$$

$$= \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{2} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} , \quad (3.1.10)$$

e a sezione d'urto doppiamente differenziale del processo si scrive [15]

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{k'}} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} , \quad (3.1.11)$$

dove $d\Omega = d\phi d\cos\theta$, e θ rappresenta l'angolo tra il neutrino entrante ed il leptone uscente¹.

$L_{\mu\nu}$ e $W^{\mu\nu}$ rappresentano rispettivamente il tensore associato al vertice leptonic e adronico. Mentre il tensore leptonic, la cui forma esplicita sarà ricavata nel paragrafo successivo, è noto, il tensore adronico risulta più complicato da ricavare a causa della natura non elementare dei nucleoni. In virtù di ciò, si è soliti decomporre l'elemento di matrice in specifiche funzioni scalari W_i , dette funzioni di struttura, che parametrizzano la struttura adronica e gli effetti dell'interazione forte. Non è possibile procedere in maniera più realistica senza un modello esplicito del vertice adronico ed i singoli termini verranno discussi nelle sezioni a seguire.

3.2 Diffusione quasi elastica

A basse energie del neutrino incidente, le interazioni di corrente carica sono dominate da processi quasi-elastici del tipo

$$\nu_\ell(k) + n(p) \rightarrow \ell^-(k') + p(p') , \quad (3.2.1)$$

¹Nelle reazioni inclusive è possibile misurare solamente l'energia e l'angolo di diffusione del leptone carico uscente

in cui un neutrino ν_ℓ di quadrimpulso $k = (E_k, \mathbf{k})$ interagisce con un neutrone libero ($p = (E_p, \mathbf{p})$) per produrre un protone ($p = (E_{p'}, \mathbf{p}')$) e un leptone carico con $k = (E_{k'}, \mathbf{k}')$. L'elemento di matrice invariante come visto precedentemente ha la forma

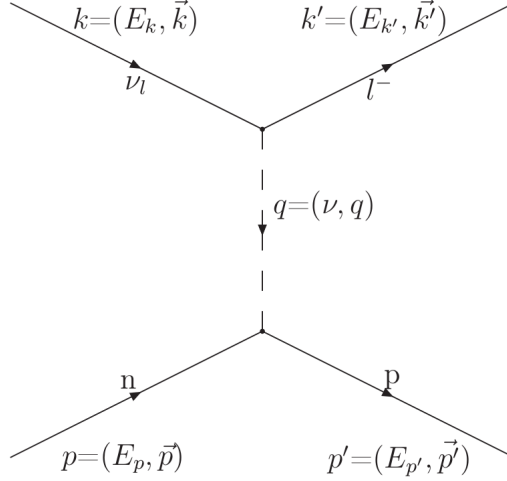


Figura 3.2

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{2} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} , \quad (3.2.2)$$

Il tensore $L_{\mu\nu}$ è noto e si costruisce a partire dalla corrente leptonica j_μ

$$j_\mu = \bar{u}_\ell(k') \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_{\nu_\ell}(k) \quad (3.2.3)$$

e risulta completamente determinato dalle variabili cinematiche dei leptoni ² :

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \sum_{sf, si} [\bar{u}_\ell(k') \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_{\nu_\ell}(k)] [\bar{u}_{\nu_\ell}(k') \gamma_\nu (1 - \gamma^5) u_\ell(k)] \\ &= \text{Tr}[(\not{k}' + m_\ell) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma_\nu (1 - \gamma^5)] \\ &= 8[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} (k \cdot k') + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma] \\ &= L_{\mu\nu}^S + i L_{\mu\nu}^A . \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$(3.2.5)$$

²La massa del neutrino è stata posta uguale a zero

gli apici A ed S si riferiscono alla simmetria sotto scambio degli indici di Lorentz μ e ν . Per quanto concerne il tensore $W^{\mu\nu}$ questo può essere scritto in termini della corrente adronica responsabile della transizione neutrone-protone

$$J_{CC}^\mu = \langle p(p') | J_{CC}^\mu(0) | n(p) \rangle \quad (3.2.6)$$

$$= \bar{u}_p(p') \Gamma^\mu u_n(p) \quad (3.2.7)$$

come segue

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{S_f, S_i} [\bar{u}_n(p) \Gamma^\mu u_p(p')] [\bar{u}_n(p) \Gamma^\nu u_p(p')] \\ &= \frac{1}{2} Tr [(\not{p} + M_n) \Gamma^\mu (\not{p}' + M_p) \Gamma^\nu] , \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

dove Γ^μ rappresenta la funzione vertice.

La corrente debole (3.2.6), responsabile della transizione neutrone-protone nel processo (3.2.1), ha la struttura di Lorenz **V-A**

$$J_{CC}^\mu = \mathcal{V}_{CC}^\mu - \mathcal{A}_{CC}^\mu , \quad (3.2.9)$$

dove i contributi vettoriali e assiali trovano la loro forma più generale nelle espressioni seguenti

$$\mathcal{V}_{CC}^\mu = \bar{u}_p(p') \Gamma_V^\mu u_n(p) , \quad (3.2.10a)$$

$$\mathcal{A}_{CC}^\mu = \bar{u}_p(p') \Gamma_A^\mu u_n(p) , \quad (3.2.10b)$$

con

$$\Gamma_V^\mu = F_1 \gamma^\mu + i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \frac{F_2}{2M} + \frac{F_S}{M} q^\mu , \quad (3.2.11a)$$

$$\Gamma_A^\mu = F_A \gamma^\mu \gamma^5 + i \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu \frac{F_T}{M} + q^\mu \gamma^5 F_P \frac{2M}{m_\pi^2} . \quad (3.2.11b)$$

I fattori di forma F_i che compaiono nella definizione delle correnti assiali e vettoriali dipendono dal quadrato del quadrimpulso trasferito q^2 ; F_1 ed F_2 sono i fattori di forma vettoriali di Dirac e di Pauli rispettivamente, F_S è il fattore di forma scalare, mentre i fattori che compaiono nella corrente assiale F_A , F_T , F_P sono detti rispettivamente assiale, tensoriale e pseudoscalare.

Per quanto riguarda la corrente vettoriale, l'ipotesi CVC permette di mettere in relazione i fattori deboli con quelli elettromagnetici dei nucleoni

$$F_{1,2} = F_{1,2}^p - F_{1,2}^n \quad (3.2.12)$$

e di vincolare $F_S(q^2) = 0$. I fattori $F_{1,2}^p$ e $F_{1,2}^n$ possono essere parametrizzati come segue in termini dei fattori elettrici e magnetici G_E e G_M :

$$F_1^{n,p}(q^2) = \left[G_E^{p,n} - \frac{q^2}{4M^2} G_M^{p,n} \right] \left[1 - \frac{q^2}{4M^2} \right]^{-1}, \quad (3.2.13a)$$

$$F_2^{n,p}(q^2) = [G_M^{p,n} - G_E^{p,n}] \left[1 - \frac{q^2}{4M^2} \right]^{-1}. \quad (3.2.13b)$$

G_E e G_M vengono scritti nella maggior parte dei casi nella semplice forma di dipolo

$$G_E^{p,n} = \left[1 - \frac{q^2}{M_V^2} \right]^{-2}, \quad (3.2.14a)$$

$$G_M^{p,n} = 4.71 G_E^{p,n}. \quad (3.2.14b)$$

dove M_V è un parametro, la massa vettoriale, il cui valore sperimentale risulta essere $M_V^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$

Per la corrente assiale l'ipotesi PCAC permette di mettere invece in relazione $F_P(q^2)$ e $F_A(q^2)$ in modo tale che risulti ³

$$F_P(q^2) = \frac{2M^2}{m_\pi^2 - q^2} F_A(q^2) \quad (3.2.15)$$

dove il fattore assiale viene parametrizzato in forma di dipolo

$$F_A = g_A \left[1 - \frac{q^2}{M_A^2} \right]^{-2}, \quad (3.2.16)$$

La costante di accoppiamento assiale è ricavata sperimentalmente dal decadimento β del neutrone e vale $g_A = -1.261 \pm 0.004$, mentre la massa assiale $M_A = 1.032 \pm 0.036 \text{ GeV}$ viene estratta tramite fit sui dati di scattering di neutrini su deuterio; il fattore di forma pseudoscalare può essere trascurato nel caso di scattering di neutrini elettronici e muonici, mentre nel caso di neutrini ν_τ diventa rilevante.

Utilizzando quanto detto finora ed usando le seguenti relazioni

$$\tilde{p}^\mu = (p + p')^\mu \quad (3.2.17)$$

$$r = -\frac{F_A}{F_1 + F_2}, \quad (3.2.18)$$

$$R = -\frac{F_2}{F_1 + F_2}, \quad (3.2.19)$$

³All'elemento di matrice contribuisce il processo di scambio di un pione, che viene creato nel vertice $n-p$ per poi accoppiarsi alla coppia di leptoni. Il fattore di forma pseudoscalare viene identificato con il contributo associato al polo del pione.

è possibile riscrivere il tensore $W^{\mu\nu}$ nel modo seguente

$$W^{\mu\nu} = \text{Tr} \left\{ (\not{p}' + M_p) \left[\gamma^\mu (1 - r\gamma^5) - \frac{R}{2M_p} \tilde{p}^\mu \right] \right. \quad (3.2.20)$$

$$\left. \times (\not{p} + M_n) \left[\gamma^\nu (1 - r\gamma^5) - \frac{R}{2M_p} \tilde{p}^\nu \right] \right\} (F_1 + F_2)^2, \quad (3.2.21)$$

e sviluppando la traccia si ottiene

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} = & \left\{ -2g^{\mu\nu} \left[r^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - \frac{q^2}{4M^2} \right] \right. \quad (3.2.22) \\ & + 2p^\mu p^\nu \left[1 + r^2 + R^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - 2R \right] \\ & + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p_\rho p_\sigma}{2M^2} 4r \\ & + \frac{q^\mu q^\nu}{M^2} \left[\frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - R \right] \\ & \left. + \frac{p^\mu q^\nu - q^\mu p^\nu}{M^2} \left[1 + r^2 + R^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} - 2R \right) \right] \right\} (F_1 + F_2)^2. \end{aligned}$$

La forma più generale per il tensore adronico in termini delle sei funzioni di struttura W_i , che dipendono dal quadrimpulso trasferito $q = (\omega, \mathbf{q})$, è la seguente

$$W^{\mu\nu} = W_S^{\mu\nu} + iW_A^{\mu\nu} \quad (3.2.23)$$

$$\begin{aligned} & = -g^{\mu\nu} W_1(q^2) + p^\mu p^\nu \frac{W_2(q^2)}{M_n^2} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma \frac{W_3(q^2)}{2M_n^2} + q^\mu q^\nu \frac{W_4(q^2)}{M_n^2} \\ & + \frac{p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu}{2M_n^2} W_5(q^2) + i \frac{p^\mu q^\nu - q^\mu p^\nu}{2M_n^2} W_6(q^2); \quad (3.2.24) \end{aligned}$$

i termini W_6 e W_3 appaiono a causa della violazione di parità dove W_6 risulta nullo come richiesto dall'invarianza sotto CP, può per questo essere omissa.

Nel canale quasi elastico le funzioni di struttura possono essere scritte nella forma

$$W_i = \tilde{W}_i \delta \left(\omega + \frac{q^2}{2M} \right) \quad (3.2.25)$$

dove la δ di conservazione serve ad imporre la condizione di scattering elastico.

Confrontando le espressioni (3.2.22) e (3.2.23) otteniamo la forma delle cinque funzioni

di struttura in termini dei fattori di forma:

$$\tilde{W}_1 = 2[F_A^2(1 + \tau) + \tau(F_1 + F_2)^2] \quad (3.2.26a)$$

$$\tilde{W}_2 = 2[F_A^2 + F_1^2 + \tau F_2^2] \quad (3.2.26b)$$

$$\tilde{W}_3 = 4F_A(F_1 + F_2) \quad (3.2.26c)$$

$$\tilde{W}_4 = \frac{1}{2}[F_2(1 + \tau) - 2F_2(F_1 + F_2)] \quad (3.2.26d)$$

$$\tilde{W}_5 = \frac{W_2}{2} \quad (3.2.26e)$$

avendo definito $\tau = -q^2/4M^2$. Quello che rimane da fare per arrivare all'espressione finale per la (3.2.2) è la contrazione tra il tensore adronico e leptónico, $L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$, considerando quanto detto finora arriviamo al seguente risultato:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = & 8 \left\{ \tilde{W}_1(2k \cdot k') \right. \\ & + \tilde{W}_2 \left[2 \frac{(p \cdot k)(p \cdot k')}{M^2} - (k \cdot k') \right] \\ & + \tilde{W}_3 \frac{2}{M^2} [(k \cdot q)(k \cdot p) - (k' \cdot p)(k \cdot q)] \\ & + \tilde{W}_4 \left[\frac{2}{M^2} (k' \cdot p)(k \cdot p) - (k' \cdot k)q^2 \right] \\ & \left. + \tilde{W}_5 \frac{2}{M^2} [(k \cdot p)(k' \cdot q) + (k' \cdot p)(k \cdot q) - (q \cdot p)(k' \cdot k)] \right\} \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Mettendosi nel sistema di riferimento del laboratorio in cui il neutrone bersaglio è fermo e trascurando la massa del neutrino incidente si ha

$$p^\mu = (M, 0) , \quad (3.2.28a)$$

$$k^\mu = (E_k, \mathbf{k}) , \quad (3.2.28b)$$

$$k'^\mu = (E_{k'}, \mathbf{k}') , \quad (3.2.28c)$$

per cui la (3.2.27) diventa

$$L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = 2E_k E_{k'} \left\{ \tilde{W}_1 \left(1 - \frac{|k'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) + \frac{\tilde{W}_2}{2} \left(1 + \frac{|k'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) \right. \quad (3.2.29)$$

$$\left. + \tilde{W}_3 \left[\frac{m_{e\ell}^2}{2ME_{k'}} - \frac{E_k + E_{k'}}{2M} \left(1 + \frac{|k'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) \right] \right\} \quad (3.2.30)$$

$$\left. + \tilde{W}_4 \frac{m_\ell^2}{2M^2} \left(1 + \frac{|k'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) - \tilde{W}_5 \frac{m_\ell^2}{ME_{k'}} \right\} \quad (3.2.31)$$

La sezione d'urto doppiamente differenziale del processo si scrive quindi

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{k'}} &= \frac{G_F^2 |V_{ud}|}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \\
 &= \frac{G_F^2 |V_{ud}|}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} 2E_k E_{k'} \left\{ \tilde{W}_1 \left(1 - \frac{|k'|}{E_{k'}} \cos\theta\right) + \frac{\tilde{W}_2}{2} \left(1 + \frac{|k'|}{E_{k'}} \cos\theta\right) \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{W}_3 \left[\frac{m_{ell}^2}{2ME_{k'}} - \frac{E_k + E_{k'}}{2M} \left(1 + \frac{|k'|}{E_{k'}} \cos\theta\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{W}_4 \frac{m_\ell^2}{2M^2} \left(1 + \frac{|k'|}{E_{k'}} \cos\theta\right) - \tilde{W}_5 \frac{m_\ell^2}{ME_{k'}} \right\}, \tag{3.2.32}
 \end{aligned}$$

dove i termini W_4 e W_5 sono proporzionali alla massa del leptone carico.

3.3 Produzione di risonanze

Nel range di energie considerate il processo piú importante dopo lo scattering quasi elastico è la produzione di risonanze, il cui contributo maggiore si deve alla Δ^{++} prodotta nel processo

$$\nu_\ell(k) + p(p) \longrightarrow \ell^-(k') + \Delta^{++}(p') \tag{3.3.1}$$

La sezione d'urto doppiamente differenziale del processo si scrive

$$\frac{d\sigma^2}{d\Omega dE_{k'}} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{16\pi^2} \frac{E_{k'}}{E_k} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \tag{3.3.2}$$

dove il tensore associato al vertice leptonic rimane invariato rispetto al caso di CCQE,

$$L_{\mu\nu} = 8[k'_\mu k'_\nu + k'_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(k \cdot k') + i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma], \tag{3.3.3}$$

mentre per il tensore adronico si ha

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2M} \sum \langle p | J^\mu(0) | \Delta^{++} \rangle \langle \Delta^{++} | J^\nu(0) | p \rangle \delta(\mathcal{W}^2 - M_\Delta^2) \tag{3.3.4}$$

$$= -g^{\mu\nu} W_1 + p^\mu p^\nu \frac{W_2}{M^2} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho q_\sigma \frac{W_3}{2M_n^2} \tag{3.3.5}$$

$$+ q^\mu q^\nu \frac{W_4}{M^2} + \frac{p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu}{2M^2} W_5 \tag{3.3.6}$$

$$+ i \frac{p^\mu q^\nu - q^\mu p^\nu}{2M^2} W_6, \tag{3.3.7}$$

dove la somma è riferita agli stati di polarizzazione della Δ e M_Δ indica il polo di massa della risonanza. Le funzioni di struttura W_i , a differenza del caso di scattering

quasi elastico, dipenderanno oltre che da q^2 anche dalla massa invariante della Δ . La funzione- δ in questo caso deve essere sostituita dalla funzione di Breit-Wigner che tiene conto del fatto che la Δ^{++} ha una larghezza osservabile:

$$\delta(\mathcal{W}^2 - M_\Delta^2) \longrightarrow \frac{M_\Delta \Gamma_\Delta}{\pi} \frac{1}{(\mathcal{W}^2 - M_\Delta^2)^2 + M_\Delta^2 \Gamma_\Delta^2}, \quad (3.3.8)$$

dove Γ_Δ indica la larghezza della risonanza e $\mathcal{W} = \sqrt{p'^2}$ la massa invariante. In virtù di quanto detto è conveniente scrivere la sezione d'urto differenziale in termini della massa invariante e del quadrimpulso trasferito $Q^2 = -q^2$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^2}{dQ^2 d\mathcal{W}} &= \frac{\pi \mathcal{W}}{M E_k E_{k'}} \frac{d\sigma^2}{d\Omega dE_{k'}} \\ &= \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{16\pi} \frac{\mathcal{W}}{M E_k^2} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Il tensore adronico dipende dalla specifica risonanza presa in considerazione, per la corrente di transizione $p - \Delta^{++}$ la parametrizzazione è la seguente

$$\langle \Delta^{++} | J^\mu(0) | p \rangle = \sqrt{3} \Psi_\nu(p') D^{\nu\mu} u_p(p) \quad (3.3.9)$$

dove Ψ_ν è lo spinore di Rarita-Schwinger (R-S) che descrive lo stato risonante, mentre si ha

$$D^{\nu\mu} = g^{\nu\mu} \left[\frac{C_3^V}{M^2} \not{p} + \frac{C_4^V}{M^2} (p' \cdot q) + \frac{C_5^V}{M^2} (p \cdot q) + C_6^V \right] \gamma^5 \quad (3.3.10)$$

$$- q^\nu \left[\frac{C_3^V}{M^2} \gamma^\mu + \frac{C_4^V}{M^2} (\not{p} p^\mu + \frac{C_5^V}{M^2} p^\nu) \right] \gamma^5 \quad (3.3.11)$$

$$+ g^{\nu\mu} \left[\frac{C_3^A}{M^2} \not{p} + \frac{C_4^A}{M^2} (p' \cdot q) + C_5^A \right] \quad (3.3.12)$$

$$- q^\nu \left[\frac{C_3^V}{M^2} \gamma^\mu + \frac{C_4^V}{M^2} \not{p} p^\mu - q^\mu \frac{C_6^A}{M^2} \right], \quad (3.3.13)$$

l'apice A e V indicano rispettivamente i fattori di forma assiali e vettoriali. Servendosi dell'operatore di proiezione di R-S per le particelle di spin 3/2

$$P^{\rho\sigma} = -[\not{p}' + M_\Delta] \left[-g^{\rho\sigma} - \frac{2}{3} \frac{p'^\rho p'^\sigma}{M_\Delta^2} + \frac{1}{3} \frac{(\gamma^\rho p'^\sigma - p'^\rho \gamma^\sigma)}{M_\Delta} - \frac{1}{3} \gamma^\rho \gamma^\sigma \right] \quad (3.3.14)$$

otteniamo la seguente forma per $W^{\mu\nu}$

$$W^{\mu\nu} = \frac{3}{2} \frac{1}{2M} \text{Tr}[(\not{p} + M) \bar{D}^{\mu\rho} P_{\rho\sigma} D^{\sigma\nu}] \quad (3.3.15)$$

dove il fattore 3 viene dalle relazioni di isospin⁴ che legano il multipletto delle Δ , mentre il fattore 1/2 viene dalla media sugli spin iniziali del protone.

Dal confronto delle equazioni (3.3.4) e (3.3.15) è possibile calcolare la forma delle funzioni di struttura in termini dei fattori di forma $C_i^{V,A}$,

$$W_i(Q^2, \omega) = \frac{1}{M} V_i(Q^2, \omega) \delta(\mathcal{W}^2 - M_\Delta^2) \quad (3.3.16)$$

l'espressione esplicita delle funzioni V_i è riportata in (5.2) e la sezione d'urto diventa [16]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^2}{dQ^2 d\mathcal{W}} = & \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{4\pi} \frac{\mathcal{W}}{ME_k^2} \left\{ W_1(Q^2 + m_\ell^2) \right. \\ & + \frac{W_2}{M^2} \left[2(k \cdot p)(k' \cdot p) - \frac{M^2}{2}(Q^2 + m_\ell^2) \right] \\ & - \frac{W_3}{M^2} \left[Q^2(k \cdot p) - \frac{1}{2(p \cdot q)(Q^2 + m_\ell^2)} \right] \\ & \left. + \frac{W_4}{M^2} m_\ell^2 \frac{(Q^2 + m_\ell^2)}{2} - 2 \frac{W_5}{M^2} m_\ell^2 (k \cdot p) \right\} \quad (3.3.17) \end{aligned}$$

Rimangono da determinare i fattori di forma e questo può essere fatto tramite risultati sperimentali e principi generali; per quanto riguarda i fattori vettoriali l'ipotesi CVC permette subito di scrivere

$$C_6^V = 0, \quad (3.3.18)$$

ed implica inoltre che i membri di uno stesso multipletto abbiano gli stessi fattori di forma. Per gli altri tre fattori si trova che questi sono gli stessi che intervengono nell'elettroproduzione e assumendo che il contributo dominante sia quello di dipolo magnetico si ha

$$C_3^V = 1.95, \quad (3.3.19)$$

$$C_4^V = -C_3^V \frac{M}{\mathcal{W}}, \quad (3.3.20)$$

$$C_5^V = 0, \quad (3.3.21)$$

ovvero rimane C_3^V l'unico fattore di forma vettoriale indipendente; poiché i dati implicano una dipendenza maggiore dal quadrimpulso trasferito rispetto al semplice dipolo

⁴ $\langle \Delta^{++} | J^\mu(0) | p \rangle = \sqrt{3} \langle \Delta^+ | J^\mu(0) | n \rangle$

per C_3^V si assume la seguente parametrizzazione

$$C_3^V(Q^2) = \frac{C_3^V(0)}{1 + \frac{Q^2}{4M_V^2}} \left[1 + \frac{Q^2}{M_V^2} \right]^{-2} \quad (3.3.22)$$

dove Il contributo più rilevante per i fattori di forma assiali viene da C_5^A il cui valore numerico è connesso al fattore pseudoscalare C_6^A dall'ipotesi PCAC, quest'ultimo è associato al polo del pione:

$$C_6^A(Q^2) = \frac{g_\Delta f_\pi}{\sqrt{3}} \frac{M^2}{Q^2 + m_\pi^2} \quad (3.3.23)$$

$$= C_5^A(0) \frac{M^2}{Q^2 + m_\pi^2} \quad (3.3.24)$$

con $f_\pi = 0.97m_\pi$ costante di decadimento del π , $g_\Delta = 15.3 \text{ GeV}^{-1}$ e $C_5^A(0) = 1.2$.

Oltre a quanto detto, per i rimanenti fattori di forma non si hanno vincoli teorici ed è necessario estrarli dai fit dei dati sperimentali sui neutrini. Per C_5^A la parametrizzazione usata è la seguente

$$C_5^A = \frac{C_3^V(0)}{1 + \frac{Q^2}{3M_A^2}} \left[1 + \frac{Q^2}{M_A^2} \right]^{-2} \quad (3.3.25)$$

mentre si ha

$$C_3^A = 0, \quad (3.3.26)$$

$$C_4^A = -\frac{C_5^V}{4}, \quad (3.3.27)$$

dove $M_A = 1.05$.

Chiaramente è necessario tenere conto del fatto che quella adottata è solamente una delle parametrizzazioni possibili per i fattori di forma relativi ai processi di produzione delle risonanze.

3.4 Scattering profondamente anelastico

Nel caso in cui l'energia del neutrino incidente sia molto maggiore della massa del nucleone bersaglio il processo dominante è lo scattering profondamente anelastico (deep inelastic scattering, DIS)[17], si ha dunque la seguente reazione

$$\nu_\ell(k) + N(p) \longrightarrow \ell^-(k') + X(p'), \quad (3.4.1)$$

dove N e X denotano rispettivamente il nucleone bersaglio, che viene distrutto dall'urto, e lo stato adronico finale. In questo caso i neutrini interagiscono con i gradi di libertà partonici dei nucleoni, sarà pertanto necessario prendere in considerazione i processi di diffusione dei neutrini sui quark. Detto questo si può procedere quindi in due step, per prima cosa si scrive l'espressione generale della sezione d'urto in termini delle funzioni di struttura, in un secondo momento si valutano le espressioni facendo ricorso al *quark-parton model* (QPM).

Per ricavare la sezione d'urto del processo (3.4.1) bisogna nuovamente calcolare i tensori $L_{\mu\nu}$ e $W^{\mu\nu}$. Il primo rimane invariato rispetto al caso quasi elastico e si ottiene nuovamente la (3.3.3), per quanto riguarda il tensore adronico, questo risulta parametrizzato da cinque funzioni di struttura indipendenti come segue [18]

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) + \frac{W_2}{p \cdot q} \left(p^\mu - q^\mu \frac{p \cdot q}{q^2} \right) \left(p^\nu - q^\nu \frac{p \cdot q}{q^2} \right) + \frac{W_3}{2p \cdot q} i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma - W_4 \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} + W_5 \frac{q_\mu p_\nu + q_\nu p_\mu}{p \cdot q}. \quad (3.4.2)$$

A differenza del caso QE, in cui le W_i erano funzioni del solo quadrimpulso trasferito, nel DIS sono funzioni di ω e Q^2 , ora variabili indipendenti. Si possono introdurre a questo punto le variabili di Björken

$$x = \frac{Q^2}{p \cdot q}, \quad (3.4.3)$$

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}. \quad (3.4.4)$$

Dalla contrazione dei due tensori si ottiene la forma esplicita della sezione d'urto, che è naturale esprimere in forma differenziale rispetto ai due invarianti relativistici x e y tramite la relazione seguente

$$\frac{d\sigma^2}{dx dy} = \frac{2\pi M y}{1-y} \frac{d\sigma^2}{d\Omega dE_{k'}}, \quad (3.4.5)$$

ottenendo quindi

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^2}{dx dy} = & \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 (s - M^2)}{2\pi} \left[W_1 y^2 x \frac{Q^2 + m_\ell^2}{Q^2} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{2Q^2} \right) \right. \\ & + W_2 \left[\left(1 - \frac{y}{2} \frac{Q^2 + m_\ell^2}{Q^2} \right)^2 - \frac{y^2}{4} \frac{Q^2 + m_\ell^2}{Q^2} \left(1 + \frac{p^2 Q^2}{(p \cdot q)^2} \right) \right] \\ & \left. + W_3 x y \left(1 - \frac{y}{2} \frac{Q^2 + m_\ell^2}{Q^2} \right) + W_4 \frac{y}{4} \frac{Q^2 + m_\ell^2}{Q^2} \frac{m_\ell^2}{p \cdot k'} - W_5 \frac{m_\ell^2}{p \cdot k'} \right], \quad (3.4.6) \end{aligned}$$

dove è stata utilizzata la variabile cinematica $s = (p + k)^2$, che indica il quadrato dell'energia nel centro di massa. Riesprimendo tutto in funzione delle due variabili di scaling e trascurando la massa del leptone carico uscente sopravvivono solamente i termini proporzionali a W_1 , W_2 e W_3 . La sezione d'urto assume quindi la forma

$$\frac{d\sigma^2}{dx dy} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 (s - M^2)}{2\pi} \left[y^2 x M W_1 + \left(1 - y - \frac{xyM^2}{(s - M^2)} \right) \omega W_2 + \left(1 - \frac{y}{2} \right) \omega W_3 \right]. \quad (3.4.7)$$

Nel limite $\omega \rightarrow \infty$, $Q^2 \rightarrow \infty$, ad x fissato, per l'ipotesi di scaling di Bjorken le funzioni W_i diventano funzioni della sola variabile x e sussistono le seguenti relazioni

$$M W_1(x, Q^2) \rightarrow F_1(x), \quad (3.4.8)$$

$$\omega W_2(x, Q^2) \rightarrow F_2(x), \quad (3.4.9)$$

$$\omega W_3(x, Q^2) \rightarrow F_3(x), \quad (3.4.10)$$

tramite cui, sfruttando la relazione di Callan-Gross $F_2(x) = 2xF_1(x)$, si arriva a scrivere

$$\frac{d\sigma^2}{dx dy} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 s}{2\pi} \left[\left(1 + (1 - y)^2 \right) F_2(x) + \left(1 - (1 - y)^2 \right) x F_3(x) \right]. \quad (3.4.11)$$

Introducendo il modello QPM, che vede il nucleone come un sistema composto da particelle elementari, la variabile di Bjorken assume il significato di frazione di momento del nucleone trasportato dal partone diffuso e lo scaling può essere riassunto nelle seguenti relazioni

$$2F_1(x) = \sum_i e_i^2 q_i(x), \quad (3.4.12)$$

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x q_i(x), \quad (3.4.13)$$

dove $q_i(x)$ rappresenta la densità di probabilità che il quark i -esimo abbia una frazione x del momento del nucleone, mentre e_i è la sua carica frazionaria.

Bisogna considerare a questo punto i processi di scattering dei neutrini con i costituenti fondamentali dei nucleoni, i quark. Considerando solamente la prima generazione si hanno processi del tipo

$$\nu_\ell(k) + d(p) \rightarrow \ell^-(k') + u(p'). \quad (3.4.14a)$$

$$\nu_\ell(k) + \bar{u}(p) \rightarrow \ell^-(k') + \bar{d}(p'). \quad (3.4.14b)$$

che indicano rispettivamente le possibili interazioni dei neutrini con i quark di *valenza* e le coppie quark-antiquark del *mare*. Facendo riferimento alla prima delle (3.4.14) le correnti che entrano in gioco sono

$$j_\mu^q = \bar{u}_u(k')\gamma_\mu(1 - \gamma^5)u_d(k) , \quad (3.4.15)$$

$$j_\mu^\ell = \bar{u}_\ell(k')\gamma_\mu(1 - \gamma^5)u_{\nu_\ell}(k) \quad (3.4.16)$$

e la sezione d'urto differenziale del processo nell'angolo solido, nel limite ultra relativistico, è semplicemente

$$\frac{d\sigma_{\nu d}^2}{d\Omega} = \frac{G_F^2|V_{ud}|^2}{4\pi^2}s' , \quad (3.4.17)$$

dove s' è l'energia del centro di massa che risulta pari a $s' = xs$. Per l'interazione con l'anti-up si ha invece

$$\frac{d\sigma_{\nu\bar{u}}^2}{d\Omega} = \frac{G_F^2|V_{ud}|^2}{16\pi^2}(1 - \cos\theta)^2s' , \quad (3.4.18)$$

con θ angolo di diffusione del leptone carico. Riesprimendo tutto in funzione di x e y , in modo da rendere la sezione d'urto esplicitamente invariante, si ottiene

$$\frac{d\sigma_{\nu d}^2}{d\Omega} = \frac{G_F^2|V_{ud}|^2s}{4\pi^2}(1 - y)^2 , \quad (3.4.19)$$

$$\frac{d\sigma_{\nu\bar{u}}^2}{dx dy} = \frac{G_F^2|V_{ud}|^2s}{2\pi}(1 - y)^2 , \quad (3.4.20)$$

dove la dipendenza angolare è contenuta nella relazione $y = 1/2(1 - \cos\theta)$. Per le prescrizioni del modello QMP, è quindi possibile scrivere la sezione d'urto su protone e neutrone in termini delle funzioni di distribuzione dei partoni:

$$\frac{d\sigma_{\nu p}^2}{dx dy} = \frac{G_F^2|V_{ud}|^2}{\pi}sx[d(x) + (1 - y)^2\bar{u}(x)] , \quad (3.4.21)$$

$$\frac{d\sigma_{\nu n}^2}{dx dy} = \frac{G_F^2|V_{ud}|^2}{\pi}sx[u(x) + (1 - y)^2\bar{d}(x)] , \quad (3.4.22)$$

e per bersagli nucleari isoscalari la sezione d'urto su nucleone diventa quindi

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\nu N}^2}{dx dy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma_{\nu p}^2}{dx dy} + \frac{d\sigma_{\nu n}^2}{dx dy} \right) \\ &= \frac{G_F^2|V_{ud}|^2}{2\pi}sx[u(x) + d(x) + (1 - y)^2[\bar{u}(x) + \bar{d}(x)] , \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

dove risulta evidente che la probabilità di interazione del neutrino con un antiquark è soppressa da un fattore $(1 - y)^2$ rispetto a quella con un quark. Dal confronto tra

le sezioni d'urto (3.4.11) e (3.4.23) è possibile ricavare l'espressione delle funzioni F_i ottenendo

$$\begin{aligned} F_2(x) &= x(u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x)) \\ &= x(q(x) + \bar{q}(x)) , \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

$$\begin{aligned} xF_3(x) &= x(u(x) + d(x) - \bar{u}(x) - \bar{d}(x)) \\ &= x(q(x) + \bar{q}(x)) , \end{aligned} \tag{3.4.25}$$

Si può concludere mettendo in evidenza la relazione che esiste tra le funzioni di struttura F_1 e F_2 dello scattering da neutrino con quelle relative al processo di scattering anelastico da elettroni

$$F_2^{\nu N} = \frac{18}{5} F_2^{eN} . \tag{3.4.26}$$

4 Interazione neutrino-nucleo

Attraverso gli strumenti e le nozioni acquisite nei capitoli precedenti è possibile eseguire il calcolo della sezione d'urto dei processi di interazione neutrino-nucleo; il formalismo usato si basa sull'approssimazione impulsiva i cui elementi cardine risultano essere la funzione spettrale del nucleo, che descrive la distribuzione di impulso ed energia dei nucleoni che lo compongono, e la sezione d'urto elementare dei processi di diffusione su singolo nucleone, calcolata a tal scopo nel precedente capitolo 3.

4.1 Approssimazione impulsiva

Si consideri il seguente processo di interazione

$$\nu_\ell(k) + A \longrightarrow \ell^-(k') + X \quad (4.1.1)$$

in cui un neutrino di quadrimpulso iniziale $k = (E_k, \mathbf{k})$ interagisce con un nucleo A per dare un leptone carico ℓ^- di quadrimpulso $k = (E_{k'}, \mathbf{k}')$ e uno stato X non osservato. La sezione d'urto differenziale può essere scritta nella seguente forma

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{k'}} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 |\mathbf{k}'|}{16\pi^2 |\mathbf{k}|} L_{\mu\nu} W_A^{\mu\nu}, \quad (4.1.2)$$

dove il tensore leptonic è lo stesso ricavato nel capitolo precedente (3)

$$L_{\mu\nu} = 8[k'_\mu k'_\nu + k'_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(k \cdot k') + i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma] \quad (4.1.3)$$

Per quanto riguarda il tensore $W_A^{\mu\nu}$, che descrive la risposta del nucleo bersaglio e contiene tutte le informazioni sulla dinamica delle interazioni forti, questo può essere definito a partire dagli stati adronici iniziali e finali, rispettivamente $|0\rangle$ e $|X\rangle$ di quadrimpulso p_0 e p_X , e dalla corrente nucleare J_A^μ come segue

$$W_A^{\mu\nu} = \sum_X \langle 0 | J_A^{\mu\dagger} | X \rangle \langle X | J_A^\nu | 0 \rangle \delta^{(4)}(p_0 + q - p_X), \quad (4.1.4)$$

dove $q = (\omega, \mathbf{q})$ rappresenta il quadrimpulso trasferito e la somma è estesa a tutti i possibili stati finali. Per grandi valori di $|q|$, corrispondenti ad energie $E_k \sim 1\text{Gev}$, la descrizione degli stati finali in termini di nucleoni non relativistici non risulta possibile ed il calcolo di $W_A^{\mu\nu}$ richiede inevitabilmente delle approssimazioni che permettano di tener conto sia del moto relativistico delle particelle nello stato finale sia del possibile insorgere di processi anelastici che portino alla comparsa di adroni diversi da protoni e neutroni, come la produzione di risonanze.

Un approccio ampiamente usato per il calcolo delle sezioni d'urto che permette di ottenere risultati accurati è basato sull'approssimazione impulsiva (IA), questa risulta applicabile nel momento in cui il quadrimpulso \mathbf{q} trasferito nel processo di diffusione è tale che la risoluzione spaziale della sonda $\lambda \sim \mathbf{q}^{-1}$ è molto minore della distanza media tra i nucleoni del bersaglio; poiché all'aumentare del momento trasferito la sonda diviene sensibile ad una regione di dimensione sempre più piccola all'interno del nucleo, questo può quindi essere considerato come una collezione di nucleoni individuali. In queste condizioni l'interazione coinvolge un solo nucleone ed il sistema residuo di $(A - 1)$ nucleoni evolve in maniera indipendente dalle particelle prodotte al vertice elementare; questo permette di ridurre la sezione d'urto nucleare alla somma incoerente delle sezioni d'urto delle interazioni con i singoli nucleoni del bersaglio. Inoltre si assume che le interazioni tra gli adroni dello stato finale e i nucleoni del sistema spettatore siano trascurabili, risulta possibile trascurare gli effetti di interazione degli stati finali (Final State Interaction, FSI) e le correlazioni statistiche dovute al principio di esclusione di Pauli.

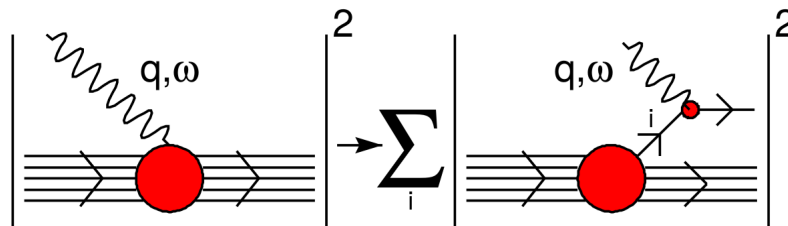


Figura 4.1: Rappresentazione dello schema IA in cui la sezione d'urto dell'interazione $\nu - A$ viene sostituita dalla somma incoerente delle singole sezioni d'urto dei processi elementari neutrino-nucleone.

Formalmente questo si traduce nella possibilità di scrivere la corrente nucleare debole come somma di correnti ad un corpo,

$$J_A^\mu \longrightarrow \sum_i j_i^\mu, \quad (4.1.5)$$

mentre lo stato finale si riduce al prodotto diretto dello stato adronico prodotto al vertice di interazione e dello stato che descrive il sistema residuo di $(A - 1)$ nucleoni

$$|X\rangle \longrightarrow |x, \mathbf{p}_x\rangle \otimes |\mathcal{R}, \mathbf{p}_\mathcal{R}\rangle, \quad (4.1.6)$$

dove $\mathbf{p}_\mathcal{R} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$. Questo implica che la somma che compare nella (4.1.4) può essere sostituita con

$$\sum_X |X\rangle\langle X| \longrightarrow \sum_x \int d^3 p_x |x, \mathbf{p}_x\rangle\langle \mathbf{p}_x, x| \sum_{\mathcal{R}} \int d^3 p_\mathcal{R} |\mathcal{R}, \mathbf{p}_\mathcal{R}\rangle\langle \mathbf{p}_\mathcal{R}, \mathcal{R}| \quad (4.1.7)$$

Inserendo un set completo di stati per i nucleoni liberi, che soddisfa la relazione di completezza

$$\int d^3 p |N, \mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p}, N| = 1, \quad (4.1.8)$$

e sostituendo le (4.1.5) e (4.1.6) nella (4.1.4), l'elemento di matrice risulta fattorizzato come segue

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_A^\mu | X \rangle &= \langle 0 | \sum_i j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x \rangle | \mathcal{R}, \mathbf{p}_\mathcal{R} \rangle \\ &= \int d^3 p \langle 0 | N, -\mathbf{p}_\mathcal{R}; \mathcal{R}, \mathbf{p}_\mathcal{R} \rangle \langle N, -\mathbf{p}_\mathcal{R} | \sum_i j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x \rangle \\ &= \left(\frac{m}{\sqrt{\mathbf{p}_\mathcal{R}^2 + m^2}} \right)^{1/2} \langle 0 | R, \mathbf{p}_\mathcal{R}; N, -\mathbf{p}_\mathcal{R} \rangle \sum_i \langle -\mathbf{p}_\mathcal{R}, N | j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Indicando con $E_{\mathbf{p}_\mathcal{R}} = \sqrt{\mathbf{p}_\mathcal{R}^2 + m^2}$ si ottiene per il tensore adronico

$$\begin{aligned} W_A^{\mu\nu} &= \sum_{\mathcal{R}} \sum_x \int d^3 p_x d^3 p_\mathcal{R} |\langle 0 | R, \mathbf{p}_\mathcal{R}; N, -\mathbf{p}_\mathcal{R} \rangle|^2 \frac{m}{E_{\mathbf{p}_\mathcal{R}}} \\ &\quad \times \sum_i \langle -\mathbf{p}_\mathcal{R}, N | j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x \rangle \langle \mathbf{p}_x, x | j_i^\nu | N, -\mathbf{p}_\mathcal{R} \rangle \\ &\quad \times \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_\mathcal{R} - \mathbf{p}_x) \delta(\omega + E_0 - E_\mathcal{R} - E_x), \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

dove E_0 , $E_{\mathcal{R}} = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{R}}|^2 + M_{\mathcal{R}}^2}$ ed E_x indicano rispettivamente l'energia dello stato fondamentale del nucleo bersaglio, l'energia del sistema residuo e l'energia dello stato prodotto al vertice di interazione.

Sfruttando la seguente identità

$$\delta(\omega + E_0 - E_{\mathcal{R}} - E_x) = \int dE \delta(E - m + E_0 - E_{\mathcal{R}}) \delta(\omega - E + m - E_x) \quad (4.1.11)$$

si può riscrivere la (4.1.4) nella forma

$$\begin{aligned} W_A^{\mu\nu} &= \sum_{\mathcal{R}} \sum_x \int d^3 p_x d^3 p_{\mathcal{R}} dE |\langle 0 | R, \mathbf{p}_{\mathcal{R}}; N, -\mathbf{p}_{\mathcal{R}} \rangle|^2 \delta(E - m + E_0 - E_{\mathcal{R}}) \\ &\quad \times \frac{m}{E_{\mathbf{p}_{\mathcal{R}}}} \sum_i \langle -\mathbf{p}_{\mathcal{R}}, N | j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x \rangle \langle \mathbf{p}_x, x | j_i^\nu | N, -\mathbf{p}_{\mathcal{R}} \rangle \\ &\quad \times \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{\mathcal{R}} - \mathbf{p}_x) \delta(\omega - E + m - E_x), \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Si definisce la funzione spettrale $P(\mathbf{p}, E)$ come

$$P(\mathbf{p}, E) = \sum_{\mathcal{R}} |\langle 0 | R, -\mathbf{p}; N, \mathbf{p} \rangle|^2 \delta(E - m + E_0 - E_{\mathcal{R}}), \quad (4.1.13)$$

che da la probabilità di rimuovere un nucleone con impulso \mathbf{p} dal nucleo bersaglio lasciando il sistema residuo con energia di eccitazione E , in questo modo è possibile riscrivere il tensore adronico nel seguente modo

$$W_A^{\mu\nu} = \sum_x \int d^3 p_x d^3 p dE P(\mathbf{p}, E) \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sum_i \langle -\mathbf{p}, N | j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x \rangle \langle \mathbf{p}_x, x | j_i^\nu | N, -\mathbf{p} \rangle \quad (4.1.14)$$

$$\times \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p} - \mathbf{p}_x) \delta(-E + m + \omega - E_x), \quad (4.1.15)$$

con $E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$. Si può introdurre a questo punto la variabile $\tilde{\omega}$, definita come la differenza tra l'energia dello stato x e l'energia di un nucleone libero di impulso \mathbf{p}

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= E_x - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \\ &= \omega + m - E - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \\ &= \omega + E_0 - E_{\mathcal{R}} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

ed infine usando la delta di conservazione dell'impulso si arriva alla forma finale per la (4.1.4)

$$\begin{aligned} W_A^{\mu\nu} &= \sum_i \int d^3 p dE(\tilde{q}) P(\mathbf{p}, E) \delta(\tilde{\omega} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - E_x) \\ &\quad \times \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sum_x \langle -\mathbf{p}, N | j_i^\mu | x, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, x | j_i^\nu | N, -\mathbf{p} \rangle \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

che in forma compatta diviene

$$W_A^{\mu\nu} = \sum_i \int d^3p dE P(\mathbf{p}, E) \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} w_i^{\mu\nu} . \quad (4.1.18)$$

Usando la definizione del tensore relativo all'interazione col singolo nucleone libero per bersagli nucleari con $Z = A/2$ si ottiene

$$W_A^{\mu\nu} = A \int d^3p dE P(\mathbf{p}, E) \frac{m}{E_p} W_N^{\mu\nu}(\tilde{q}) \quad (4.1.19)$$

con $W_N^{\mu\nu} = (W_p^{\mu\nu} + W_n^{\mu\nu})/2$. Il tensore $W_N^{\mu\nu}$ descrive l'interazione di un neutrino e di un nucleone *libero* e l'effetto del legame nucleare è rappresentato dalla sostituzione

$$q = (\omega, \mathbf{q}) \longrightarrow \tilde{q} = (\tilde{\omega}, \mathbf{q}) , \quad (4.1.20)$$

infatti l'uso della variabile $\tilde{\omega}$ permette di tener conto del fatto che una parte dell'energia trasferita nel processo di diffusione diviene energia di eccitazione del sistema spettatore, il processo elementare di scattering su singolo nucleone può essere descritto come se avvenisse nello spazio libero invece che all'interno del bersaglio nucleare. Nello schema sviluppato è stato possibile quindi ricondurre il tensore nucleare a quello che compare nell'interazione di singolo nucleone a patto di effettuare un'integrazione su impulso ed energia con peso dato dalla funzione spettrale dello specifico nucleo in esame.

Mettendo insieme i risultati finora ottenuti è finalmente possibile scrivere la sezione d'urto relativa al processo (4.1.1) in approssimazione impulsiva

$$\frac{d^2\sigma_{IA}}{d\Omega dE_{k'}} = A \int d^3p dE P(\mathbf{p}, E) \frac{d^2\sigma_{elem}}{d\Omega dE_{k'}} \quad (4.1.21)$$

con

$$\frac{d^2\sigma_{elem}}{d\Omega dE_{k'}} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 |\mathbf{k}'|}{16\pi^2 |\mathbf{k}|} \frac{1}{4E_{|\mathbf{p}|} E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}} L_{\mu\nu} W_N^{\mu\nu} , \quad (4.1.22)$$

sezione d'urto del processo elementare.

4.1.1 CCQE

Si vuole specializzare quanto detto finora al caso dello scattering quasi-elastico, dove la sezione d'urto differenziale elementare è quella ricavata nel precedente capitolo

(3.2.32), ma volendo riscrivere il tensore adronico in termini delle funzioni di struttura occorre considerare gli impulsi riscaldati

$$\tilde{q} = (\tilde{\omega}, \mathbf{q}) \quad (4.1.23a)$$

$$\tilde{p} = (\tilde{E}_p, \mathbf{p}) \quad (4.1.23b)$$

ottenendo il seguente risultato

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} = & -g^{\mu\nu}W_1 + \tilde{p}^\mu\tilde{p}^\nu\frac{W_2}{M_n^2} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{p}_\rho\tilde{q}_\sigma\frac{W_3}{2M_n^2} \\ & + \tilde{q}^\mu\tilde{q}^\nu\frac{W_4}{M_n^2} + \frac{\tilde{p}^\mu\tilde{q}^\nu + \tilde{q}^\mu\tilde{p}^\nu}{2M_n^2}W_5, \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

La contrazione con il tensore leptónico (3.2.4) può essere scritta in forma compatta come

$$L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} = 16 \sum_i W_i \left(\frac{A_i}{M_n^2} \right) \quad (4.1.25)$$

dove le funzioni di struttura W_i sono quelle ricavate precedentemente (3.2.26) mentre i fattori cinematici A_i sono dati dalle seguenti espressioni:

$$A_1 = M_n^2(k \cdot k'), \quad (4.1.26a)$$

$$A_2 = (\tilde{p} \cdot k)(\tilde{p} \cdot k') - \frac{A_1}{2}, \quad (4.1.26b)$$

$$A_3 = (k \cdot \tilde{q})(k \cdot \tilde{p}) - (k' \cdot \tilde{p})(k \cdot \tilde{q}), \quad (4.1.26c)$$

$$A_4 = (k' \cdot \tilde{p})(k \cdot \tilde{p}) - \tilde{q}^2 \frac{A_1}{M_n^2}, \quad (4.1.26d)$$

$$A_5 = (k \cdot \tilde{p})(k' \cdot \tilde{q}) + (k' \cdot \tilde{p})(k \cdot \tilde{q}) - (\tilde{q} \cdot \tilde{p}) \frac{A_1}{M_n^2}, \quad (4.1.26e)$$

Per ragioni di simmetria molti dei prodotti scalari che compaiono nelle (4.1.26) risultano notevolmente semplificati; usando un sistema di riferimento in cui il vettore associato al quadrimpulso trasferito \mathbf{q} sia lungo l'asse z ed in cui il processo di scattering avvenga nel piano xz è possibile esprimere i prodotti in termini delle componenti del quadrimpulso nel piano e trascurare i termini lineari in p_x grazie alle simmetrie del problema.

Trascurando la massa del neutrino incidente si ottiene per le (4.1.26):

$$A_1 = M_n^2 E_k E_{k'} \left(1 - \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right), \quad (4.1.27a)$$

$$A_2 = E_k E_{k'} \left[E_p^2 - E_p p_z \left(\frac{k_z}{E_k} + \frac{k'_z}{E_{k'}} \right) + p_x^2 \frac{k_x^2}{E_k E_{k'}} + p_z^2 \frac{k_z}{E_k} \frac{k_z}{E_k} - M_n^2 E_k E_{k'} \left(1 - \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) \right], \quad (4.1.27b)$$

$$A_3 = E_k E_{k'} (E_p p'_z - E_{p'} p_z) \left(\frac{k_z}{E_k} - \frac{k'_z}{E_{k'}} \right), \quad (4.1.27c)$$

$$A_4 = E_k E_{k'} \left[\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega} |\mathbf{q}| \left(\frac{k_z}{E_k} + \frac{k'_z}{E_{k'}} \right) + |\mathbf{q}|^2 \frac{k_z}{E_k} \frac{k_z}{E_k} - \tilde{q}^2 \left(1 - \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) \right], \quad (4.1.27d)$$

$$A_5 = E_k E_{k'} \left[2E_p \tilde{\omega} + 2p_z |\mathbf{q}| \frac{k_z}{E_k} \frac{k_z}{E_k} - (E_p |\mathbf{q}| + \tilde{\omega} p_z) \left(\frac{k_z}{E_k} + \frac{k'_z}{E_{k'}} \right) - E_p \tilde{\omega} - |\mathbf{q}| p_z \left(1 - \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) \right], \quad (4.1.27e)$$

dove

$$\frac{k_z}{E_k} + \frac{k'_z}{E_{k'}} = \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \left(1 + \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{k'}} \cos \theta + \frac{m_\ell^2}{\omega E_{k'}} \right), \quad (4.1.28a)$$

$$\frac{k_z}{E_k} - \frac{k'_z}{E_{k'}} = \frac{E_k + E_{k'}}{|\mathbf{q}|} \left(1 + \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) - \frac{m_\ell^2}{|\mathbf{q}| E_{k'}}, \quad (4.1.28b)$$

$$\frac{k_z}{E_k} \frac{k_z}{E_k} = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \left[\omega^2 \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{k'}} \cos \theta - E_k E_{k'} \left(1 - \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) + m_\ell^2 \left(\frac{\omega}{E_{k'}} + 1 - \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{k'}} \cos \theta \right) \right]. \quad (4.1.28c)$$

Nel limite in cui $\tilde{q} \rightarrow q$ e $\tilde{p} \rightarrow p$ i fattori cinematici si riducono a quelli calcolati nel caso di diffusione su nucleoni liberi; come evidente dalle (4.1.28) i fattori A_{4-5} dipendono quadraticamente da m_ℓ , nel limite in cui venga trascurata anche la massa dei leptoni carichi i termini proporzionale a W_4 e W_5 , che davano contributo nullo in caso di nucleoni isolati, ora danno contributo piccolo ma comunque diverso da zero.

4.2 La funzione spettrale

Per quanto concerne il calcolo della funzione spettrale, relativa allo specifico bersaglio nucleare, è necessario adottare un modello per la descrizione della dinamica nucleare. La descrizione di $P(E, \mathbf{p})$ all'interno del formalismo della NMBT prevede un grado di complessità che aumenta rapidamente con A , ciò rende possibile un calcolo accurato solamente nel caso di nuclei leggeri, in cui si abbia $A \leq 4$, o nel limite materia nucleare uniforme ($A \rightarrow \infty$). Nella maggior parte delle simulazioni impiegate per l'analisi degli esperimenti sui neutrini la funzione spettrale viene parametrizzata all'interno del *relativistic Fermi Gas model* (RFGM) [19], secondo cui il nucleo è descritto come un gas degenere di protoni e neutroni non interagenti; i nucleoni che occupano gli stati con momento minore del momento di Fermi p_F risultano legati con energia costante E_B ¹ il cui valore numerico, insieme a quello di p_F , è ricavato tramite fit dalle misure relative alla sezione d'urto quasi-elastica elettrone-nucleo. In questo schema la funzione spettrale assume la forma seguente

$$P_{RFGM}(E, \mathbf{p}) = \frac{6\pi^2 A}{p_F^3} \Theta(p_F - |\mathbf{p}|) \delta(E_{\mathbf{p}} - E_B + E), \quad (4.2.1)$$

dove la Θ di Heaviside assicura che la funzione si non nulla solamente per valori dell'impulso tali che $|\mathbf{p}| < p_F$. I dati relativi allo scattering di elettroni hanno fornito prove convincenti che la distribuzione dell'energia e della quantità di moto dei nucleoni sia in realtà molto diversa da quella prevista dal RFGM. La discrepanza più evidente emersa, come accennato nel capitolo 2, riguarda la presenza di forti correlazioni nucleone-nucleone; queste danno luogo a processi di scattering virtuali che portano alla eccitazione dei nucleoni a stati di energia superiore all'energia di Fermi. Di conseguenza, la funzione spettrale estende il suo dominio alla regione $|\mathbf{p}| > p_F$ e $E > E_B$.

Per descrivere i nuclei mediamente pesanti ($12 < A < 197$) in modo da tener conto delle correlazioni NN si usa la *Local density approximaton* (LDA), approccio in cui vengono combinate sia le informazioni teoriche relative alla funzione spettrale per la materia a diverse densità, sia le informazioni sperimentali relative agli esperimenti di scattering con espulsione del nucleone dal nucleo. L'assunzione iniziale di questa approssimazione prevede di poter asserire che le forze a corto raggio tra i nucleoni

¹Nelle versioni più *raffinate* del modello l'energia di legame dei nucleoni non è una costante bensì una funzione dell'impulso, $V(|\mathbf{p}|)$.

non risentano di effetti superficiali o dovuti alla struttura a shell del nucleo. Con questo approccio $P(E, \mathbf{p})$ risulta scritta come somma di due contributi, associati rispettivamente al campo medio e agli effetti delle correlazioni:

$$P_{LDA}(E, \mathbf{p}) = P_{MF}(E, \mathbf{p}) + P_{corr}(E, \mathbf{p}) . \quad (4.2.2)$$

Il primo termine viene parametrizzato come segue

$$P_{MF}(E, \mathbf{p}) = \sum_n Z_n |\phi_n(\mathbf{p})|^2 F_n(E - E_n) , \quad (4.2.3)$$

dove la somma è estesa a tutti gli stati appartenenti al mare di fermi, Z_n è una costante di normalizzazione, detta fattore spettroscopico, tale che $Z_n < 1$, $F_n(E - E_n)$ è una lorentziana che descrive l'ampiezza in energia e ϕ rappresenta la funzione d'onda nello spazio degli impulsi di un nucleone nello stato n ; in assenza di correlazioni la funzione spettrale risulta descritta dall'equazione (4.2.3) con $F_n(E - E_n) \equiv \delta(E - E_n)$ e $Z_n \equiv 1$.

Il secondo termine della (4.2.2) è dato da

$$P_{corr}(E, \mathbf{p}) = \int d^3r \rho_A(\mathbf{r}) P_{corr}^{NM}(\mathbf{p}, E; \rho = \rho_A(\mathbf{r})) , \quad (4.2.4)$$

in cui ρ_A indica la densità del nucleo in funzione della distanza radiale, mentre P_{corr}^{NM} è il termine di correlazione della funzione spettrale per la materia nucleare a densità uniforme.

Dalla funzione spettrale, opportunamente normalizzata, si può calcolare la distribuzione in impulso dei nucleoni che è definita nel seguente modo

$$n(\mathbf{p}) = \int dE P(\mathbf{p}, E) , \quad (4.2.5)$$

In figura (4.2) è mostrata la distribuzione $n(\mathbf{p})/A$ per l'ossigeno e l'oro ottenuta con l'approccio fornito dalla local density approximation, per completezza viene riportata anche la funzione di distribuzione ottenuta tramite RFGM. È evidente che per grandi impulsi ($|\mathbf{p}| \gtrsim 300$ MeV) il rapporto $n(\mathbf{p})/A$ diventa quasi indipendente da A , questo suggerisce che il termine della funzione spettrale che tiene conto delle correlazioni scali con il numero di massa del nucleo bersaglio in modo tale da poter utilizzare i risultati ottenuti per la materia nucleare a valori finiti di A . Inoltre emerge chiaramente come i due approcci, LDA e RFGM, diano risultati molto diversi tra loro, nello specifico con il modello a gas di Fermi la coda della distribuzione per grandi impulsi non c'è

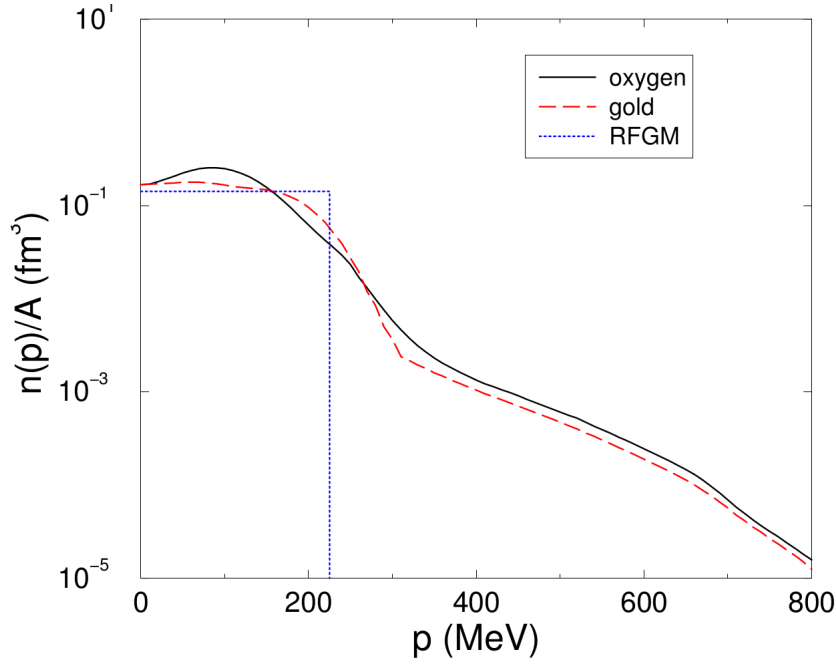


Figura 4.2: Distribuzione in impulso dei nucleoni nello stato fondamentale dell'ossigeno e dell'oro. la linea tratteggiata corrisponde alla distribuzione di Fermi con $p_F = 225$ MeV ed energia di legame $E_B = 25$ MeV.

essendo definita da una funzione gradino.

In conclusione, occorre precisare che il tensore adronico (4.1.19) è stato ricavato nel caso particolare in cui il numero di protoni e neutroni coincidano, in realtà la funzione spettrale nel caso generale risulta

$$P_N(\mathbf{p}, E) = \sum_{\mathcal{R}} |\langle 0 | R, -\mathbf{p}; N, \mathbf{p} \rangle|^2 \delta(E - m + E_0 - E_{\mathcal{R}}), \quad (4.2.6)$$

dove $N = n, p$ specifica la natura delle particelle bersaglio. In generale quindi, il tensore adronico (4.1.19) andrebbe scritto nella forma

$$W_A^{\mu\nu} = \int d^3p dE \frac{m}{E_p} [Z P_p(\mathbf{p}, E) W_p^{\mu\nu}(\tilde{q}) + (A - Z) P_n(\mathbf{p}, E) W_n^{\mu\nu}(\tilde{q})]. \quad (4.2.7)$$

L'assunzione fatta, $P_n(\mathbf{p}, E) = P_p(\mathbf{p}, E)$, rimane ampiamente giustificata nel caso di nuclei isoscalari, dove l'errore commesso risulta trascurabile.

5 Risultati numerici

Nel presente Capitolo verranno discussi in dettaglio i risultati ottenuti per la sezione d'urto quasi elastica dei processi di corrente carica neutrino-nucleo. La procedura impiegata per le simulazioni numeriche si basa sui modelli e le approssimazioni descritte nei Capitoli precedenti. I risultati dei calcoli effettuati verranno poi confrontati con i dati pubblicati dalla collaborazione MiniBooNE.

5.1 Calcolo della sezione d'urto nucleare col metodo Monte Carlo

Al fine di calcolare la sezione d'urto del processo

$$\nu_\mu + A \longrightarrow \mu^- + p + (A - 1) , \quad (5.1.1)$$

sono stati realizzati alcuni programmi in linguaggio Fortran. Come discusso nel Capitolo 4 Per energie del neutrino incidente ~ 1 GeV, la sezione d'urto CCQE può essere ottenuta in approssimazione impulsiva assumendo che lo scattering su nucleo si riduca alla somma incoerente dei processi di scattering su singolo neutrone, la cui distribuzione in impulso ed energia risulta descritta dalla funzione spettrale del nucleo. La procedura impiegata si compone di tre blocchi fondamentali: la descrizione dello stato iniziale del target, la descrizione del vertice elementare di interazione $\nu - n$, il calcolo della sezione d'urto totale $\nu - A$

La descrizione dello stato iniziale del nucleo bersaglio è affidata alla funzione spettrale $P(|\mathbf{p}|, E)$ che, come detto in precedenza, fornisce la probabilità di rimuovere dal nucleo un neutrone di momento \mathbf{p} lasciando il sistema residuo con energia di eccitazione E . L'energia E_{A-1} del sistema residuo di $(A - 1)$ nucleoni può quindi essere scritta nella seguente forma

$$E_{A-1} = \sqrt{(M_A - M + E) + |\mathbf{p}|^2} , \quad (5.1.2)$$

dove M_A e M indicano rispettivamente la massa del nucleo e del neutrone.

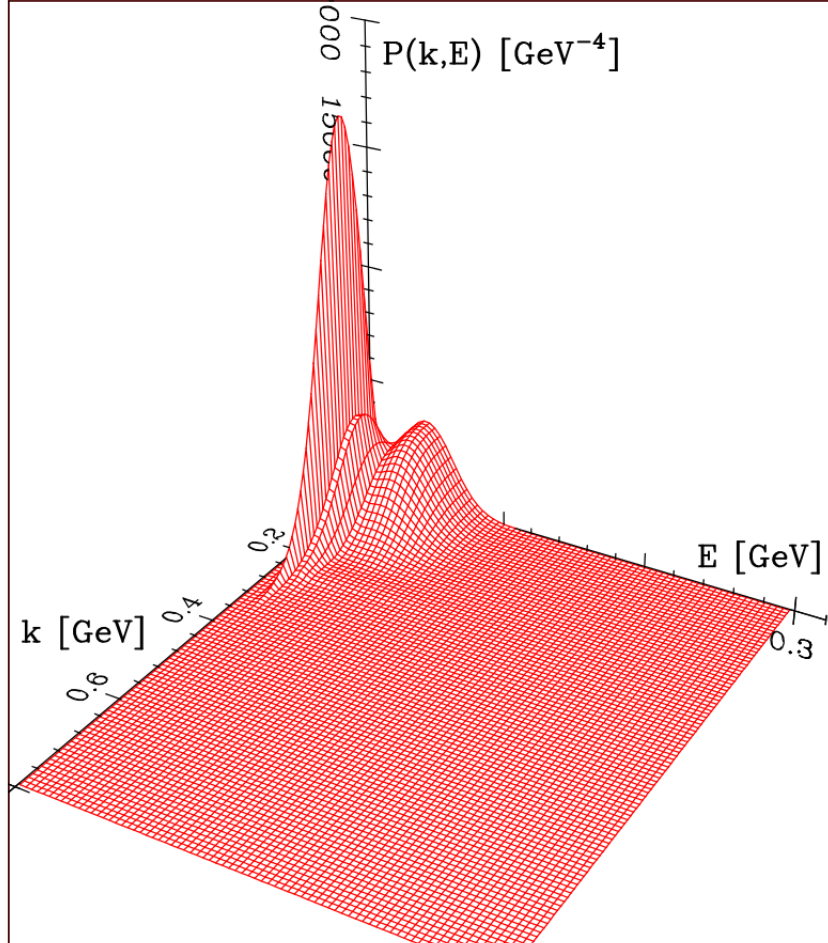
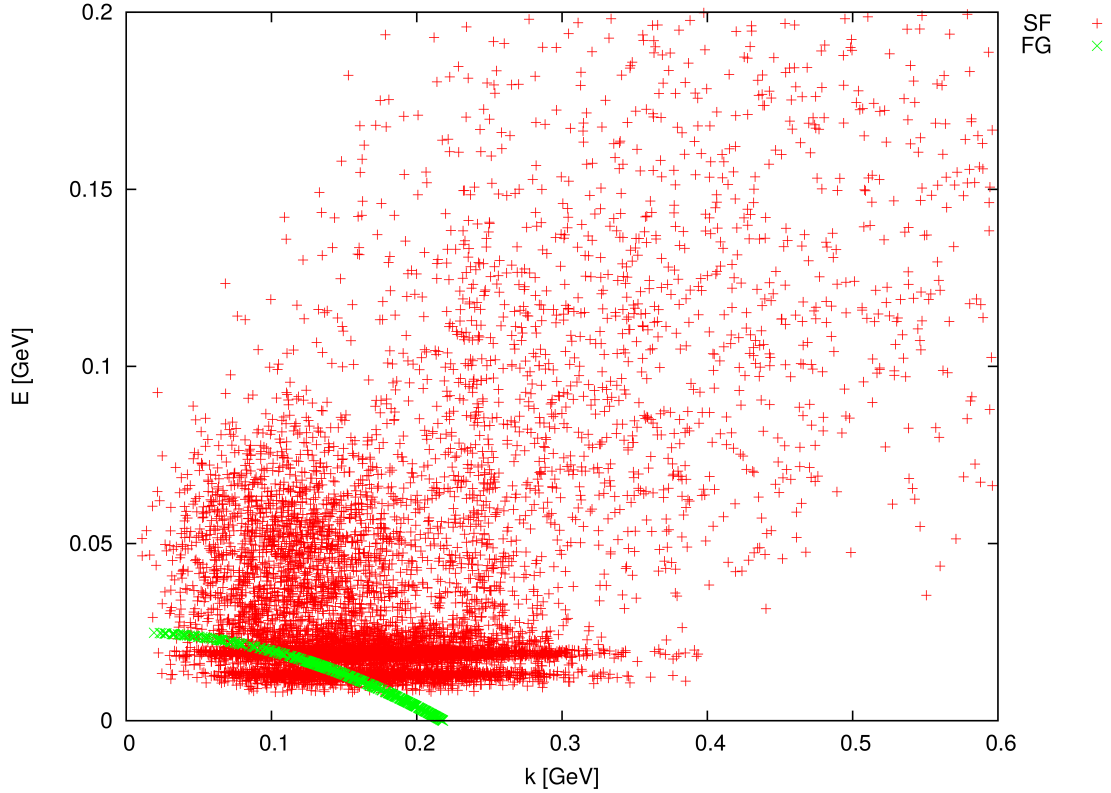


Figura 5.1: Plot tridimensionale della funzione spettrale calcolata per l'ossigeno con l'approccio LDA [20]

In figura 5.1 è mostrato il plot tridimensionale della funzione spettrale ottenuta in approssimazione LDA secondo quanto descritto in [20], in Figura 5.2 è invece visibile la distribuzione di un campione di 20000 coppie $(|\mathbf{p}|, E)$ ottenute usando la la distribuzione di probabilità

$$F(|\mathbf{p}|, E) = 4\pi|\mathbf{p}|^2 P(|\mathbf{p}|, E) . \quad (5.1.3)$$

La distribuzione in impulso del nucleone $|\mathbf{p}|^2 n(\mathbf{p})$ è ottenuta dal campione usando la


 Figura 5.2: distribuzione di $N=20000$ campioni $\{|\mathbf{p}|, E\}$

seguinte definizione

$$n(\mathbf{p}) = \int dp' dE \delta(|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|) F(|\mathbf{p}'|, E), \quad (5.1.4)$$

Per ogni valore dell'energia del neutrino entrante e del quadrimpulso del neutrone bersaglio, il vertice di interazione determina le variabili cinematiche associate alle particelle uscenti.

Il vertice è descritto dalla sezione d'urto del processo elementare di interazione col singolo neutrone che può essere scritta nel seguente modo

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} \propto L_{\mu\nu}(k, k') W^{\mu\nu}(\tilde{p}, p' = \tilde{p} + \tilde{q}), \quad (5.1.5)$$

dove la forma dei tensori $L_{\mu\nu}$ e $W^{\mu\nu}$ è quella ricavata del Capitolo 4. Il tensore leptonic dipende solamente dalle variabili cinematiche associate al neutrino entrante e al muone uscente, per quanto riguarda il tensore adronico, questo dipende oltre che dal

quadrimpulso iniziale anche dai fattori di forma vettoriali e assiale. Ricordando quando ricavato in Sezione (4.1), parte dell'energia trasferita del processo ω va in energia di eccitazione del sistema residuo, di conseguenza l'energia coinvolta nell'interazione, ovvero l'energia richiesta per un processo elastico su un neutrone libero di impulso \mathbf{p} , può essere scritta come $\tilde{\omega} = \omega - \delta\omega$. Per la conservazione dell'energia si ottiene quindi

$$\tilde{\omega} = M_A + \omega - E_{A-1} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \quad (5.1.6)$$

Come indicato sopra, il valore dell'energia trasferita al vertice dipende sia da \mathbf{p} che dall'energia di rimozione E del nucleone ha colpito, la cui distribuzione è dettata dalla funzione spettrale P . Di conseguenza, il campione $\{|\mathbf{p}|, E\}$ riguarda anche le variabili cinematiche del leptone uscente, vale a dire la sua energia e la dispersione angolare rispetto alla direzione del neutrino incidente.

Per ogni valore di E_k , \mathbf{p} ed E , la sezione d'urto elementare è funzione di due sole variabili, ω e \mathbf{p} , da cui dipende la distribuzione delle variabili cinematiche delle particelle uscenti.

La sezione d'urto nucleare doppiamente differenziale può essere scritta quindi

$$\frac{d^2\sigma_A}{d\Omega d\omega} = \int d^3p dE \frac{d^2\sigma_n}{d\Omega d\omega} P(|\mathbf{p}|, E) \delta(M_A + \omega - E_{A-1} - E_{p'}), \quad (5.1.7)$$

con $E_{p'} = \sqrt{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 + M^2}$.

L'integrazione numerica dell'equazione (5.1.7) è effettuata tramite Monte Carlo (MC) nel seguente modo [21]

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_A}{d\Omega d\omega} &= 4\pi \int dp dE d \cos \theta_p \frac{d^2\sigma_n}{d\Omega d\omega} \delta(M_A + \omega - E_{A-1} - E_{p'}) p^2 P(p, E) \\ &= \int dp dE d \cos \theta_p G(k, k'; p, E, \cos \theta_p) F(p, E) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N G(k, k'; \{p, E, \cos \theta_p\}_n), \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

dove θ_p è l'angolo che specifica la direzione del vettore \mathbf{p} . Nel caso specifico, l'espressione (5.1.8) è stata valutata tramite $n = 1, \dots, N$ con $N = 20000$ configurazioni MC $\{p, E, \cos \theta_p\}_n$, dove i valori di p ed E sono stati campionati dalla distribuzione $F(p, E)$, visibile in Figura 5.1, mentre i valori di $\cos \theta$ sono stati estratti da una distribuzione uniforme.

Le delta di conservazione dell'energia è stata approssimata tramite la sua rappresentazione gaussiana

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}, \quad (5.1.9)$$

che per piccoli ϵ fornisce un risultato indipendente dalla larghezza.

5.2 Confronto con MiniBooNE

I risultati delle simulazioni teoriche sono stati confrontati con i dati pubblicati da MiniBooNE [22] per la sezione d'urto doppiamente differenziale in energia cinetica e angolo di scattering del muone uscente relativi al processo

$$\nu_\mu + {}^{12}\text{C} \longrightarrow \mu^- + X, \quad (5.2.1)$$

Prima di passare al confronto è utile introdurre delle considerazioni generali rispetto all'analisi dati. Dalla sezione d'urto doppiamente differenziale $d^2\sigma/dT_\mu d\cos\theta_\mu$ è possibile ricavare lo spettro in energia e la distribuzione angolare del leptone carico integrando in una delle due variabili

$$\frac{d\sigma}{dT_\mu} = \int \frac{d^2\sigma}{dT_\mu d\cos\theta_\mu} d\cos\theta_\mu \frac{d\sigma}{d\cos\theta_\mu} = \frac{d^2\sigma}{dT_\mu d\cos\theta_\mu} d\cos\theta_\mu, \quad (5.2.2)$$

ed è possibile ottenere anche la distribuzione in Q^2 tramite

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \int \frac{d^2\sigma}{dT_\mu d\cos\theta_\mu} \delta(Q^2 - \bar{Q}^2) dT_\mu d\cos\theta_\mu, \quad (5.2.3)$$

dove

$$\bar{Q}^2 = 2E_\nu E_\mu \left(1 - \frac{p_\mu}{E_\mu}\right) - m_\mu^2, \quad (5.2.4)$$

con $E_{k'} = T_\mu + m_\mu$.

I processi di corrente carica quasi elastici su nucleone vengono descritti in termini di tre fattori di forma, $F_1(Q^2)$, $F_2(Q^2)$ e $F_A(Q^2)$. I fattori di forma vettoriali sono stati misurati in maniera molto precisa da esperimenti di scattering di elettroni fino a grandi valori di Q^2 , ad oggi esistono parametrizzazioni più raffinate della semplice forma dipolare introdotta nel Capitolo (4), per consistenza con l'analisi di MiniBooNE nella simulazione è stata usata la parametrizzazione [23].

Per quanto riguarda il fattore di forma assiale, la sua dipendenza dal quadrimpulso trasferito è parametrizzata in forma dipolare in termini del parametro M_A , ovvero

$$F_A(Q^2) = g_A \left(1 + \frac{Q^2}{M_A^2} \right)^{-2}, \quad (5.2.5)$$

Il valore della massa assiale usato, $M_A = 1.03$ GeV, corrisponde alla media dei valori misurati sperimentalmente utilizzando bersagli di deuterio, sebbene l'analisi di MiniBooNE restituisca un valore molto più alto, pari a $M_A = 1.35$ GeV.

È chiaro che una descrizione quantitativa completa della sezione d'urto per i processi di scattering da elettrone è un requisito necessario affinché si possa comprendere il contributo alla sezione d'urto che viene dal fattore assiale nel caso di diffusione quasi elastica da neutrino. Nello scattering da elettrone la sezione d'urto è usualmente analizzata come funzione di ω , fissando il valore dell'angolo di diffusione e dell'energia del fascio incidente. In Figura (5.3) è riportata la sezione d'urto del processo

$$e^- + {}^{12}\text{C} \longrightarrow e'^- + X, \quad (5.2.6)$$

misurata da [24] per $E_e = 730$ MeV e $\theta_e = 37^\circ$, la curva teorica è riferita al contributo quasi elastico calcolato in approssimazione impulsiva usando la funzione spettrale in [25]. Dal grafico è evidente come la posizione del picco QE e la sua larghezza risultino ben riprodotti.

Si vuole ora applicare lo stesso schema ai neutrini secondo quanto descritto in Sezione 5.1; i risultati ottenuti dalla simulazione sono mostrati in Fig.(5.4).

I dati corrispondono alla sezione d'urto CCQE misurata da MiniBooNE¹ [22], integrata sul flusso dei neutrini la cui energia media è $E_\nu = 788$ MeV, $d^2\sigma$ è mostrata in funzione dell'energia cinetica per due differenti valori dell'angolo di diffusione; la curva teorica è ottenuta usando la stessa funzione spettrale per il carbonio usata nel calcolo della sezione d'urto mostrata in Fig.(5.3)

Quello che è evidente dal grafico in Figura 5.4 è che la sezione d'urto da neutrino risulta sottostimata, e questo è vero per ogni valore dell'energia cinetica e dell'angolo di diffusione del muone.

¹La presa dati di MiniBooNE è effettuata con bin in energia cinetica T_μ di 100 MeV e di 0.1 per il $\cos \theta$.

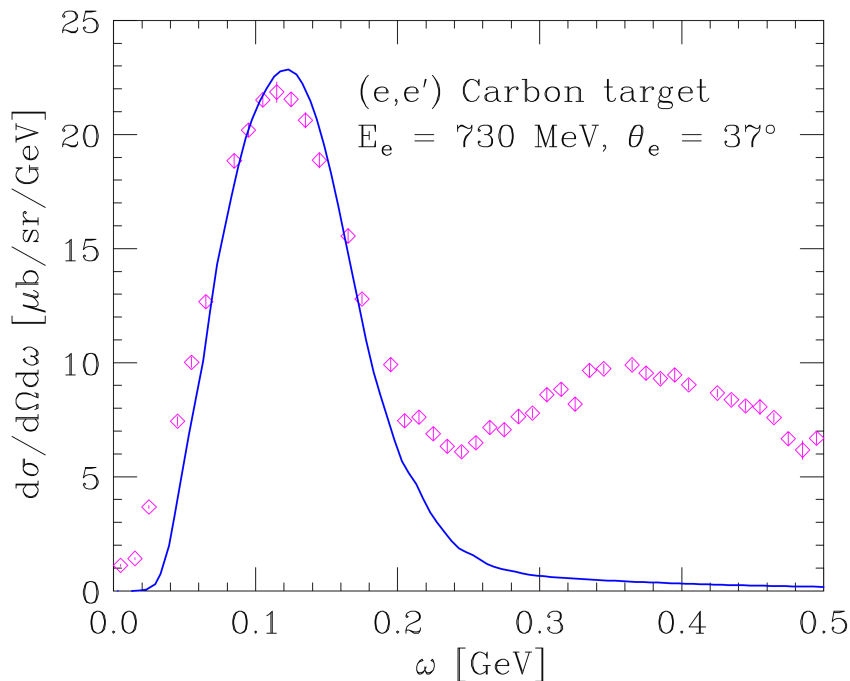


Figura 5.3: Sezione d'urto inclusiva per elettroni su carbonio in funzione dell'energia trasferita nel processo. I dati sono riferiti a [24]

L'esperimento MiniBooNE utilizza il modello a gas di Fermi per descrivere gli effetti nucleari, che come mostrato precedentemente non riesce a descrivere in maniera esaustiva la molteplicità dei processi dovuti alla dinamica delle interazioni NN. Il valore della massa assiale è ricavato tramite l'analisi della distribuzione in Q^2 , ed è significativamente maggiore di quello ottenuto dagli esperimenti su deuterio. La modifica della massa assiale non risultava comunque sufficiente a migliorare l'accordo con i dati a basso quadrimpulso trasferito, questo perché F_A è poco sensibile a modifiche per $Q^2 \sim 0$. Viene quindi introdotto un nuovo parametro, κ , in modo da avere un grado di libertà aggiuntivo a basso momento trasferito. Questo tiene conto dell'effetto del Pauli-blocking e modifica l'energia minima a disposizione nel nucleone bersaglio:

$$E' = \kappa \left(\sqrt{p_F^2 + M^2} - \omega + E_B \right) \quad (5.2.7)$$

dove E_B , p_F sono rispettivamente l'energia di legame del nucleone e il momento di Fermi, il loro valore numerico per il carbonio è $E_B = 34 \pm 9$ MeV, $p_F = 220 \pm 30$

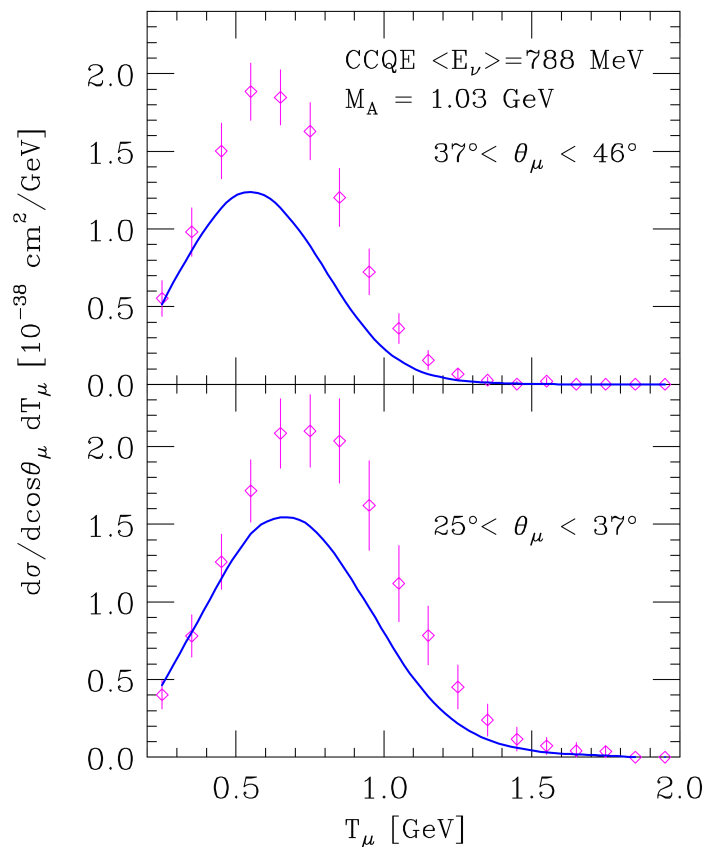


Figura 5.4: Sezione d'urto doppiamente differenziale in energia cinetica e angolo di scattering del muone uscente, calcolata per due diversi valori di θ_μ

MeV.

Per un confronto ulteriore in Fig. (5.5) é mostrata la sezione d'urto integrata sulle variabili cinematiche, rispettivamente sull'energia cinetica e sull'angolo di diffusione del muone, i dati di [22] vengono confrontati con le curve teoriche per due differenti valori della massa assiale, $M_A = 1.03, 1.35$ GeV. É chiaramente visibile che l'incremento di M_A porti ad un migliore accordo tra il calcolo e i dati, sia per lo spettro in energia sia per la distribuzione angolare. Si potrebbe pensare di interpretare il valore di M_A riportato da [22] come una massa assiale *effettiva*, modificata da effetti nucleari non inclusi nel RFGM; in questo modo viene introdotta la possibilità che la massa assiale misurata tramite scattering sui nucleoni legati nel carbonio possa essere differente da quella compare per i nucleoni liberi. Se questo fosse corretto bisogne-

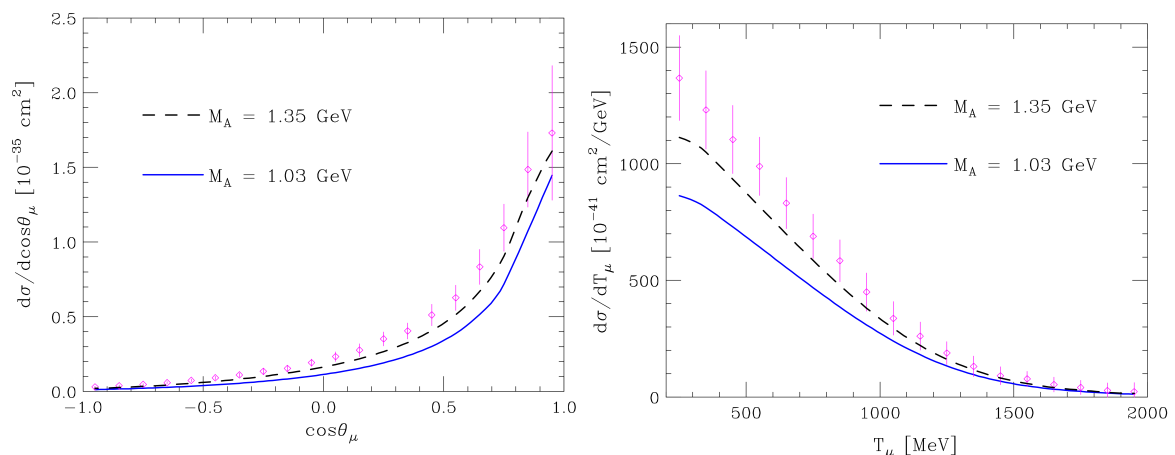


Figura 5.5: Sezione d'urto integrata sulle variabili cinematiche, rispettivamente sull'energia cinetica e sull'angolo di diffusione del muone uscente, calcolate per diversi valori della massa assiale $M_A = 1.03, 1.35 \text{ GeV}$. I dati con cui sono confrontati sono quelli di [22])

rebbe capire per quale motivo i fattori di forma vettoriali non vengono modificati dal mezzo, come mostrato chiaramente dagli esperimenti con leptoni carichi, mentre il fattore di forma assiale sarebbe soggetto a un incremento così brusco; in Fig.(5.6) è riportato per completezza il calcolo teorico per due differenti parametrizzazioni dei fattori vettoriali, la linea continua è ottenuta con la forma dipolare mentre la linea tratteggiata è ottenuta implementando il calcolo con la parametrizzazione ([23]); è evidente che la differenza non è apprezzabile.

Tuttavia è chiaro che i risultati ottenuti indicano che l'approccio IA, con una funzione spettrale realistica del carbonio, falliscono nel riprodurre la sezione d'urto quasi elastica neutrino-nucleo, a meno di non incrementare il valore di M_A in maniera significativa, assumendo un valore che non sembra essere compatibile con quello risultante dalle misure su deuterio; va inoltre ricordato che lo stesso approccio ha invece dimostrato di essere in grado di riprodurre i dati per lo scattering da elettroni molto bene.

Osservando la Fig.(5.7) dove viene riprodotto lo spettro per differenti valori di θ_μ , si nota in maniera abbastanza evidente come la discrepanza cresca all'aumentare dell'angolo di diffusione.

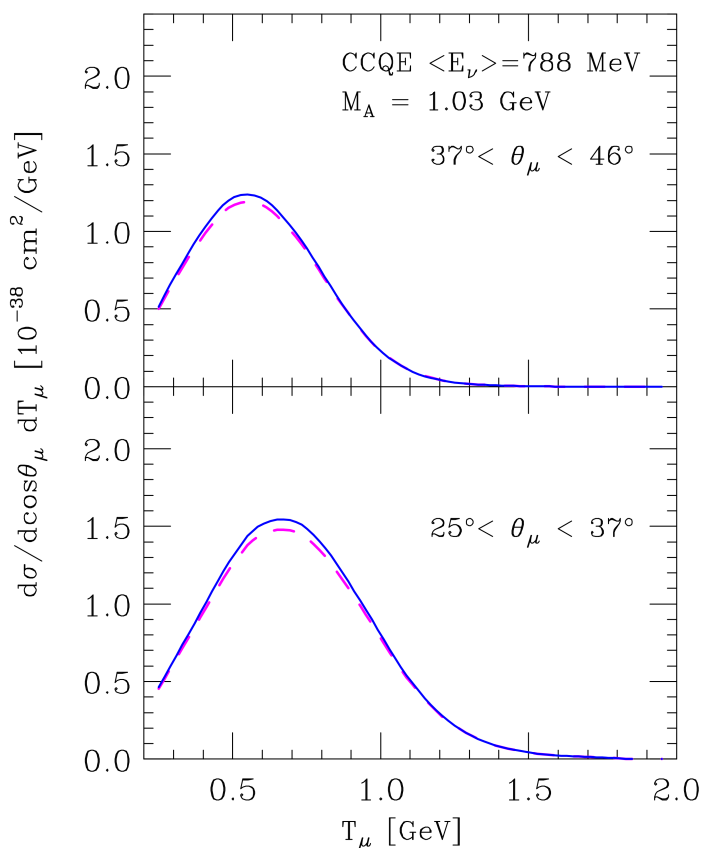


Figura 5.6: Sezione d'urto doppiamente differenziale in funzione dell'energia cinetica calcolata per due differenti parametrizzazioni dei fattori di forma vettoriali, la linea continua indica il calcolo effettuato con i fattori dipolari, la linea tratteggiata con i fattori di forma in ([23]).

Diversi autori [26, 27] hanno suggerito che l'eccesso di sezione d'urto osservato possa essere dovuto a processi nei quali vengono eccitati stati finali con due particelle e due lacune, $2p - 2h$. Questi processi, essendo di natura trasversa, danno un contributo maggiore alla sezione d'urto a grandi angoli, la spiegazione supposta sembra essere avvalorata dai risultati della Figura 5.8. La dominanza di meccanismi di reazione differenti a diversi angoli di scattering è presumibilmente la causa della discrepanza tra le sezioni d'urto totali

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\cos\theta_\mu} T_\mu d\cos\theta_\mu, \quad (5.2.8)$$

misurate da gli esperimenti MiniBooNE [22] e NOMAD [28] con energie medie dei neutrini $\langle E_\nu \rangle \approx 800$ MeV e $\langle E_\nu \rangle \approx 26$ GeV, rispettivamente. I dati riportati nella

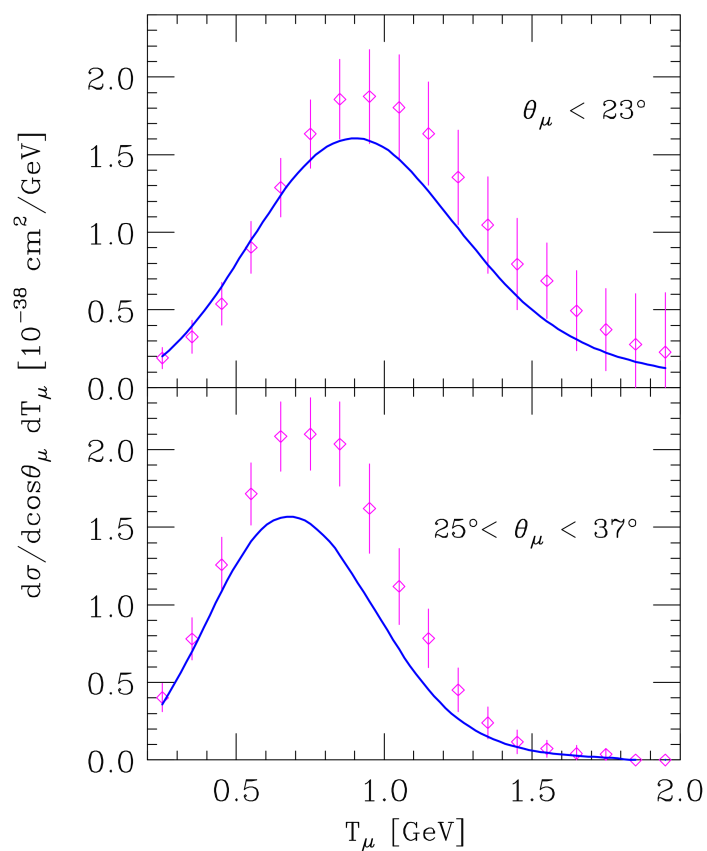


Figura 5.7: Sezione d'urto doppiamente differenziale in energia cinetica e angolo di scattering del muone uscente, calcolata per due diversi valori di θ_μ

Figura 5.8 mostrano come il disaccordo tra teoria ed esperimento sia molto minore nella regione di alta energia, nella quale la diffusione avviene prevalentemente a piccoli angoli [29].

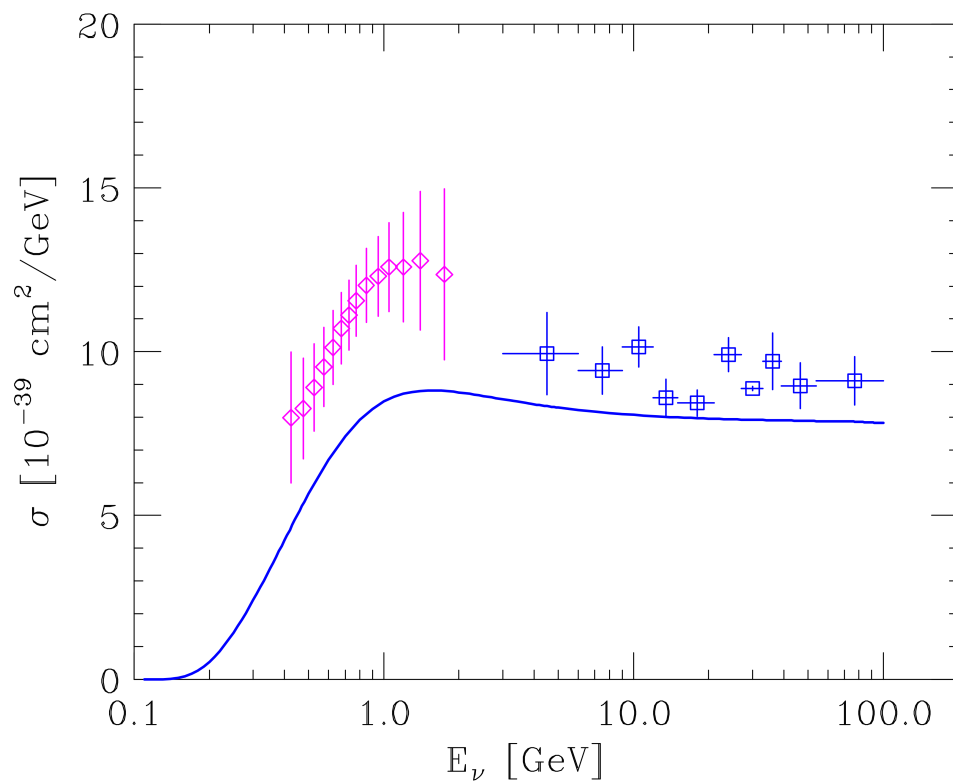


Figura 5.8: Sezione d'urto totale per CCQE di ν_μ su carbonio in funzione dell'energia dei neutrini. I dati in magenta e in blu rappresentano rispettivamente le misure di MiniBooNE e NOMAD. La curva teorica mostrata indica le simulazioni effettuate con la funzione spettrale con $M_A = 1.03$ in input.

Conclusioni

In questo lavoro di Tesi è stata affrontata la descrizione degli effetti nucleari sulla sezione d'urto dei processi di corrente carica neutrino-nucleo nella regione cinematica corrispondente ad energie dei neutrini ~ 1 GeV. Questa è la regione rilevante per l'osservazione delle oscillazioni dei neutrini atmosferici o prodotti con acceleratori.

Nel regime considerato, il contributo dominante viene dai processi quasi elastici, anche se la produzione di risonanze e la diffusione profondamente inelastica danno contributi non trascurabili alla sezione d'urto totale. L'approccio usato è basato sull'approssimazione impulsiva che permette di ricavare la sezione d'urto nucleare in termini della sezione d'urto relativa al processo elementare di diffusione su singolo nucleone, la cui distribuzione in impulso ed energia all'interno del nucleo è fornita dalla funzione spettrale.

In questo schema, tramite l'uso di una funzione spettrale realistica, è stata calcolata col metodo Monte Carlo la sezione d'urto di diffusione quasi elastica di neutrini muonici su carbonio, poiché in questo canale si concentra la maggior parte dei segnali rivelati in molti esperimenti. I risultati ottenuti sono stati confrontati con le misure effettuate dall'esperimento MiniBooNE, poiché unico a rendere disponibili i dati della sezione d'urto differenziale in funzione delle variabili cinematiche misurate. Dal confronto emerge chiaramente come la sezione d'urto predetta dalle simulazioni teoriche, effettuate utilizzando modelli la cui validità è stata dimostrata dalle applicazioni alla diffusione di leptoni carichi, sia molto minore di quella misurata sperimentalmente. Questo risulta vero per ogni valore dell'energia cinetica e dell'angolo di diffusione del muone uscente e sembra essere indipendente dal modello utilizzato, in quanto risultati analoghi si ottengono all'interno di diverse descrizioni della dinamica nucleare.

Per riconciliare teoria e dati sembra necessario prendere in considerazione diversi meccanismi di reazione che, a causa della media sulle diverse energie del neutrino, contribuiscono ai segnali rivelati. In questo senso, nell'ultimo decennio sono stati compiuti progressi significativi dal punto di vista teorico mentre, per quanto riguarda

i generatori di eventi utilizzati per l'analisi dei dati, questi risultano ancora in larga parte basati sul RFGM, di cui sono stati evidenziati i grandi limiti. Il primo passo verso l'implementazione di una descrizione più accurata della dinamica nucleare consiste quindi nel migliorare il trattamento dello stato iniziale, sostituendo al RFGM una descrizione basata su una funzione spettrale realistica.

Il formalismo basato sulla funzione spettrale, oltre a tener conto delle forti correlazioni tra nucleoni non contemplate dal RFGM, si presta bene ad essere utilizzato per descrivere tutti i canali di reazione in cui il vertice coinvolga un solo nucleone. L'estensione del nostro lavoro al caso delle risonanze barioniche non presenta alcun problema di natura concettuale, mentre nel caso della diffusione profondamente inelastica le ipotesi alla base dell'approssimazione impulsiva non sono più applicabili nella regione cinematica corrispondenti a piccoli valori della variabile di scala di Bjorken x .

La possibilità di descrivere in modo consistente i diversi meccanismi di reazione che contribuiscono ai segnali osservati a partire da un modello dinamico realistico verrà considerata la caratteristica più importante dell'approccio che abbiamo utilizzato. In questo contesto, il calcolo della sezione d'urto nella regione delle risonanze è l'estensione più immediata del nostro lavoro di Tesi.

Appendice A

La struttura del tensore associato al vertice adronico ha la forma (3.3.16), di seguito sono riportate le espressioni per le funzioni V_i in termini dei fattori di forma $C_i^{V,A}$:

$$\begin{aligned}
\frac{V_1}{3} = & \frac{(C_3^V)^2}{m_N^2} \frac{2}{3MR^2} [(q \cdot p - Q^2)^2 (q \cdot p + m_N^2) + M_R^2 ((q \cdot p)^2 + Q^2 m_N^2 + Q^2 m_N M_R)] \\
& + \frac{(C_4^V)^2}{m_N^4} \frac{2}{3} (q \cdot p - Q^2)^2 (q \cdot p + m_N^2 - m_N M_R) \\
& + \frac{C_3^V C_4^V}{m_N^3} \frac{2}{3M_R} (q \cdot p - Q^2) [(q \cdot p - Q^2)(q \cdot p + m_N^2 - 2m_N M_R) + M_R^2 q \cdot p] \\
& + \frac{2}{3} \left[\left(\frac{C_4^A}{m_N^2} \right)^2 (q \cdot p - Q^2)^2 + (C_5^A)^2 + 2 \frac{C_4^A C_5^A}{m_N^2} (q \cdot p - Q^2) \right] \times \\
& \times [q \cdot p + m_N^2 + m_N M_R] ,
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{V_2}{3} = & (C_3^V)^2 \frac{2}{3M_R^2} Q^2 [q \cdot p + m_N^2 + M_R^2] + \frac{(C_4^V)^2}{m_N^2} \frac{2}{3} Q^2 [q \cdot p + m_N^2 - m_N M_R] \\
& + \frac{C_3^V C_4^V}{m_N} \frac{2}{3M_R} Q^2 [q \cdot p + (M_R - m_N)^2] + \frac{2}{3} \left[(C_5^A)^2 \frac{m_N^2}{M_R^2} + \frac{(C_4^A)^2}{m_N^2} Q^2 \right] \times \\
& \times [q \cdot p + m_N^2 + m_N M_R] ,
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{V_3}{3} = & \frac{4}{3M_R} \left[-\frac{C_3^V C_4^A}{m_N} (q \cdot p - Q^2) - C_3^V C_5^A m_N \right] [2M_R^2 + 2m_N M_R + Q^2 - q \cdot p] \\
& + \frac{4}{3} (q \cdot p - Q^2) \left[-\frac{C_4^V C_4^A}{m_N^2} (q \cdot p - Q^2) - C_4^V C_5^A \right] ,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{V_4}{3} = & \frac{2}{3M_R^2} (C_3^V)^2 [(2q \cdot p - Q^2)(q \cdot p + m_N^2) - M_R^2(m_N^2 + m_N M_R)] \\
 & + \frac{2}{3} \frac{(C_4^V)^2}{m_N^2} (2q \cdot p - Q^2) [q \cdot p + m_N^2 - m_N M_R] \\
 & + \frac{2}{3M_R} \frac{C_3^V C_4^V}{m_N} [(2q \cdot p - Q^2)(q \cdot p + m_N^2 - 2m_N M_R) + q \cdot p M_R^2] \\
 & + \frac{2}{3} \left[(C_5^A)^2 \frac{m_N^2}{M_R^2} + \frac{(C_4^A)^2}{m_N^2} (2q \cdot p - Q^2) + \frac{(C_6^A)^2}{m_N^2 M_R^2} ((Q^2 - q \cdot p)^2 + Q^2 M_R^2) \right. \\
 & \quad \left. + 2C_4^A C_5^A - 2 \frac{C_4^A C_6^A}{m_N^2} q \cdot p - 2 \frac{C_5^A C_6^A}{M_R^2} (M_R^2 + Q^2 - q \cdot p) \right] \times \\
 & \times [q \cdot p + m_N^2 + m_N M_R] ,
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{V_5}{3} = & \frac{2}{3} \frac{(C_3^V)^2}{M_R^2} q \cdot p [q \cdot p + m_N^2 + M_R^2] + \frac{2}{3} \frac{(C_4^V)^2}{m_N^2} q \cdot p [q \cdot p + m_N^2 - m_N M_R] \\
 & + \frac{2}{3M_R} \frac{C_3^V C_4^V}{m_N} q \cdot p [q \cdot p + (M_R - m_N)^2] \\
 & + \frac{2}{3} \left[\frac{(C_4^A)^2}{m_N^2} q \cdot p + (C_5^A)^2 \frac{m_N^2}{M_R^2} + C_4^A C_5^A - \frac{C_4^A C_6^A}{m_N^2} Q^2 + \frac{C_5^A C_6^A}{M_R^2} (q \cdot p - Q^2) \right] \times \\
 & \times [q \cdot p + m_N^2 + m_N M_R] ,
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$V_6 = 0 . \tag{A.6}$$

Ringraziamenti

...E QUESTO È TUTTO DA VEDERE...

Bibliografia

- [1] Q.R. Ahmad *et al.*, «Measurement of the charged current interactions produced by B-8 solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory», *Phys. Rev. Lett.* **87**, 071301 (2001).
- [2] Y. Fukuda *et al.*, «Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos», *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998).
- [3] K. Eguchi *et al.*, «First results from KamLAND: Evidence for reactor anti-neutrino disappearance», *Phys. Rev. Lett.* **90**, 021802 (2003).
- [4] K. Abe *et al.*, «Evidence of electron neutrino appearance in a muon neutrino beam», *Phys. Rev. D* **88**, 032002 (2013).
- [5] L. Fields *et al.*, «Measurement of Muon Antineutrino Quasielastic Scattering on a Hydrocarbon Target at $E_\nu \sim 3.5$ GeV», *Phys. Rev. Lett.* **111**, 022501 (2013).
- [6] G. A. Fiorentini *et al.*, «Measurement of Muon Neutrino Quasielastic Scattering on a Hydrocarbon Target at $E_\nu \sim 3.5$ GeV», *Phys. Rev. Lett.* **111**, 022502 (2013).
- [7] Y. Nakajima *et al.*, «Measurement of inclusive charged current interactions on carbon in a few-GeV neutrino beam», *Phys. Rev. D* **83**, 012005 (2011).
- [8] C. Giunti and C.W. Kim, *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics* (Oxford University Press, 2007).
- [9] S.T. Petcov, «The Nature of Massive Neutrinos», *Adv. High Energy Phys.* **2013**, 852987 (2013).
- [10] P Lipari, M. Lusignoli and F. Sartogo, «The Neutrino cross-section and upward going muons», *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4384 (1995).

-
- [11] H. Gallagher, G. Garvey and G.P. Zeller, «Neutrino-nucleus interactions», *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **61**, 355 (2011).
- [12] N. Farina, «Weak Response of Nuclear Matter», arXiv:0901.2507 .
- [13] O. Benhar, «How much nuclear physics do we need, to understand the neutrino nucleus cross section?», *Acta Phys. Polon.* **B40**, 2389 (2009).
- [14] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche and M. Lavelle, *Particles and nuclei* (Springer, 2008).
- [15] O. Benhar and D. Meloni, «Total neutrino and antineutrino nuclear cross-sections around 1-GeV», *Nucl. Phys. A* **789**, 379 (2007).
- [16] O. Lalakulich and E.A. Paschos, «Resonance production by neutrinos. I. $J = 3/2$ resonances», *Phys. Rev. D* **71**, 074003 (2005).
- [17] F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks and leptons: an introductory to modern particle physics* (John Wiley and Sons, 1984).
- [18] S.A. Kulagin and R. Petti, «Neutrino inelastic scattering off nuclei», *Phys. Rev. D* **76**, 094023 (2007).
- [19] R.A. Smith and E.J. Moniz, «Neutrino reactions on nuclear targets», *Nucl. Phys. B* **43**, 605 (1972).
- [20] O. Benhar, N. Farina, H. Nakamura, M. Sakuda and R. Seki, «Electron- and neutrino-nucleus scattering in the impulse approximation regime», *Phys. Rev. D* **72**, 053005 (2005).
- [21] C. M. Jen, A. Ankowski, O. Benhar, A.P. Furmanski, L.N. Kalousis *et al.*, «Numerical Implementation of lepton-nucleus interactions and its effect on neutrino oscillation analysis», arXiv:1402.6651 .
- [22] A.A. Aguilar-Arevalo *et al.*, «First Measurement of the Muon Neutrino Charged Current Quasielastic Double Differential Cross Section», *Phys. Rev. D* **81**, 092005 (2010).
- [23] H.S. Budd, A. Bodek and J. Arrington, «Modeling quasielastic form-factors for electron and neutrino scattering», arXiv:hep-ex/0308005 .

- [24] J.S. O'Connell, W.R. Dodge, J.W. Lightbody, X.K. Maruyama, J.O. Adler *et al.*, «Electromagnetic Excitation of the Δ Resonance in Nuclei», *Phys. Rev. C* **35**, 1063 (1987).
- [25] O. Benhar, A. Fabrocini, S. Fantoni and I. Sick, «Spectral function of finite nuclei and scattering of GeV electrons», *Nucl. Phys. A* **579**, 493 (1994).
- [26] M. Martini, M. Ericson, G. Chanfray and J. Marteau, «titolo», *Phys. Rev. C* **81**, 045502 (2010).
- [27] J. Nieves, I.R. Simo and M.J. Vicente Vacas, «titolo2», *Phys. Lett. B* **707**, 72 (2012).
- [28] V. Lyubushkin *et al.*, «A study of quasi-elastic muon neutrino and antineutrino scattering in the NOMAD experiment», *Eur. Phys. J. C* **63**, 355 (2009).
- [29] O. Benhar, «Confronting electron and neutrino-nucleus interactions: can the axial mass anomaly be resolved?», *Int. J. Mod. Phys. E* **23**, 1430005 (2014).