



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Interazioni dei neutrini con la materia delle stelle di neutroni

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Candidato

Margherita De Marzio
Matricola 1218089

Relatore

Prof. Omar Benhar Noccioli

Anno Accademico 2012-2013

Tesi non ancora discussa

Interazioni dei neutrini con la materia delle stelle di neutroni

Tesi di Laurea Magistrale. Sapienza – Università di Roma

© 2012 Margherita De Marzio. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L^AT_EX e la classe Sapthesis.

Email dell'autore: margherita.demarzio@gmail.com

Ringraziamenti

Ho completato questo lavoro di tesi grazie all'aiuto di molte persone, a partire dal Prof. Omar Benhar. Grazie alla sua immensa e non dovuta disponibilità, alle sue spiegazioni e alla sua pazienza di fronte ai miei numerosi dubbi sono riuscita lentamente a comprendere ed apprezzare l'affascinante problema fisico che dovevo studiare e a svilupparlo nei suoi vari aspetti.

Ringrazio anche i miei genitori, sicuramente i miei primi fans.

Non posso, infine, non ringraziare Enrico, per farmi sentire fortunata ad aver condiviso questi sei anni, nei momenti alti ma soprattutto in quelli bassi, con una persona speciale ed unica come lui.

Indice

Introduzione	1
1 Stelle di neutroni: evoluzione e struttura	5
1.1 Struttura delle stelle di neutroni	7
1.1.1 Crosta esterna	7
1.1.2 Crosta interna	8
1.1.3 Core esterno	9
1.1.4 Core interno	11
1.2 L'equazione di stato della materia stellare	12
2 Modelli teorici della materia nucleare	13
2.1 Fenomenologia dei nuclei atomici	13
2.2 Hamiltoniana nucleare	16
2.3 Teoria a molti corpi non relativistica	19
2.3.1 Teoria della base correlata	20
2.3.2 Formalismo dell'espansione in clusters	21
2.3.3 Il potenziale effettivo	22
2.3.4 Calcolo della massa effettiva	22
2.4 Le teorie di campo relativistiche	26
2.4.1 Il modello σ - ω - ρ	26
2.4.2 Spettro di energia e massa effettiva	32
3 Produzione e interazioni dei neutrini nelle stelle di neutroni	37
3.1 La produzione di neutrini nel core	37
3.2 I neutrini e l'evoluzione termica	39
3.3 Interazioni di corrente neutra	40
3.4 Limite non relativistico	52
3.4.1 Sezione d'urto	54
3.5 Sezione d'urto relativistica	55
4 Risultati	57
4.1 Composizione e proprietà della materia β -stabile	57
4.2 Sezione d'urto	61
Conclusioni	71
A Funzioni di risposta	73

Bibliografia

75

Introduzione

La descrizione delle interazioni dei neutrini con i nuclei e, più in generale, con la materia nucleare, è un elemento fondamentale per lo studio di una varietà di problemi fisici. In questa tesi considereremo neutrini di energia $\lesssim 10$ MeV, le cui interazioni con la materia stellare determinano l'evoluzione delle supernovæ e il processo di raffreddamento delle stelle di neutroni [1, 2].

L'esistenza e l'evoluzione di una stella, che ha origine a partire da addensamenti di gas e polveri interstellari, è costituita da un succedersi di varie fasi di equilibrio dinamico, raggiunte consecutivamente in seguito a rapidi collassi gravitazionali. La composizione, la durata e la realizzazione di ognuno di questi stadi dipende fortemente dalle proprietà della singola stella e, in particolare, dalla sua massa.

Dopo aver attraversato le fasi di Sequenza Principale e di gigante rossa, infatti, le stelle possono proseguire la loro evoluzione diventando delle nane bianche, delle stelle di neutroni o dei buchi neri a seconda dei relativi valori di massa iniziale. In particolare, gli oggetti stellari con masse $M > 4M_{\odot}$, dove M_{\odot} è la massa solare, terminano il loro processo evolutivo nello stadio finale di stella di neutroni, diventando un nucleo compatto composto sostanzialmente di neutroni ed espellendo l'involuppo esterno attraverso violente onde d'urto che portano all'esplosione di una supernova [3]. Una volta formato, il core interno della stella di neutroni, in cui è anche presente una piccola frazione di protoni ed elettroni oltre alla maggioranza di neutroni, è sede di numerose reazioni tra le particelle del mezzo di cui è formato. I processi di decadimento β e di cattura elettronica fanno parte di queste interazioni e hanno grande rilevanza per il destino della stella. Esse, infatti, rappresentano i principali meccanismi attraverso i quali vengono prodotti i neutrini all'interno della stella. La funzione svolta dai neutrini nell'evoluzione stellare si può comprendere considerando le interazioni di questi leptoni con la materia circostante.

Nella fase immediatamente successiva all'esplosione di una supernova i neutrini sono intrappolati all'interno della stella, e giocano un ruolo importante trasferendo calore dal *core* alla regione esterna, più fredda. Trascorso un tempo dell'ordine di ~ 50 sec, il cammino libero medio dei neutrini diviene maggiore del raggio della stella, facendo sì che essi si diffondano all'esterno attraverso processi di assorbimento e scattering multipli. Interagendo debolmente col mezzo, il flusso di neutrini uscente sottrae energia termica dalla stella in maniera molto efficiente e ne provoca un progressivo raffreddamento, il cui tempo caratteristico dipende in modo critico dall'equazione di stato della materia stellare, cioè dalla relazione tra la sua temperatura, energia e pressione totale [4].

Il *rate* di produzione dei neutrini e il loro cammino libero medio, quindi, forniscono delle informazioni essenziali per le simulazioni numeriche dell'evoluzione delle

supernovæ e del meccanismo di raffreddamento delle stelle di neutroni. L'incertezza associata ai modelli teorici usati per descrivere queste grandezze è considerata una delle maggiori fonti di errore sistematico [5]. La propagazione dei neutrini nel mezzo di cui è costituito il core, infatti, è fortemente dipendente dalle sue stesse proprietà. Di conseguenza, a seconda degli approcci usati per rappresentare questa densa materia di neutroni e protoni, la materia nucleare, si ottengono differenti predizioni quantitative sulle sezioni d'urto dei processi di interazione attraverso cui i neutrini vengono generati e fuggono dalla stella.

Il problema principale che si deve affrontare è la determinazione dell'equazione di stato della materia in condizioni di equilibrio, tenendo conto delle interazioni forti tra i nucleoni. Il ruolo fondamentale di queste interazioni è emerso chiaramente dallo studio delle configurazioni di equilibrio delle stelle di neutroni effettuato ad Tolman, Oppenheimer e Volkof già nel 1939 [6]. I risultati di questa analisi hanno dimostrato che, se si ignora la dinamica nucleare e si descrive la materia di neutroni come un gas di Fermi degenere, la massa massima di una stella stabile è $\sim 0.8 M_{\odot}$, valore molto inferiore alle masse delle stelle di neutroni osservate, tipicamente $\sim 1.4 M_{\odot}$.

Benchè la teoria fondamentale delle interazioni forti, la cromodinamica quantistica (Quantum Chromo-Dynamics, o QCD), sia nota, la sua complessità e la natura non perturbativa la rendono inutilizzabile alle scale di distanze tipiche delle situazioni astrofisiche d'interesse. Ne segue che una descrizione realistica delle forze agenti tra i nucleoni nelle stelle di neutroni non può essere basata sui gradi di libertà elementari della QCD, quark e gluoni, ma deve essere realizzata in termini di gradi di libertà adronici, barioni e mesoni, all'interno di teorie effettive dell'interazione [7, 8]. A questo si aggiungono le approssimazioni necessarie nello studio di un sistema quantistico a molti corpi, dal momento che il numero di neutroni all'interno di una stella è dell'ordine 10^{57} .

La ricerca di una teoria completa che possa tener conto di tutte le caratteristiche e degli effetti della materia stellare ad alte densità è un problema che rimane aperto ancora oggi. I modelli teorici della materia nucleare che sono stati sviluppati nel corso degli anni, il cui punto di partenza sono le informazioni empiriche e i dati sperimentali a disposizione, possono essere suddivise in due principali categorie: le teorie non relativistiche a molti corpi e i modelli relativistici che utilizzano il formalismo della teoria quantistica dei campi. Il primo approccio è fortemente vincolato dalla sistematica dei nuclei atomici e dalla fenomenologia del sistema di due nucleoni, ma è intrinsecamente limitato a valori di densità per i quali l'approssimazione non relativistica è applicabile [9, 10]. L'approccio relativistico è, per costruzione, immune da questi problemi, ma si basa su una descrizione semplificata della dinamica e sull'uso dell'approssimazione di campo medio, certamente valida solo nel limite di densità infinita [11].

Per il nostro lavoro abbiamo considerato sia un modello non relativistico, il cui elemento essenziale è un'interazione effettiva derivata da una Hamiltoniana fenomenologica realistica utilizzando il formalismo delle funzioni di base correlate, sia un modello relativistico in cui le interazioni vengono descritte in termini di scambio di un bosone scalare-isoscalare, uno vettoriale-isoscalare e uno vettoriale-isovettoriale. Le sezioni d'urto di diffusione di neutrini ottenute in queste due descrizioni della materia sono state analizzate e confrontate. In entrambi i casi, l'effetto delle interazioni sulla propagazione dei neutrini nel mezzo nucleare è stato

schematizzato introducendo una *massa effettiva* dei nucleoni.

La tesi è strutturata come segue.

Nel Capitolo 1 vengono passate brevemente in rassegna la struttura e l'evoluzione delle stelle di neutroni e si introduce la nozione di equazione di stato della materia stellare.

La prima parte del Capitolo 2 è dedicata all'analisi delle caratteristiche principali dell'interazione tra i nucleoni, a partire da quelle deducibili dalle proprietà osservate dei nuclei. Nella seconda parte vengono discussi in dettaglio i modelli teorici utilizzati per ottenere l'equazione di stato.

Nel Capitolo 3 vengono ricavate le espressioni delle sezioni d'urto di diffusione di neutrini non degeneri con i costituenti della materia stellare, cioè elettroni, protoni e neutroni la cui abbondanza, a densità barionica fissata, è determinata dalle condizioni di equilibrio debole e neutralità elettrica. Le sezioni d'urto sono state ottenute in forma differenziale, sia effettuando il calcolo esattamente che in approssimazione non relativistica per i nucleoni.

I risultati dei calcoli, che includono anche la composizione della materia ed i valori delle masse effettive, sono presentati e discussi nel Capitolo 4.

A meno di esplicita menzione contraria, nella Tesi abbiamo utilizzato un sistema di unità di misura in cui $\hbar = h/2\pi = c = 1$, dove h è la costante di Planck e c è la velocità della luce.

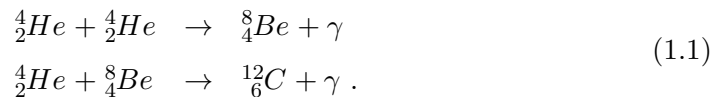
Capitolo 1

Stelle di neutroni: evoluzione e struttura

L'esistenza delle stelle di neutroni, predetta teoricamente da Landau già nel 1932, fu verificata sperimentalmente solo nel 1968, quando misure sperimentalmente rilevarono accidentalmente la presenza di sorgenti che emettevano radiazione pulsante a frequenza fissa nella banda delle onde radio. Fu questa rivoluzionaria scoperta ad aprire le porte ad un nuovo campo di ricerca della fisica, finalizzato allo studio delle proprietà statiche e dinamiche di questi oggetti compatti e rotanti composti principalmente da neutroni.

Le stelle di neutroni rappresentano uno degli ultimi stadi del processo evolutivo delle stelle che nascono con un valore iniziale di massa $M > 4M_{\odot}$, dove $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}$ g è la massa solare.

Generate attraverso la contrazione di dense nuvole di gas di idrogeno e polveri nel mezzo interstellare, le stelle attraversano, durante la loro vita, diverse fasi di equilibrio dinamico intervallate da bruschi collassi gravitazionali e violente esplosioni nucleari [3]. L'evoluzione ha origine con lo stadio di protostella, a cui si susseguono gli stadi di Sequenza Principale, subgigante rossa e gigante rossa. In ognuna di queste fasi, l'equilibrio è reso possibile dalle reazioni termonucleari innescate dalle alte temperature interne raggiunte. Mediante la combustione di elementi chimici sempre più pesanti (idrogeno, elio, carbonio), l'energia rilasciata sotto forma di energia cinetica delle particelle prodotte fornisce la pressione necessaria per bilanciare la forza gravitazionale ed evitare il collasso. Durante lo stadio di gigante rossa, la stella si mantiene stabile grazie al bruciamento dell'elio in carbonio nelle reazioni concatenate:



Quando l'*He* disponibile inizia ad esaurirsi, il nucleo di carbonio, circondato da un involucro composto dall'elio restante, non è più in grado di sostenere la pressione della forza gravitazionale ed inizia un nuovo collasso riducendo le sue dimensioni.

Gli stadi evolutivi a partire da questa fase dipendono fortemente dal valore di massa dell'oggetto. Se $M > 4M_{\odot}$, l'aumento della densità e della temperatura durante la contrazione del nucleo innesca nuovi processi di nucleosintesi che portano

alla produzione di elementi chimici sempre più pesanti. Il nucleo della stella assume una struttura a “cipolla”, con la regione più interna costituita da nuclei di Fe e le shell esterne attive nei bruciamenti via via degli elementi chimici precedenti Si^{28} , Ne^{20} , O^{16} , C^{12} , He^4 , H^1 , ... (Fig. 1.1). Durante la formazione del nucleo di ferro,

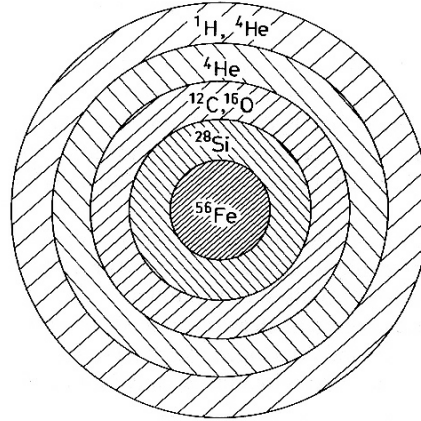
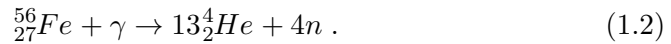


Figura 1.1. Le shell nucleari di una stella di grande massa nella fase di gigante rossa.

alla forza di gravità si affiancano altre reazioni che contribuiscono alla diminuzione della pressione interna della stella [10]. Le più efficienti sono:

- Fotodisintegrazione: i fotoni emessi nella nucleosintesi hanno energie sufficienti per disintegrare i nuclei di ferro:



Questo meccanismo, essendo endotermico, sottrae energia interna alla stella favorendo il collasso del nucleo stellare.

- Neutronizzazione: le alte densità di massa raggiunte nel nucleo portano alla cattura degli elettroni da parte dei protoni con copiosa produzione di neutrini attraverso il decadimento β inverso:



Da un lato la scomparsa degli elettroni ne riduce la pressione di degenerazione e dall'altro la fuga dei neutrini, che non interagiscono con la materia circostante e lasciano il nucleo indisturbato, libera energia all'esterno. Questi processi si combinano per accelerare la fine dell'equilibrio idrostatico.

Non appena la pressione fornita dalle reazioni termonucleari non bilancia più la pressione opposta della massa, il nucleo di ferro intraprende una catastrofica caduta verso l'interno, seguito dagli strati esterni. Poiché Fe è l'elemento chimico con maggiore energia di legame per nucleone, la stella non può raggiungere un nuovo stato di equilibrio attraverso la combustione endotermica del ferro. La contrazione del nucleo

si arresta quando la densità di massa per unità di volume ρ raggiunge i valori tipici della densità dei nuclei atomici, $\rho_0 \sim 2.7 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. La composizione della materia, infatti, è principalmente data dai neutroni generati attraverso la neutronizzazione e la fotodisintegrazione, a cui si aggiunge una piccola frazione di protoni ed elettroni. Per $\rho \sim \rho_0$, le forze repulsive tra i neutroni e la degenerazione dovuta al principio di esclusione di Pauli forniscono la pressione necessaria per compensare la forza gravitazionale. Sotto queste condizioni, il nucleo stellare diventa incompressibile e, bloccata la caduta libera, reagisce elasticamente provocando violente onde d'urto che, scontrandosi con l'involuppo esterno, ne espellono il materiale in un meccanismo che conduce all'esplosione di una supernova. Il nucleo ad alta densità che rimane in seguito a questo evento rapido e improvviso è ciò che attualmente chiamiamo stella di neutroni.

1.1 Struttura delle stelle di neutroni

Osservazioni sperimentali e sviluppi teorici descrivono la struttura interna delle stelle di neutroni come una serie di strati sferici concentrici di diversa composizione e con densità di massa ρ via via crescente allontanandosi dalla superficie: la *crosta esterna*, la *crosta interna*, il *core esterno* e il *core interno* (Fig. 1.2).

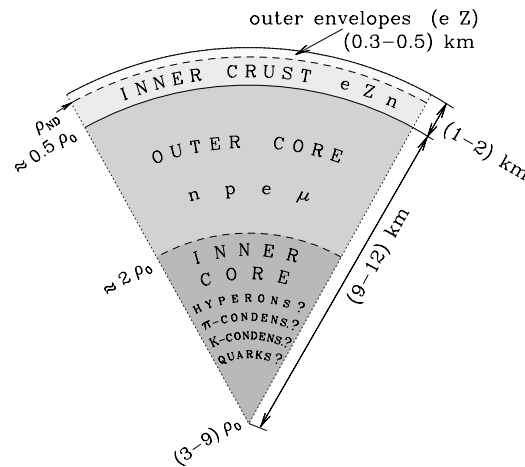


Figura 1.2. Struttura schematica di una stella di neutroni.

1.1.1 Crosta esterna

La *crosta esterna* è la regione più esterna della stella di neutroni, con una densità di massa $\rho_\beta < \rho < \rho_{drip}$, dove $\rho_\beta \sim 10^7 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_{drip} = 4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$. La materia è composta da elettroni e atomi completamente ionizzati. Gli ioni formano un solido Coulombiano disposto in un reticolo cristallino cubico a corpo centrato (BCC). Gli elettroni costituiscono un gas di Fermi fortemente degenere ed ultrarelativistico. La crescita radiale della densità ρ fa sì che l'energia di Fermi del gas aumenti

inducendo la cattura elettronica da parte dei nuclei attraverso il decadimento β inverso (torneremo su questa reazione nel prossimo paragrafo):



Questo processo, chiamato **neutronizzazione**, arricchisce i nuclei di neutroni, portando alla comparsa sequenziale di nuove specie nucleari come:



Complessivamente, il numero di nucleoni A e di protoni Z è determinato dalla configurazione di equilibrio tra gli eventi (1.4) e i decadimenti β permessi a qualunque densità. Tenendo conto delle forze nucleari interne agli ioni e delle osservazioni fenomenologiche, all'equilibrio, A è approssimativamente una funzione crescente di ρ e Z che dipende da A secondo:

$$Z \simeq 3.54 A^{1/2} . \quad (1.6)$$

Poichè il numero di protoni cresce con la radice del numero di nucleoni, all'aumentare di ρ , i nuclei della crosta esterna sono sempre più massivi e ricchi di neutroni.

Dal punto di vista osservativo, le proprietà della crosta esterna sono ricavabili direttamente dai dati nucleari. L'importanza di questa regione sta nel fatto che qualunque informazione fisica sul core centrale deve attraversare ed interagire con la crosta prima di essere rivelata.

Alla densità limite $\rho = \rho_{drip}$, diventa energeticamente favorevole per i neutroni creati dal processo (1.4) essere espulsi dai nuclei e viaggiare liberi nella materia [12]. Per valori ρ superiori, si entra in un nuova area della stella: la *crosta interna*.

1.1.2 Crosta interna

Essendo la regione compresa tra $\rho_{drip} \leq \rho \leq \rho_0$, con $\rho_0 = 2.67 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, nella *crosta interna* coesistono una miscela di diverse fasi della materia: un reticolo cristallino di nuclei di ^{118}Kr , il cui rapporto $Z/(A - Z) \sim 0.31$; il gas di Fermi elettronico; un gas di neutroni liberi la cui pressione si somma alla pressione di gas degeneri degli elettroni.

All'aumentare della densità, la frazione di elettroni diminuisce a causa dei decadimenti β inversi e il fluido di neutroni ha un ruolo sempre più importante nel mantenere la pressione di equilibrio.

I modelli che descrivono la crosta interna sono basati sull'estrapolazione di informazioni empiriche, poichè nuclei così ricchi di neutroni e a così alte densità non esistono sulla terra. Recenti studi suggeriscono che nell'intervallo $\rho_{drip} < \rho < 0.75 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ i nuclei ricchi di neutroni si dispongono approssimativamente in forma sferica mentre a $0.75 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3 \leq \rho \leq 1.2 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ costituiscono un mantello con una struttura più complicata dipendente dai modelli usati. A densità $\rho \sim \rho_0$, dove ρ_0 è la densità di saturazione nucleare, iniziano ad intervenire le forze repulsive tra i nucleoni degli ioni: il reticolo cristallino e i nuclei svaniscono e la materia diventa un fluido omogeneo di neutroni, protoni ed elettroni.

1.1.3 Core esterno

Confinante con la crosta interna, il *core esterno* è la regione di una stella di neutroni con l'intervallo di densità di massa $0.5\rho_0 \leq \rho \leq 2\rho_0$. La materia al suo interno è un fluido costituito principalmente da neutroni e una piccola frazione di protoni, elettroni e, quando possibile, muoni che coesistono in uno stato di equilibrio dinamico stabilito dalle reciproche interazioni particellari. La componente muonica compare solo a densità $\rho \simeq 2\rho_0$, in corrispondenza della quale gli elettroni hanno energie $E_e \geq m_\mu = 105.68 \text{ Mev}$ maggiori della massa muonica; in tal caso è energeticamente favorevole il processo di conversione dei neutroni in muoni [13]:

$$n \rightarrow p + \mu + \bar{\nu}_\mu . \quad (1.7)$$

Nonostante la temperatura di una stella di neutroni vari tra 10^9 K e 10^{12} K e sia di ordini di grandezza superiore, ad esempio, alla temperatura del Sole, le alte densità dei gas fermionici presenti nel core esterno e i relativi potenziali chimici μ sono tali che $\mu/k_B T \gg 1$ [12]. La materia in questa regione, quindi, si comporta come un gas di Fermi fortemente degenere. Per questo motivo, il calcolo di proprietà globali, quali l'energia totale, la pressione e l'energia di Fermi, può essere effettuato nel limite di temperatura nulla senza che vi siano sostanziali differenze rispetto al caso di temperatura finita.

Per quanto riguarda le evidenze sperimentali, gli alti valori di densità del core non sono riproducibili in laboratorio, rendendo possibili solo simulazioni teoriche da comparare con le poche informazioni ricavabili dalle osservazioni astrofisiche.

Nel corso degli anni sono stati formulati diversi modelli per descrivere il mezzo nucleare nel core. Sebbene tutti concordi nel predire la composizione $npe^- \mu$, queste ricostruzioni teoriche differiscono nella descrizione delle interazioni forti tra i nucleoni. Torneremo su questo problema nei prossimi paragrafi.

In generale, le caratteristiche della composizione $npe^- \mu$ sono determinate principalmente da due processi di interazione: le interazioni deboli tra nucleoni e leptoni e le interazioni forti tra gli adroni. Le interazioni elettromagnetiche e tra i leptoni sono invece trascurabili.

L'equilibrio β

Tra le interazioni particellari, le interazioni deboli hanno un ruolo essenziale nel determinare le condizioni di equilibrio della materia $npe^- \mu$.

Alle densità caratteristiche del core esterno, i potenziali chimici dei fermioni (proporzionali alle relative densità) sono sufficienti per rendere energeticamente possibili diverse reazioni elettrodeboli: il decadimento β del neutrone $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, la cattura elettronica da parte dei protoni $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ e, a densità $\rho \sim 2\rho_0$, il decadimento muonico del neutrone $n \rightarrow p + \mu + \bar{\nu}_\mu$ e il suo processo inverso $p + \mu \rightarrow n + \nu_\mu$ [13]. Notiamo che affinché le catture elettroniche si verifichino, le relative energie E_e devono essere superiori a una soglia data dalla differenza delle masse del neutrone m_n e del protone m_p :

$$E_e = \sqrt{p_e^2 + m_e^2} > \Delta m = m_n - m_p = 1.293 \text{ Mev} \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow p_e = \sqrt{\Delta m^2 - m_e^2} , \quad (1.9)$$

dove abbiamo posto $m_\nu = 0$. Per questo valore dell'impulso, gli elettroni sono relativistici, poichè la loro energia cinetica è molto maggiore dell'energia di massa. La densità n_e a cui la corrispondente energia di Fermi supera il limite Δm è $7 \times 10^{30} \text{ cm}^{-3}$. Al di sopra di questo valore, la materia è composta in gran parte da protoni, elettroni ed eventualmente muoni prodotti dai decadimenti dei neutroni [10].

Le interazioni deboli responsabili dei vari processi, non conservando il numero quantico di isospin, modificano le frazioni di particelle nel plasma. A partire da una data configurazione di $npe^- \mu$, quindi, la materia evolve variando le singole densità fino a raggiungere una configurazione di equilibrio. Poichè a ogni stato con una certa densità di protoni, neutroni, elettroni e muoni corrisponde un'energia per unità di volume $\epsilon(n_p, n_n, n_e, n_\mu)$, la composizione stabile è quella che ne minimizza il valore. Questa condizione si traduce in un vincolo sui potenziali chimici dei fermioni ($\mu_p, \mu_n, \mu_e, \mu_\mu$) che si risolve in un equilibrio dinamico, l'equilibrio β , tra i processi di decadimento dei neutroni e i relativi processi inversi:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \Leftrightarrow p + e^- \rightarrow n + \nu_e \quad (1.10)$$

$$n \rightarrow p + \mu + \bar{\nu}_\mu \Leftrightarrow p + \mu \rightarrow n + \nu_\mu . \quad (1.11)$$

Inoltre, data la conservazione del numero barionico e della carica elettrica in tutte queste reazioni, alla condizione di equilibrio β vanno affiancate le condizioni di neutralità del sistema e la conservazione della densità totale dei nucleoni n_B :

$$n_B = n_p + n_n \quad (1.12)$$

$$n_p = n_e + n_\mu , \quad (1.13)$$

con n_p, n_n, n_e, n_μ rispettivamente la densità protonica, neutronica, elettronica e muonica. L'insieme di questi vincoli sulle componenti della materia β stabile ne determina univocamente la composizione, fissando le singole frazioni di particelle e i relativi potenziali chimici in funzione di un unico parametro che è la densità barionica n_B .

Per derivare la condizione di equilibrio β , consideriamo la materia $npe^- \mu$ come un insieme fermioni con densità n_p, n_n, n_e, n_μ legate dalle relazioni (1.12) e (1.13). L'energia per unità di volume di questo sistema è:

$$\epsilon(n_p, n_n, n_e, n_\mu) = \epsilon(n_n, n_p) + \epsilon(n_e) + \epsilon(n_\mu) , \quad (1.14)$$

dove $\epsilon(n_n, n_p)$ rappresenta la densità di energia riguardante l'interazione forte tra i nucleoni.

Nell'espressione (1.14) i neutrini prodotti dalle reazioni deboli non contribuiscono poichè, fuggendo via all'infinito dalla stella di neutroni senza interagire, hanno densità e potenziali chimici nulli. In altre situazioni astrofisiche, come l'esplosione di una supernova o gli stadi iniziali di una protostella di neutroni, i neutrini rimangono intrappolati all'interno del sistema ed intervengono nella determinazione del suo stato stabile.

All'equilibrio, le densità n_p, n_n, n_e, n_μ sono tali da, per ogni data densità barionica n_B , minimizzare il valore di ϵ soddisfacendo insieme i vincoli (1.12) e (1.13).

A questo punto introduciamo una funzione ausiliaria $\tilde{\epsilon}(n_p, n_n, n_e, n_\mu)$:

$$\tilde{\epsilon}(n_p, n_n, n_e, n_\mu) = \epsilon(n_p, n_n, n_e, n_\mu) + \lambda_1(n_B - n_n - n_p) + \lambda_2(n_p - n_e - n_\mu), \quad (1.15)$$

dove λ_1 e λ_2 sono dei moltiplicatori di Lagrange.

La condizione di minimizzazione della densità di energia corrisponde alle seguenti richieste:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial n_n} &= \frac{\partial \epsilon}{\partial n_n} - \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial n_p} &= \frac{\partial \epsilon}{\partial n_p} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial n_e} &= \frac{\partial \epsilon}{\partial n_e} - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial n_\mu} &= \frac{\partial \epsilon}{\partial n_\mu} - \lambda_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Poichè il potenziale chimico dell'iesima specie di particelle è, per definizione:

$$\mu_i = \frac{\partial E}{\partial N_i} = \frac{\partial \epsilon}{\partial n_i},$$

le relazioni precedenti sono riscrivibili come:

$$\mu_n - \mu_p - \mu_e = 0 \quad (1.17)$$

$$\mu_e = \mu_\mu. \quad (1.18)$$

Attraverso le equazioni (1.17) e (1.18) derivanti dall'equilibrio β e i vincoli di neutralità elettrica e di conservazione del numero barionico, quindi, le frazioni di protoni, neutroni, elettroni e muoni che compongono la materia stabile del core esterno sono determinate univocamente in funzione della densità di nucleoni n_B .

Prima di proseguire nel descrivere le altre proprietà del fluido $npe^- \mu$, va sottolineato che le espressioni dei potenziali chimici degli adroni sono fortemente dipendenti dai modelli utilizzati per caratterizzare le interazioni forti che li coinvolgono; a seconda della teoria d'interazione usata, quindi, le densità dei nucleoni e dei leptoni all'equilibrio termodinamico saranno differenti.

Nel prossimo Capitolo analizzeremo quali sono i problemi derivanti dal considerare le interazioni forti tra protoni e neutroni e i possibili approcci per risolverli.

1.1.4 Core interno

Il *core interno*, dove $\rho \geq 2\rho_0$, costituisce il nucleo centrale della stella di neutroni. La sua composizione dipende fortemente dal modello teorico scelto per descriverlo. Le ipotesi principali sono tre [10][13]: l'*iperonizzazione* della materia predice la comparsa di barioni strani, come Σ^- e Λ , prodotti nei processi ad interazione debole grazie agli alti potenziali chimici di neutroni ed elettroni; la comparsa di pioni e kaoni nella forma di un condensato; la transizione di fase della materia nella quale i quark non sono più confinati negli adroni e coesistono liberi con una piccola frazione di elettroni. Quest'ultima teoria è particolarmente interessante in quanto renderebbe la Fisica delle stelle di neutroni rilevante anche dal punto di vista della *Cromodinamica Quantistica* (Quantum Chromo-Dynamics, o QCD).

1.2 L'equazione di stato della materia stellare

Indipendentemente dalla regione della stella di neutroni che si vuole analizzare, la materia all'equilibrio dinamico è descritta da una serie di proprietà globali: l'energia, la pressione, la compressibilità, etc. La quantità chiave da cui è possibile estrarre tutte queste caratteristiche è l'**equazione di stato** (EOS), cioè l'andamento della densità di energia ϵ per unità di volume in funzione della densità di massa ρ o della pressione totale P .

Mentre nella crosta l'EOS è calcolabile sulla base dei dati sperimentali e di accurati modelli che ricostruiscono le forze reciproche tra le particelle [10], la derivazione dell'equazione di stato nel core rimane un problema aperto ancora oggi. A seconda dell'approccio teorico usato per rappresentare le interazioni forti tra i nucleoni, infatti, i vari modelli presentano differenti forme di EOS e, in particolare, differenti valori della compressibilità, da cui seguono diversi limiti superiori di massa oltre i quali la pressione di gas degenere non riesce più a bilanciare la forza gravitazionale.

All'infuori delle strutture adottate in ognuna di queste teorie, lo scopo principale è sempre cercare di simulare con la maggior precisione possibile le alte densità nucleari del core fornendo predizioni da poter confrontare con le misure osservative disponibili.

Nel Capitolo 3 vedremo come la descrizione della materia del core esterno influenzi significativamente il flusso di neutrini emessi, che a sua volta determina proprietà importanti della stella, come il rate di raffreddamento.

Capitolo 2

Modelli teorici della materia nucleare

La discordanza tra il limite superiore alla massa di una stella di neutroni calcolato da Tolman, Oppenheimer e Volkof nel 1939 [10] e i valori misurati sperimentalmente mostra chiaramente la necessità di includere, in una descrizione realistica della materia, gli effetti delle interazioni forti tra gli adroni.

La complessità e la scarsa conoscenza di questo tipo di interazione e le approssimazioni che sono indispensabili nell'analisi di un sistema quantistico a molti corpi rendono la caratterizzazione della materia nucleare nelle stelle di neutroni un problema aperto ancora oggi.

La QCD costituisce, nell'ambito delle teorie di campo, la teoria fondamentale dell'interazione forte. Sfortunatamente però la costante di accoppiamento α_s , alle scale di distanza rilevanti per la maggior parte delle situazioni astrofisiche, assume dei valori che impediscono la trattazione perturbativa della teoria. A questo si aggiunge un'incompleta comprensione della struttura degli adroni in termini dei gradi di libertà della QCD. Di conseguenza, la rappresentazione della materia nucleare interagente in funzione di quark e gluoni deve essere sostituita da una più conveniente descrizione basata sulle particelle barioniche stesse, i nucleoni.

In questo Capitolo, dopo una breve introduzione sulla fenomenologia dei nuclei, discuteremo due diversi approcci per la descrizione della materia nucleare. Il primo è basato sul formalismo della teoria a molti corpi non relativistica e su modelli di Hamiltoniana nucleare fortemente vincolati dalle proprietà osservate dei sistemi a due e tre nucleoni. Il secondo utilizza il formalismo della teoria quantistica dei campi, nel quale le interazioni tra i nucleoni avvengono tramite lo scambio di mesoni scalari e vettoriali.

2.1 Fenomenologia dei nuclei atomici

Il fluido di neutroni e protoni nel core esterno, chiamato materia nucleare, si può schematizzare come un sistema uniforme di nucleoni in cui le interazioni elettromagnetiche vengono trascurate.

Il punto di riferimento di ogni approccio teorico al problema della materia nucleare nelle stelle di neutroni è fornito dalle informazioni sperimentali disponibili sui nuclei stabili, le cui proprietà principali sono le seguenti:

- La densità di carica elettrica $\rho_{ch}(r)$ in funzione della distanza dal centro del nucleo e del numero di nucleoni A ha un andamento complessivo della forma [10]:

$$\rho_{ch}(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R}{D}}}, \quad (2.1)$$

dove $D = 0.54 \text{ fm}$, $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ e $r_0 = 1.07 \text{ fm}$. La densità di carica rimane pressoché costante all'interno del nucleo, per poi diminuire bruscamente del 90% in un breve intervallo di ampiezza $R_T \sim 2.5 \text{ fm}$, indipendente da A . Il parametro R aumenta all'aumentare del numero dei nucleoni e fa sì che più pesanti sono i nuclei maggiore è il loro volume. Come mostrato in Fig. 2.1, oltre un numero di nucleoni A sufficientemente grande la densità di carica centrale dei nuclei satura ad un valore costante indipendente da A .

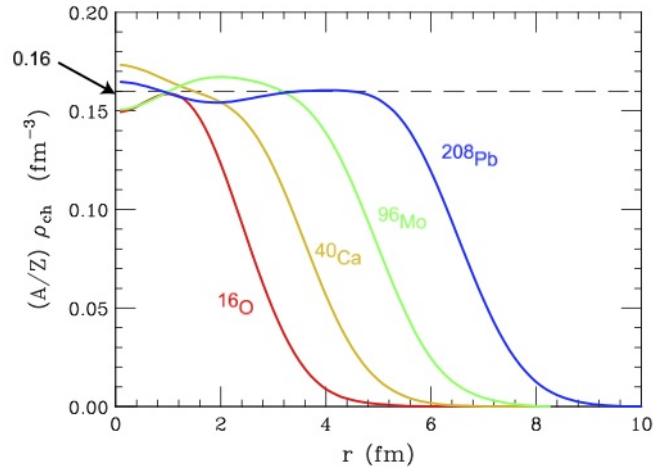


Figura 2.1. Saturazione della densità centrale dei nuclei misurata attraverso gli scattering elettrone-nucleo.

- L'energia di legame B dei nuclei, in funzione del numero di protoni Z e dei neutroni $N = A - Z$, può essere parametrizzata nel seguente modo:

$$B = B_{volume} + B_{asymmetry} + B_{surface} + B_{Coulomb} + \dots = \quad (2.2)$$

$$= a_V \cdot A - a_{sym} \cdot \frac{(Z - N)^2}{A} - a_{surf} \cdot A^{\frac{2}{3}} - a_C \cdot Z(Z - 1)A^{-\frac{1}{3}} \dots \quad (2.3)$$

Il primo termine rappresenta il contributo di volume dovuto alle forze attrattive tra i nucleoni all'interno del nucleo ed ha una dipendenza lineare in A .

Il secondo termine rispecchia il fenomeno osservato per cui i nuclei tendono a essere più instabili al crescere della differenza tra il numero di protoni e quello di neutroni. Il nucleo può essere infatti considerato schematicamente

come un sistema degenere in cui le energie di Fermi di protoni e neutroni aumentano all'aumentare del numero di particelle, e quindi l'energia di legame diminuisce. Questo meccanismo si comprende facilmente considerando il caso di un sistema traslazionalmente invariante, in cui il momento di Fermi di ogni specie, e quindi l'energia, è proporzionale alla relativa densità n secondo la relazione $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$ [14][13].

Il termine di superficie descrive il contributo all'energia di legame dei nucleoni che si trovano in prossimità della superficie del nucleo, e quindi interagiscono con un numero minore di vicini.

Il termine $B_{Coulomb}$ è relativo alla repulsione elettrica dei protoni ed è uguale all'energia elettrostatica di una sfera uniformemente carica.

L'andamento generale dei singoli contributi dell'energia di legame nella formula semiempirica di massa in funzione di A è mostrato in Fig. 2.2.

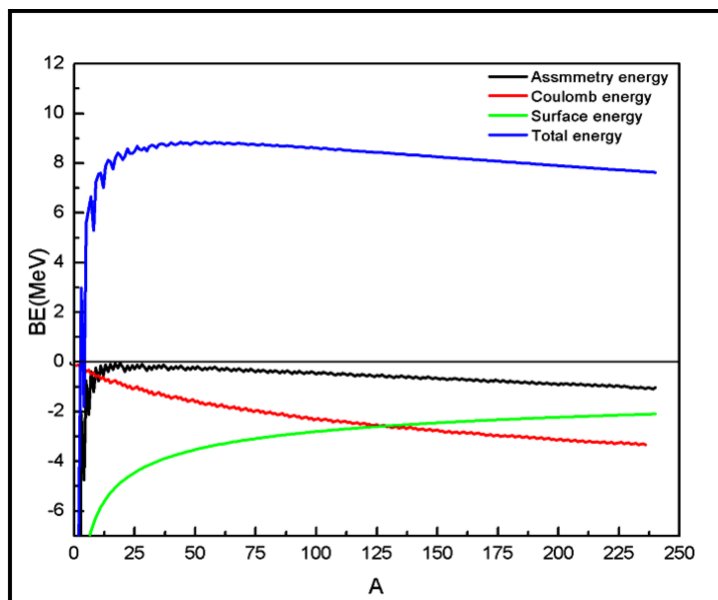


Figura 2.2. Andamento dei termini $B_{asymmetry}$, $B_{surface}$ e $B_{Coulomb}$ in funzione del numero di nucleoni A . Il termine di volume B_{volume} è una costante intorno a 15 MeV e, aggiunto agli altri contributi, fornisce l'andamento dell'energia di legame totale B .

Complessivamente, data la combinazione delle interazioni forti ed elettromagnetiche, il minimo valore di energia assumibile dal sistema, e quindi il massimo di energia di legame, si ha nel limite termodinamico $A, V \rightarrow \infty$ quando $Z - N \rightarrow 0$. In queste condizioni sopravvive solo l'apporto relativo al termine di volume, che si può interpretare come l'energia all'equilibrio di un sistema infinito di protoni e neutroni in numero uguale interagenti solo tramite le forze nucleari. Data la dipendenza del contributo di volume in funzione del numero totale di nucleoni, in questo quadro, l'energia di legame per nucleone B_0/A è una costante indipendente da A , evidenziando che le interazioni forti tra i nucleoni sono a corto raggio. Il valore che si ricava dalla (2.2) è $B_0/A = 16.3 \text{ MeV}$. La corrispondente densità di equilibrio $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ si può dedurre dai valori di densità centrale dei nuclei stabili, misurati negli esperimenti di diffusione

elastica elettrone-nucleo, che risultano essere indipendenti da A per grande A . Per quanto riguarda i coefficienti che compaiono nell'espressione (2.2), a_{sym} e a_{surf} sono legati all'energia di simmetria S_0 e all'incompressibilità della materia K_0 alla densità di saturazione:

$$S_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial \delta^2} \quad (2.4)$$

$$K_0 = 9n_B^2 \left(\frac{\partial^2 B}{\partial n_B^2} \right), \quad (2.5)$$

dove $\delta = Z - N$. I coefficienti a_V , a_{sym} , a_{surf} , a_C sono misurabili fittando le masse osservate di nuclei differenti.

2.2 Hamiltoniana nucleare

Le proprietà fenomenologiche della materia nucleare, ricavate dai dati sugli scattering nucleone-nucleone e elettrone-nucleo, si traducono in informazioni importanti sulla natura delle interazioni forti tra i nucleoni stessi.

Riassumendo, dall'analisi dell'andamento della densità nucleare e dalla formula semiempirica delle masse deduciamo che:

- Il valore costante e indipendente da A della densità di carica dei nuclei al di sotto di una certa distanza dal centro implica che le interazioni forti tra i nucleoni, quando le particelle si avvicinano oltre un dato raggio, sono necessariamente repulsive (si veda la Fig. 2.1).
- L'andamento costante dell'energia di legame per nucleone B/A per valori del numero di nucleoni $A \geq 20$ mostra come le forze nucleari reciproche siano a corto raggio: ogni particella sente solo l'interazione esercitata dalle sue vicine, non venendo influenzata dalle restanti più esterne ed essendo quindi indipendente dalla quantità totale di protoni e neutroni presenti nel nucleo.

A queste caratteristiche dell'interazione nucleone-nucleone si aggiunge un'ulteriore aspetto deducibile dallo spettro dei nuclei con stesso A e carica elettrica diversa di un'unità, che presentano evidenti somiglianze nei livelli energetici con medesimo momento angolare e parità. Questa analogia è dovuta all'invarianza delle interazioni forti sotto lo scambio tra protoni e neutroni, realizzata formalmente da una simmetria della densità di Lagrangiana sotto il gruppo di trasformazioni dell'isospin. Segue che, nell'ambito della teoria quantistica dei campi, trascurando la differenza di massa tra m_p e m_n , protoni e neutroni possono essere trattati come due stati della stessa particella, il nucleone, ad ognuno dei quali è associato un diverso numero quantico di isospin, rispettivamente $+1/2$ e $-1/2$. Infine, l'osservazione sperimentale del nucleo di deuterio (stato legato di un protone e un neutrone) esibisce una distribuzione di carica elettrica non simmetrica che sottolinea la non-centralità delle interazioni nucleone-nucleone.

Complessivamente, un sistema di nucleoni come i nuclei con grande numero atomico A o la materia ad alta densità del core nelle stelle di neutroni è descritto

in linea del tutto generale da un'Hamiltoniana contenente l'energia cinetica delle particelle e il termine di interazione forte.

Un primo tentativo di fornire una descrizione teorica dell'interazione nucleare venne fatto da Yukawa, il quale suppose che i nucleoni esercitassero forze reciproche l'uno sull'altro attraverso lo scambio di una particella massiva, identificata successivamente col pione, con un valore di massa μ legato al range r_0 tipico dell'interazione secondo la relazione:

$$r_0 = \frac{1}{\mu} . \quad (2.6)$$

La discordanza tra le misure effettuate negli scattering NN (nucleone-nucleone) e le predizioni del potenziale di Yukawa a corte e medie distanze portarono allo sviluppo, nel corso del tempo, di nuove teorie che includessero lo scambio di uno o più pioni e di particelle mesoniche più pesanti (ad esempio, i mesoni ρ e ω).

Per descrivere l'interazione NN a tutte le distanze si utilizzano potenziali fenomenologici del tipo:

$$v(ij) = \sum_{ST} [v_{TS}(r_{ij}) + \delta_{S1} v_{tT}(r_{ij}) S_{12}] P_{2S+1} \Pi_{2T+1} . \quad (2.7)$$

in cui è chiaramente visibile la dipendenza da spin e isospin, S e T , e la presenza di termini non centrali, contenenti l'operatore

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) , \quad (2.8)$$

dove $\vec{\sigma}_i$ è la matrice di Pauli che descrive lo spin dell' i -esimo nucleone. Gli operatori P_{2S+1} e Π_{2T+1} proiettano sugli stati NN con S e T definiti. Per grandi valori della distanza interparticellare il potenziale (2.7) si riduce al potenziale di Yukawa.

Effettuando un cambiamento di base si può riscrivere il potenziale nucleare secondo lo sviluppo

$$v(ij) = \sum_{n=1}^6 v^{(n)}(r_{ij}) O_{ij}^{(n)} , \quad (2.9)$$

dove i sei operatori O_{ij}^n sono scelti in maniera da riprodurre tutte le proprietà del deutone (energia di legame, momento magnetico e momento di quadrupolo elettrico) e lo scattering NN in onda S (cioè in stati di momento angolare pari a 0), ovvero

$$O_{ij}^{n \leq 6} = [1, (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j), S_{ij}] \otimes [1, (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j)] , \quad (2.10)$$

con $\vec{\tau}_i$ la matrice di Pauli che descrive l'isospin dell' i -esimo nucleone. Per descrivere inoltre lo scattering NN in onda P è necessario includere due ulteriori operatori dipendenti dal momento angolare orbitale totale \vec{L}

$$O_{ij}^{n=7,8} = \vec{L} \cdot \vec{S} \otimes [1, (\vec{\tau}_i, \vec{\tau}_j)] . \quad (2.11)$$

Il potenziale che fornisce la migliore descrizione dei phase shifts del database di Nijmegen, chiamato potenziale Argonne v_{18} [7], contiene il contributo di 18 operatori, che tengono conto anche dei piccoli effetti della rottura di simmetria di carica, dovuta alla differenza di massa tra protone e neutrone e tra pioni neutri e carichi.

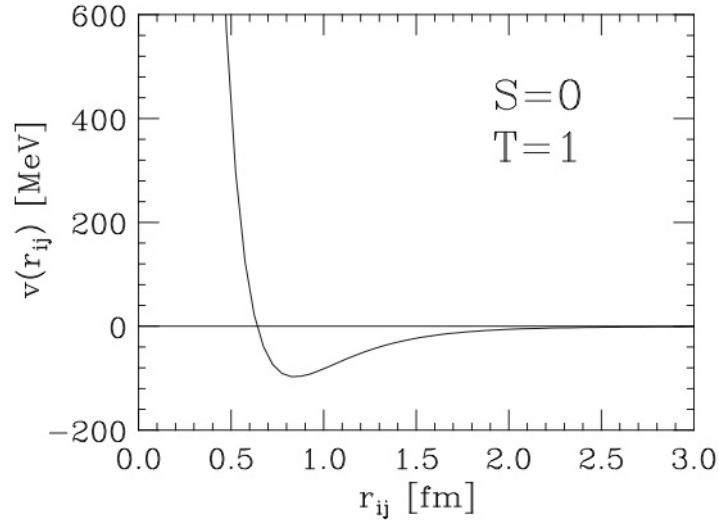


Figura 2.3. Dipendenza radiale del potenziale NN che descrive l'interazione fra due nucleoni in uno stato di momento angolare relativo $L = 0$ e spin e isospin totali $S = 0$ e $T = 1$.

Nel nostro lavoro abbiamo utilizzato il potenziale chiamato v'_6 , che si ottiene dal potenziale Argonne v_{18} trascurando tutti gli operatori O_{ij}^n con $n > 6$.

L'andamento del potenziale NN in uno stato di momento angolare relativo $L = 0$ e spin e isospin totali pari a $S=0$ e $T=1$ è mostrato in Fig. 2.3. Si osserva chiaramente come il core repulsivo a corto raggio, causato dallo scambio di mesoni pesanti o a processi che coinvolgono direttamente i costituenti dei nucleoni, è seguito da una regione intermedia attrattiva, dovuta in gran parte allo scambio di due pioni; infine, per grandi distanze interparticellari domina il meccanismo di scambio di un pione.

La presenza del core repulsivo è di fondamentale importanza poichè, come detto in precedenza, esso gioca un ruolo primario nel determinare la stabilità delle stelle di neutroni.

I potenziali come Argonne v_{18} riproducono tutte le proprietà osservate degli stati di due nucleoni, sia legati che di scattering. Essi possono poi essere usati per risolvere l'equazione di Schrödinger che determina lo stato di un sistema non-relativistico con $A > 2$. Tuttavia, seguendo questa procedura, si scopre che per riprodurre l'energia di legame di un sistema a tre nucleoni è necessario includere nell'hamiltoniana un potenziale a tre corpi. Questo viene generalmente scritto nella forma

$$V_{ijk} = V_{ijk}^{2\pi} + V_{ijk}^N, \quad (2.12)$$

dove il primo termine rappresenta il processo di scambio di due pioni mentre il secondo, repulsivo, è puramente fenomenologico. Il processo dominante nell'interazione fra tre nucleoni è quello relativo allo scambio di due pioni associato all'eccitazione di un nucleone nello stato intermedio del processo, come mostrato schematicamente in Fig. 2.4.

Per sistemi con $A > 3$ è ancora possibile ottenere soluzioni dell'equazione di Schrödinger con approcci stocastici, come i metodi Variational Monte Carlo (VMC)

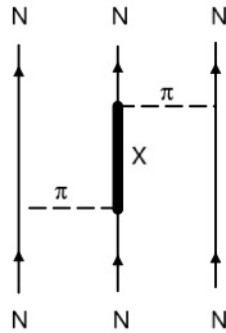


Figura 2.4. Rappresentazione schematica del processo di scambio di due pioni nell'interazione fra tre nucleoni; la linea marcata rappresenta lo stato eccitato di un nucleone.

e Green Function Monte Carlo (GFMC) [15]. Quest'ultimo è stato utilizzato con successo per descrivere lo stato fondamentale e i primi stati eccitati di sistemi con $A \leq 12$. L'ottimo accordo tra i risultati del metodo GFMC e i dati sperimentali dimostra che l'approccio non-relativistico discusso in questo Paragrafo, in cui la dinamica è determinata dall'analisi delle proprietà di sistemi di due e tre nucleoni, ha notevole potere predittivo.

2.3 Teoria a molti corpi non relativistica

Nelle teorie non relativistiche a molti corpi, l'Hamiltoniana che governa un insieme di nucleoni che interagiscono mediante interazione forte ha la seguente forma generale:

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} + \sum_{j>i=1}^A v_{ij} + \dots \quad (2.13)$$

Il termine di energia cinetica esprime la dipendenza non relativistica dell'energia dall'impulso \vec{p}_i di ogni i -esima particella. Per quanto riguarda il secondo termine e i successivi omessi, essi esprimono i potenziali a due e molti corpi, discussi nella Sezione precedente, a cui è soggetta ogni componente del sistema ad opera delle restanti. Come noto dalla meccanica quantistica, a determinare la dinamica della totalità dei nucleoni nello stato fondamentale $|\Psi_0\rangle$ di minima energia è l'equazione di Schrodinger:

$$H |\Psi_0\rangle = E_0 |\Psi_0\rangle, \quad (2.14)$$

con E_0 l'autovalore di energia dell'autostato $|\Psi_0\rangle$. Come abbiamo sottolineato nella Sezione 2.2, l'Eq.(2.14) è risolvibile solo nei casi in cui $A \leq 12$, indipendentemente dal potenziale di interazione. Lo studio della materia nucleare uniforme nel limite termodinamico, rilevante per le proprietà delle stelle di neutroni (il numero di neutroni presenti in una stella è dell'ordine 10^{57}), richiede l'uso di approssimazioni.

Lo studio della materia nucleare è molto difficile a causa della presenza del core fortemente repulsivo del potenziale v_{ij} , che rende l'approccio di tipo perturbativo

molto problematico. Il valore degli elementi di matrice di v_{ij} tra stati del sistema non interagente risulta infatti essere molto grande, o addirittura divergente. La strategia utilizzata per aggirare questa difficoltà consiste nel sostituire agli stati del gas di Fermi (FG) dei nuovi stati *correlati*, che incorporano gli effetti non perturbativi dovuti al core del potenziale.

2.3.1 Teoria della base correlata

Nella teoria della base correlata (*Correlated Basis Function*, o CBF) vengono considerati come base per rappresentare il sistema un set di stati che si ottengono dagli stati del gas di Fermi (FG) attraverso la trasformazione

$$|n\rangle = \frac{F|n_{\text{FG}}\rangle}{\langle n_{\text{FG}}|F^\dagger F|n_{\text{FG}}\rangle^{1/2}} . \quad (2.15)$$

L'operatore F , che agendo sullo stato $|n_{\text{FG}}\rangle$ genera la struttura di correlazione indotta dall'interazione NN, si scrive nella forma

$$F(1, \dots, N) = \mathcal{S} \prod_{j>i=1}^N f_{ij} , \quad (2.16)$$

dove \mathcal{S} è l'operatore di simmetrizzazione che tiene conto del fatto che in generale

$$[f_{ij}, f_{ik}] \neq 0 . \quad (2.17)$$

La struttura delle *funzioni di correlazione* f_{ij} deve ricalcare quella del potenziale NN. Si utilizza quindi l'espressione (si confronti con l'Eq.(2.9))

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^6 f^n(r_{ij}) O_{ij}^n , \quad (2.18)$$

in cui abbiamo incluso solamente i primi sei operatori descritti nella Sezione precedente, che come abbiamo già ricordato sono sufficienti per riprodurre le caratteristiche principali del deutone. Le parti radiali della funzione di correlazione, cioè le $f^n(r_{ij})$ vengono calcolate sfruttando il principio variazionale di Ritz, ovvero minimizzando il valor medio dell'hamiltoniana nello stato fondamentale della base correlata

$$\langle H \rangle = \langle 0|H|0 \rangle \geq E_0 , \quad (2.19)$$

imponendo come condizioni al contorno che $f^n \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$ e che per $r \rightarrow \infty$ solamente la $f^1(r)$ tenda ad uno, mentre tutte le altre si annullino.

Le funzioni radiali ottenute per la materia nucleare simmetrica alla densità di equilibrio sono mostrate in Fig. 2.5. Si osserva come per piccole distanze r fra i nucleoni interagenti la funzione di correlazione tenda a diventare molto piccola. In particolare, per coppie con spin e isospin totali pari a $S = 0$ e $T = 0$ la funzione si annulla totalmente, poichè il potenziale corrispondente ha un core repulsivo grande ed esteso. Nel caso in cui $S = 1$ e $T = 0$ invece, ovvero nello stato del deutone, la parte repulsiva del potenziale è meno pronunciata, e seguita da una parte attrattiva. Di conseguenza la funzione di correlazione tende ad un valore piccolo ma non nullo nell'origine, e supera l'unità a medio raggio.

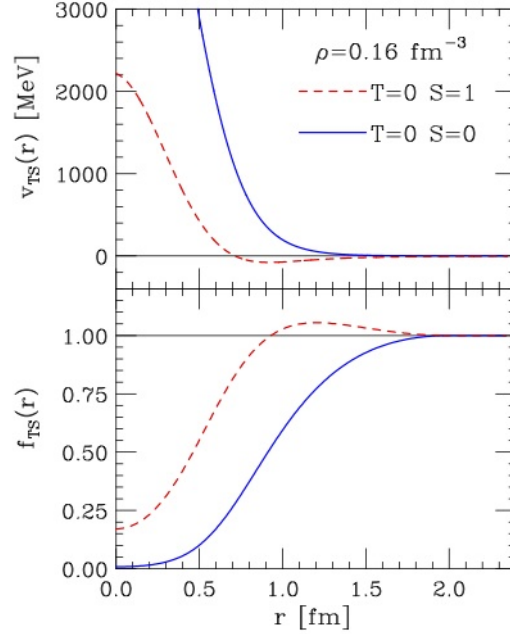


Figura 2.5. Potenziale di interazione ANL v_{18} (pannello superiore) e funzioni di correlazione f_{TS} (pannello inferiore) in funzione della distanza r fra i nucleoni.

2.3.2 Formalismo dell'espansione in clusters

A questo punto resta ancora aperto il problema di calcolare gli elementi di matrice di un operatore a molti corpi fra stati correlati.

L'operatore di correlazione F definito nella (2.16) è costruito in maniera tale che se un qualunque sottoinsieme di particelle viene portato a grande distanza dal resto del sistema esso si fattorizza secondo la

$$F(1, \dots, N) \rightarrow F_p(i_1, \dots, i_p) F_{N-p}(i_{p+1}, \dots, i_N) . \quad (2.20)$$

Questa proprietà è la base del formalismo dell'espansione in clusters [16], che consente di scrivere gli elementi di matrice di un operatore a molti corpi fra stati correlati come la somma di termini derivanti da sottosistemi isolati, contenenti un numero sempre crescente di particelle. Tralasciando la dimostrazione di questo sviluppo, diamo qui solo il risultato che abbiamo utilizzato, che permette di scrivere il valor medio dell'operatore hamiltoniano nello stato fondamentale del sistema come

$$\langle H \rangle = T_0 + (\Delta E)_2 + (\Delta E)_3 + \dots + (\Delta E)_N , \quad (2.21)$$

dove T_0 è l'energia dello stato fondamentale del gas di Fermi e $(\Delta E)_i$ rappresenta il contributo all'energia del cluster di n corpi. Benché il contributo $(\Delta E)_2$ sia quello dominante, in generale quello dei clusters con più di due nucleoni non è trascurabile. Questi contributi possono essere sommati risolvendo un sistema di equazioni integrali dette Fermi-Hyper-Netted-Chain (FHNC) [16].

2.3.3 Il potenziale effettivo

Definiamo ora un potenziale effettivo che agisce fra due nucleoni attraverso la relazione (si confronti con la (2.21)):

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \langle 0|H|0 \rangle \approx T_0 + (\Delta E)_2 + (\Delta E)_3 \\ &= \langle 0_{FG}|T_0 + V_{\text{eff}}|0_{FG} \rangle . \end{aligned} \quad (2.22)$$

La forma del potenziale effettivo definito dalla (2.22) e' molto complessa [17]. Diamo qui la forma esplicita del termine $(\Delta E)_2$ che permette di ottenerne una versione semplificata [18]. Dalla

$$(\Delta E)_2 = \frac{A(A-1)}{2} \sum_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j} \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j | v_{\text{eff}}(12) | \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j \rangle_a , \quad (2.23)$$

dove la somma è estesa agli stati occupati all'interno del mare di Fermi e la notazione $|\dots\rangle_a$ si riferisce al fatto che lo stato $|\dots\rangle$ è antisimmetrizzato, segue immediatamente che

$$V_{\text{eff}} = \sum_{i<j} v_{\text{eff}}(ij) = \sum_{i<j} f_{ij} \left[-\frac{1}{m} (\nabla^2 f_{ij}) - \frac{2}{m} (\nabla f_{ij}) \cdot \nabla + v(ij) f_{ij} \right] . \quad (2.24)$$

La (2.24) mostra chiaramente che il potenziale effettivo tiene conto dell'effetto di schermo dell'interazione nuda dovuto alle correlazioni, la cui inclusione tramite le funzioni f_{ij} da anche origine ad un contributo puramente cinetico. Nel limite di densità nulla, l'interazione effettiva ottenuta dal formalismo CBF si riduce ad un potenziale realistico, il potenziale Argonne v'_6 , che riproduce i dati del sistema NN.

Il confronto tra il potenziale nudo e quello effettivo, illustrato nella Fig. 2.6, mostra che quest'ultimo ha un andamento regolare, ed è quindi adeguato per effettuare calcoli di un gran numero di proprietà della materia nucleare utilizzando la teoria delle perturbazioni ad ordine basso nella base del FG.

L'inclusione del termine $(\Delta E)_3$ nella determinazione del potenziale effettivo permette di tenere conto degli effetti delle forze a tre nucleoni utilizzando un modello microscopico del potenziale V_{ijk} . Il potenziale effettivo che abbiamo utilizzato [17] è stato ottenuto usando il modello chiamato Urbana IX [19].

Dal punto di vista metodologico, il nostro approccio può essere visto come una *teoria effettiva*, in quanto è costruito per riprodurre le proprietà empiriche della materia nucleare ad un ordine basso di un certo schema di approssimazione.

2.3.4 Calcolo della massa effettiva

Come abbiamo visto nella Sezione precedente, il potenziale effettivo

$$V_{\text{eff}} = \sum_{j>i} v_{\text{eff}}(ij) = \sum_{j>i} \sum_{n=1}^6 v_{\text{eff}}^n(r_{ij}) O_{ij}^n , \quad (2.25)$$

permette di ottenere le proprietà della materia nucleare utilizzando la teoria delle perturbazioni nelle base degli autostati del FG.

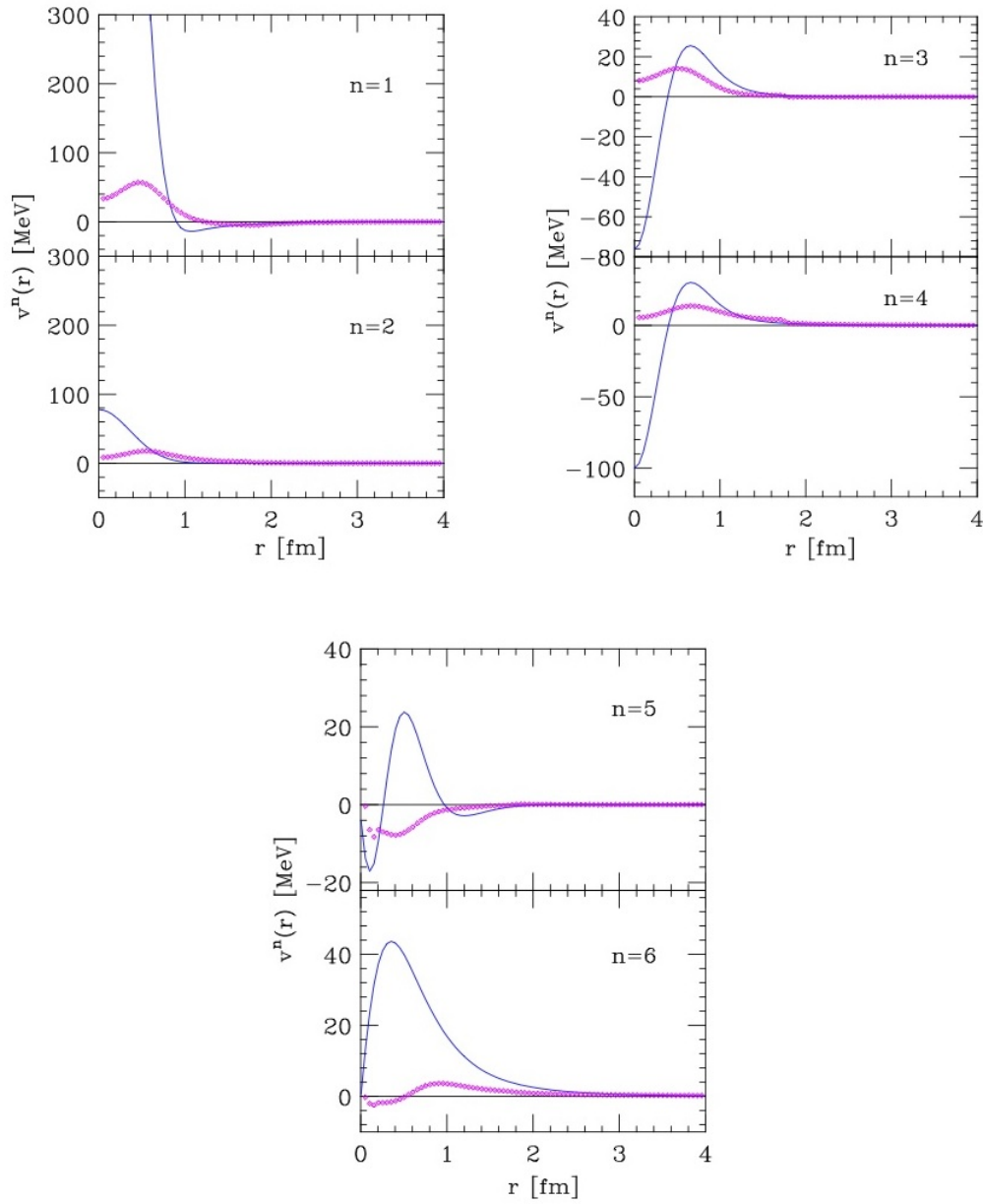


Figura 2.6. Confronto tra le componenti del potenziale Argonne v'_6 (linee continue) e il potenziale effettivo definito dalla Eq.(2.24) (rombi), calcolato alla densità di equilibrio della materia nucleare.

Ad esempio, lo spettro delle energie di particella singola nella materia di neutroni a densità ρ è dato, in approssimazione di Hartree-Fock, dalla

$$e(k) = \frac{k^2}{2m} + U(k) \quad (2.26)$$

con

$$U(k) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int d^3r v_{\text{eff}}^n(r) \left[A^n - B^n e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \ell(k_F x) \right]. \quad (2.27)$$

Nella (2.27)

$$A^n = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \langle \sigma\sigma' | O^n | \sigma\sigma' \rangle, \quad B^n = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \langle \sigma\sigma' | O^n | \sigma'\sigma \rangle, \quad (2.28)$$

dove $|\sigma\sigma'\rangle$ è lo stato di spin di due neutroni e la funzione di Slater $\ell(x)$ è definita come

$$\ell(x) = \frac{3}{x^3} [\sin(x) - x \cos(x)] = \frac{3}{x} j_1(x), \quad (2.29)$$

dove $j_1(x)$ è la funzione sferica di Bessel di ordine uno.

Noto il potenziale effettivo e lo spettro di energia in funzione del modulo k del momento di singola particella, i cambiamenti introdotti all'interno del sistema dalla presenza delle interazioni forti rispetto al caso libero possono essere descritti introducendo la massa effettiva $m^*(k)$. Per comprendere in che modo questa quantità sia ottenibile a partire dallo spettro di energie $e(k)$, dobbiamo considerare la dipendenza dell'energia cinetica di una particella di massa m in funzione di k :

$$e(k) = \frac{k^2}{2m}. \quad (2.30)$$

In questo caso, la massa della particella è legata in modo semplice all'inverso della derivata dell'energia:

$$m = \left(\frac{1}{k} \frac{de(k)}{dk} \right)^{-1}. \quad (2.31)$$

Allo stesso modo, se consideriamo la funzione $e(k)$ di una singola particella interagente con le altre componenti di un sistema a molti corpi, possiamo definire la massa effettiva m^* come:

$$m^* = \left(\frac{1}{k} \frac{de(k)}{dk} \right)^{-1}. \quad (2.32)$$

Nella Fig. 2.7, lo spettro $e(k)$ nella materia di neutroni a densità ρ_0 , ottenuto usando l'interazione effettiva CBF [17], è confrontato con quello del FG. La dipendenza da k della corrispondente massa effettiva è illustrata nella Fig. 2.8.

Come vedremo nei prossimi Capitoli, l'andamento della massa effettiva, che tiene conto di come la dinamica dei nucleoni è modificata dalle interazioni forti, è fortemente influenzata dal modello adottato per descrivere le forze reciproche tra i protoni e neutroni nel core della stella di neutroni.

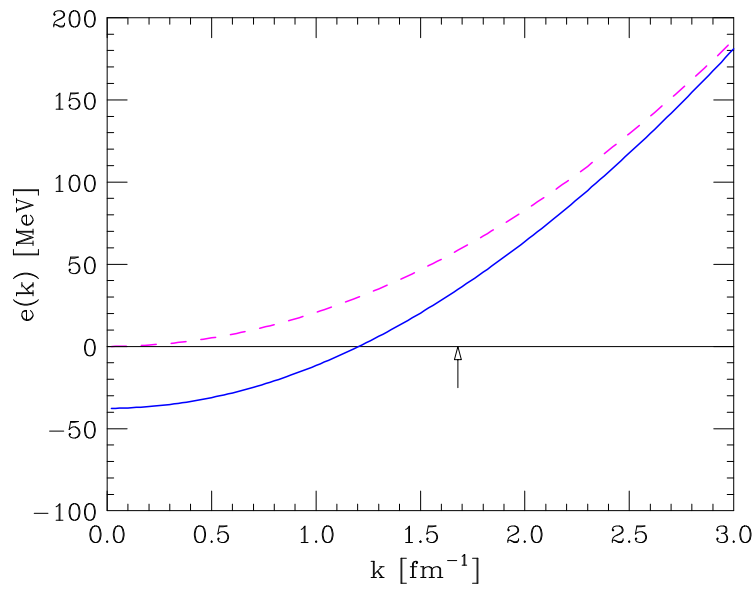


Figura 2.7. Andamento dello spettro dell'energia $e(k)$ di singola particella in funzione del momento k per l'interazione effettiva CBF (linea solida) e per FG (linea tratteggiata).

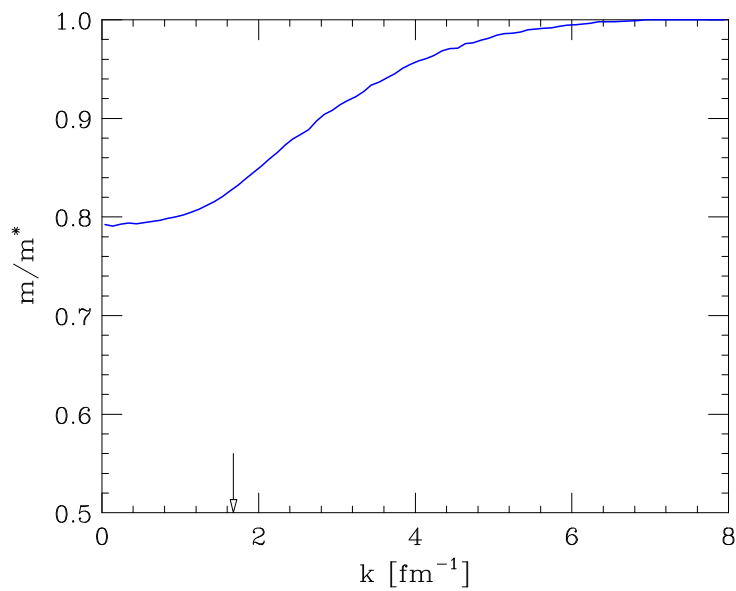


Figura 2.8. Andamento della massa effettiva in funzione del momento k per l'interazione effettiva CBF.

2.4 Le teorie di campo relativistiche

Benchè disponiamo di un'ampia evidenza empirica che dimostra come i nuclei atomici siano descrivibili utilizzando la meccanica quantistica non relativistica, l'estensione di questo approccio al regime di densità tipico delle stelle di neutroni può essere messa in discussione, soprattutto nel caso di stelle particolarmente massive, al cui centro si raggiungono valori di densità $\sim (4-5)\rho_0$. A queste densità, la propagazione relativistica dei nucleoni e gli effetti di ritardo sui mesoni virtuali mediatori delle interazioni non sono infatti più trascurabili.

Uno schema alternativo, che tiene correttamente conto degli effetti relativistici, è basato sul formalismo della teoria quantistica dei campi e sull'uso dell'approssimazione di campo medio [20]. In questa formulazione, l'interazione tra i nucleoni, descritti da campi di Dirac, avviene tramite lo scambio di mesoni scalari e vettoriali, che vengono trattati come campi classici.

La teoria di campo che illustreremo nella prossima Sezione è il modello σ - ω - ρ , che rappresenta una delle evoluzioni del modello proposto originariamente da Walecka nel 1974 [20].

2.4.1 Il modello σ - ω - ρ

Il modello $\sigma - \omega - \rho$ è una teoria effettiva in cui le forze reciproche tra i nucleoni sono mediate da tre particelle adroniche, i mesoni σ , ω e ρ .

Come accennato nell'introduzione a questo Capitolo, le difficoltà associate alla trattazione dell'interazione forte in termini di quark e gluoni suggeriscono un'analisi della materia nucleare in termini di gradi di libertà adronici. Poichè nella maggior parte dei casi, i protoni e i neutroni all'interno dei nuclei e del core esterno si comportano come particelle individuali che interagiscono attraverso lo scambio di bosoni, una descrizione *effettiva* di questi sistemi a molti corpi in termini dei gradi di libertà adronici (nucleoni e mesoni), come nel modello $\sigma - \omega - \rho$, è una scelta interessante e conveniente rispetto alla costruzione di una Lagrangiana con i costituenti elementari della QCD.

La forma dell'interazione nel modello $\sigma - \omega - \rho$ non può essere derivata a partire dalla QCD come teoria effettiva nel limite di bassa energia. La determinazione della dinamica è però comunque guidata dalle proprietà generali della QCD e, in particolare, dalle sue simmetrie. L'interazione deve essere invariante sotto il gruppo di trasformazioni della QCD, conservando numero barionico, isospin, parità, etc. Inoltre, la forma della Lagrangiana deve permettere di riprodurre le proprietà empiriche della materia nucleare, come il punto di saturazione. Per questo motivo, le costanti di accoppiamento dei vertici d'interazione e le masse dei mediatori sono trattate come dei parametri liberi, da calibrare sulla base dei dati sperimentali della materia nucleare.

Va sottolineato che, nonostante fornisca una soddisfacente descrizione della struttura dei nuclei spiegando in materia naturale diversi effetti relativistici, questa teoria quantistica di campo fornisce buoni risultati sulla scala delle grandi distanze e dei piccoli trasferimenti di energia ma fallisce per grandi valori del quadrimomento scambiato in cui iniziano a essere visibili le strutture interne degli adroni.

I campi quantistici in termini dei quali è espressa la densità di Lagrangiana del modello σ - ω - ρ sono i due campi fermionici dei protoni e dei neutroni, rappresentati da spinori di Dirac, e tre campi mesonici che mediano le interazioni forti tra i nucleoni. Dei mesoni che intervengono nell'accoppiamento con i nucleoni, uno è la particella scalare σ (con spin $J = 0$, carica elettrica $Q = 0$) e gli altri due sono le particelle vettoriali ω ($J = 1$, $Q = 0$) e ρ ($J = 1$, $Q = 1$); sotto il gruppo di trasformazioni dell'isospin, i campi $\sigma(x)$ e $\omega(x)$ sono degli isoscalari e rimangono invariati, mentre il campo $\rho(x)$ si comporta come un isovettore.

L'espressione esplicita della densità di Lagrangiana totale è:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{int} , \quad (2.33)$$

con:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N &= \bar{\psi}(x)(i\partial_\mu\gamma^\mu - m_N)\psi(x) \\ \mathcal{L}_B &= \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma(x)\partial^\mu\sigma(x) \\ &\quad - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu \\ &\quad - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_\mu\rho^\mu \\ \mathcal{L}_{int} &= -g_\omega\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\omega_\mu\psi(x) - \frac{1}{2}g_\rho\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_\mu\psi(x) + g_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma(x)\psi(x) + \\ &\quad - \frac{1}{3}\frac{g_\sigma^3}{G_3}\sigma^3(x) - \frac{1}{4}\frac{g_\sigma^4}{G_4}\sigma^4(x) , \end{aligned} \quad (2.34)$$

dove m_N è la massa media dei nucleoni, $m_\sigma, m_\omega, m_\rho, g_\sigma, g_\omega, g_\rho$ sono rispettivamente le masse e le costanti di accoppiamento dei mesoni σ, ω, ρ e $\vec{\tau}$ è il vettore che ha come componenti le tre matrici di Pauli agenti nello spazio bidimensionale dell'isospin. I fattori G_3 e G_4 sono dei parametri rispettivamente di dimensione Gev^{-1} e adimensionale presi così come sono definiti in [21]. Inoltre:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\nu\omega_\mu - \partial_\mu\omega_\nu \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\nu\rho_\mu - \partial_\mu\rho_\nu . \end{aligned} \quad (2.35)$$

La componente \mathcal{L}_B della densità di Lagrangiana contiene i termini relativi all'energia cinetica e l'energia a riposo dei mesoni liberi mediatori dell'interazione; ugualmente \mathcal{L}_N è la Lagrangiana libera di Dirac dei protoni e dei neutroni.

Per quanto riguarda \mathcal{L}_{int} , notiamo che, nel limite non relativistico, i termini di interazione danno luogo a potenziali statici la cui somma ha, nello spazio delle coordinate, l'andamento del potenziale della Fig. 2.3. Le evidenze sperimentali degli scattering nucleone-nucleone suggeriscono che le relative ampiezze debbano contenere una componente isoscalare, una scalare e una vettoriale. Da ciò, l'interazione forte tra gli adroni deve essere dominata dallo scambio di un mesone invariante sotto trasformazioni di isospin e di altri due mesoni, uno scalare e uno vettore di Lorentz, cruciali nel descrivere le proprietà globali della materia [8].

I termini $g_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma(x)\psi(x)$ e $-g_\omega\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\omega_\mu(x)\psi(x)$ identificano rispettivamente la forza attrattiva a lungo raggio e la forza repulsiva a corto raggio tra i nucleoni; l'accoppiamento col campo vettoriale-isovettoriale $\rho(x)$ introduce un termine

dipendente dall'isospin nella densità di Lagrangiana e fornisce il contributo relativo all'energia di asimmetria del sistema [14]. Notiamo, infatti, che i vertici di interazione con i campi isoscalari $\omega(x)$ e $\sigma(x)$ non contengono operatori che agiscono sullo spazio bidimensionale dell'isospin e non mescolano le componenti dell'isospinore del nucleone. Questi termini della Lagrangiana sono separabili in due contributi dipendenti esclusivamente dai campi protonici o dai campi neutronici e non possono tenere traccia dell'energia di asimmetria. Essendo legata alla differenza di densità $n_p - n_n$, essa può essere espressa solo da quegli accoppiamenti con termini misti che contengono contemporaneamente gli spinori $\psi_p(x)$ e $\psi_n(x)$. I termini $-\frac{1}{3}\frac{g_\sigma^3}{G_3}\sigma^3(x)$ e $-\frac{1}{4}\frac{g_\sigma^4}{G_4}\sigma^4(x)$ rappresentano i processi di autointerazione del campo scalare $\sigma(x)$.

Risolviendo le equazioni di Eulero-Lagrange relative ai singoli campi quantistici, otteniamo un sistema di quattro equazioni del moto non omogenee:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma(x) + m_\sigma^2 \sigma(x) = g_\sigma \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{g_\sigma^3}{G_3} \sigma^2(x) - \frac{g_\sigma^4}{G_4} \sigma^3(x) \quad (2.36)$$

$$\equiv g_\sigma n_s - \frac{g_\sigma^3}{G_3} \sigma^2(x) - \frac{g_\sigma^4}{G_4} \sigma^3(x) \quad (2.37)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + m_\omega^2 \omega^\nu(x) = g_\omega \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x) \quad (2.38)$$

$$\partial_\mu B^{\mu\nu}(x) + m_\rho^2 \vec{\rho}^\nu(x) = \frac{1}{2} g_\rho(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \vec{\tau} \psi(x), \quad (2.39)$$

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_\omega \omega_\mu(x) - \frac{1}{2} g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_\mu(x)) - (m_N - g_\sigma \sigma(x)) \psi(x) = 0 \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow (i\gamma^\mu D_\mu - m^*) \psi(x) = 0. \quad (2.41)$$

Notiamo che l'Eq.(2.40) dell'isospinore del nucleone ha la forma generale di un'equazione di Dirac libera con un operatore derivata D^μ e un termine di massa m^* , detta massa effettiva, definiti nel seguente modo:

$$iD^\mu = i\partial^\mu - g_\omega \omega_\mu(x) - \frac{1}{2} g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_\mu(x) \quad (2.42)$$

$$m^* = m_N - g_\sigma \sigma(x). \quad (2.43)$$

L'Eq.(2.37) è l'equazione di Klein-Gordon per il campo $\sigma(x)$ con un termine di sorgente dato dalla densità scalare n_s e dall'autointerazione. I campi $\omega(x)$ e $\rho(x)$ sono governati da equazioni quadrivettoriali (Eq.(2.38) e Eq.(2.39)) equivalenti alla QED per particelle massive: i contributi non omogenei sono rispettivamente la corrente conservata barionica, con la componente zero $\bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) = n_B = n_p + n_n$ pari alla densità di protoni e neutroni nel punto x , e la corrente conservata di isospin, con $\bar{\psi}(x) \gamma^0 \tau_3 \psi(x) = n_p - n_n$ pari alla densità di isospin.

I campi mesonici intervengono nell'Eq.(2.40) attraverso una "sostituzione minimale" analoga a quella della QED, con il campo vettoriale $\vec{\rho}(x)$ inglobato nella derivata D^μ e il campo scalare $\sigma(x)$ nel termine di massa m^* (assente in QED) [8].

Le equazioni non lineari appena descritte non sono risolvibili. Le costanti di accoppiamento che compaiono nelle Eq.(2.37)-(2.40), infatti, hanno valori alti da cui non possiamo utilizzare il metodo perturbativo per trattare le interazioni tra i nucleoni.

Per poter studiare le implicazioni fisiche del modello che stiamo considerando dobbiamo porci nell'ambito dell'**approssimazione di campo medio**, sostituendo agli operatori quantistici $\sigma(x)$, $\omega(x)$, $\rho(x)$ i corrispondenti valori medi nel vuoto $\langle 0 | \sigma(x) | 0 \rangle$, $\langle 0 | \omega^\mu(x) | 0 \rangle$ e $\langle 0 | \vec{\rho}^\mu(x) | 0 \rangle$.

La validità di questa semplificazione deve essere analizzata con attenzione. Affinchè i campi mesonici possano essere trattati come oggetti classici trascurando le fluttuazioni quantistiche, la lunghezze Compton caratteristiche di ogni particella devono essere molto più grandi della distanza media tra i nucleoni r_0 , cioè:

$$\begin{aligned} \lambda_\sigma, \lambda_\omega, \lambda_\rho &\gg r_0 \\ \lambda_\sigma = m_\sigma^{-1}, \lambda_\omega = m_\omega^{-1}, \lambda_\rho = m_\rho^{-1} \end{aligned} \quad (2.44)$$

In questa situazione, all'interno dell'indeterminazione spaziale λ dei mesoni sono contenuti numerosi nucleoni da cui i campi σ , ω e ρ sono sostanzialmente uguali al loro valore di aspettazione nello stato fondamentale. Tuttavia l'inverso delle masse dei campi scalari e vettoriali corrispondono a lunghezze dell'ordine di $\sim 0.25 fm$ e $\sim 0.4 fm$, di molto inferiori al valore tipico $r_0 \sim 1.2 fm$ alla densità di equilibrio della materia nucleare .

L'approssimazione di campo medio é pienamente lecita solo quando la densità barionica n_B tende all'infinito e i termini di sorgente delle equazioni del moto diventano talmente grandi da rendere le fluttuazioni quantistiche dei campi mesonici trascurabili. In che misura la densità centrale delle stelle di neutroni sia tale da giustificare l'uso di questo dipende da molti fattori, il più importante dei quali è la massa della stella stessa. Trattare i campi bosonici come oggetti classici, quindi, fornisce da un lato una soluzione non perturbativa dell'Eq.(2.40) ma dall'altro è accettabile solo sotto certe condizioni che non sono sempre verificate.

L'uso dell'approssimazione di campo medio è all'origine dell'assenza dell'accoppiamento nucleone-pione nella Lagrangiana d'interazione: il campo del pione π , essendo a parità negativa, ha valor medio $\langle 0 | \pi(x) | 0 \rangle = 0$ per l'invarianza dello stato di vuoto sotto inversioni spaziali.

Inoltre, all'equilibrio dinamico, la materia nucleare può essere considerata isotropa e stazionaria, da cui gli osservabili di campo non dipendono dalle coordinate spaziotemporali.

Le equazioni del moto (2.37)-(2.39) sono riscrivibili in termini dei valori medi $\langle \sigma \rangle$, $\langle \omega^\mu \rangle$ e $\langle \vec{\rho}^\mu \rangle$ nel seguente modo:

$$m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle = g_\sigma n_s - \frac{g_\sigma^3}{G_3} \langle \sigma \rangle^2 - \frac{g_\sigma^4}{G_4} \langle \sigma \rangle^3 \quad (2.45)$$

$$m_\omega^2 \langle \omega^0 \rangle = g_\omega \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle = g_\omega n_B = g_\omega (n_p + n_n) \quad (2.46)$$

$$m_\rho^2 \rho^{03} = \frac{1}{2} g_\rho \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau^3 \psi \rangle = \frac{1}{2} g_\rho (n_p - n_n), \quad (2.47)$$

dove le parti che contengono le derivate si annullano per l'uniformità e la staticità della materia β -stabile, i valori medi delle componenti spaziali dei campi $\omega(x)$ e $\rho(x)$ non contribuiscono per l'invarianza dello stato di vuoto sotto rotazione, e l'azione delle matrici di Pauli τ_1 e τ_2 sull'isospinore $\psi(x)$, che non mescola il numero quantico di isospin, danno proiezione sull'aggiunto $\bar{\psi}(x)$ nulla.

Parallelamente, definendo $\langle \sigma \rangle \equiv \sigma$, $\langle \omega^0 \rangle \equiv \omega$ e $\langle \rho^{03} \rangle \equiv \rho$, la dinamica del campo del nucleone diventa:

$$\left[\left(i\gamma^0 \partial_0 - g_\omega \gamma^0 \omega - \frac{1}{2} g_\rho \gamma^0 \tau^3 \rho + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} \right) - (m_N - g_\sigma \sigma) \right] \psi = 0, \quad (2.48)$$

cioè un'equazione lineare risolvibile in maniera esatta.

Dalla definizione della derivata generalizzata D^μ (Eq.(2.42)) e della massa m^* (Eq.(2.43)), osserviamo che i campi $\sigma(x)$, $\omega(x)$ e $\rho(x)$ intervengono solo nella componente temporale D^0 e nella massa effettiva come quantità scalari sommate alla derivata parziale e alla massa del nucleone m_N .

Di conseguenza, le soluzioni dell'equazione del moto (2.40) sono, allo stesso modo dell'equazione di Dirac libera, onde piane a energia positiva e negativa moltiplicate per un quadrispinore di Dirac w^i per ogni componente di isospin:

$$\psi(x) = w^i(k^\mu) e^{-ik^\mu x_\mu}, \quad (2.49)$$

dove $i = p, n$ è l'indice di isospin e k^μ è il quadrivettore d'onda.

Dobbiamo notare che, poiché l'approssimazione di temperatura nulla è del tutto giustificata per la materia nucleare nel core delle stelle di neutroni (si veda la Sezione 1.1.3), le soluzioni ad energia negativa, che rappresentano gli antineutroni e antiprotoni, non partecipano all'evoluzione del mezzo. Esse, infatti, derivano dalla creazione di coppie particella-antiparticella resa possibile solo attraverso eccitazioni termiche. Andando a sostituire l'espressione (2.49) nell'Eq.(2.40) otteniamo:

$$\left[\gamma^0 \left(k_0 - g_\omega \omega \mp \frac{1}{2} g_\rho \rho \right) + \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - (m_N - g_\sigma \sigma) \right] w^i(k^\mu) e^{-ik^\mu x_\mu} = 0, \quad (2.50)$$

dove il segno meno è relativo ai protoni e il più ai neutroni.

Definendo il quadrivettore $K^{*\mu}$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} K^{*0} &= k^0 - g_\omega \omega \mp \frac{1}{2} g_\rho \rho \\ \vec{K}^* &= \vec{k}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

dall'Eq.(2.50) segue che i $w^i(k^\mu)$ devono soddisfare la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \left(\gamma^\mu K_\mu^* - m^* \right) w^i(k^\mu) e^{-ik^\mu x_\mu} &= 0 \\ \Rightarrow \left(\gamma^\mu K_\mu^* - m^* \right) w^i(k^\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Per essere soluzioni dell'Eq.(2.40), i $w^i(k^\mu)$ devono avere la forma dei quattro quadrispinori di Dirac liberi in cui, al posto del quadrimomento k^μ , compare $K^{\mu*}$. Gli autostati $u_r^i(k^\mu)$ a energia positiva, con $r = 1, 2$ la polarizzazione, sono:

$$u_{1,2}^i(k) = \begin{pmatrix} \chi_{1,2}^i \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{K^{*0} + m^*} \chi_{1,2}^i \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

dove $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli agenti sullo spazio bidimensionale dello spin e χ_r^i i vettori di base a due componenti:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Analogamente al caso in assenza di interazioni, è conveniente riscalarlo u_r di un fattore in modo che la normalizzazione sia:

$$u_r^\dagger u_s = \delta_{rs} \frac{K^{*0}}{m^*}. \quad (2.56)$$

Data l'espressione dei quadrispinori $u_r^i(k)$, il campo $\psi(x)$ del nucleone soluzione dell'Eq.(2.48) e il suo operatore aggiunto $\psi^\dagger(x)$ sono la somma dell'insieme dei modi normali $u_r^i(k)e^{-ik^\mu x_\mu}$ e dei loro aggiunti per tutti i possibili valori di k e di polarizzazione r :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{i,r,k} \sqrt{\frac{m^*}{K^{*0}V}} \left[a_r^i(k) u_r^i(k) e^{-ik^\mu x_\mu} \right] \\ \psi^\dagger(x) &= \sum_{i,r,k} \sqrt{\frac{m^*}{K^{*0}V}} \left[a_r^{\dagger i}(k) u_r^{\dagger i}(k) e^{+ik^\mu x_\mu} \right], \end{aligned} \quad (2.57)$$

dove $a_r^i(k)$ e $a_r^{\dagger i}(k)$ sono rispettivamente gli operatori di distruzione e di creazione di quasi-barioni (spiegheremo successivamente il motivo di quest'espressione) con momento k e massa m^* soddisfacenti le stesse regole di anticommutazione degli operatori in assenza di interazione.

A questo punto, rimanendo all'interno di tutte le approssimazioni fatte finora, andiamo a considerare la densità di Hamiltoniana \mathcal{H} del campo $\psi(x)$ partendo dalla densità di Lagrangiana \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + \dot{\bar{\psi}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} - \mathcal{L} \\ &= i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \mathcal{L} \\ &= i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho^2 + \\ &\quad - i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + g_\omega \bar{\psi} \gamma^0 \omega \psi + \frac{1}{2} g_\rho \bar{\psi} \gamma^0 \tau^3 \rho \psi + m_N \bar{\psi} \psi - g_\sigma \bar{\psi} \sigma \psi + \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{g_\sigma^3}{G_3} \sigma^3 + \frac{1}{4} \frac{g_\sigma^4}{G_4} \sigma^4 \\ &= i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho^2 + \frac{1}{3} \frac{g_\sigma^3}{G_3} \sigma^3 + \frac{1}{4} \frac{g_\sigma^4}{G_4} \sigma^4, \end{aligned} \quad (2.58)$$

con l'ultima derivazione dovuta al fatto che la seconda riga della terza uguaglianza corrisponde proprio all'equazione del moto (2.48) che è nulla per la soluzione $\psi(x)$. Ricordando che i coefficienti σ , ω e ρ sono scalari indipendenti dalla variabile spaziotemporale e che la densità di Hamiltoniana è sempre definita a meno di una costante, l'espressione di \mathcal{H} in termini degli operatori di creazione e distruzione è:

$$\mathcal{H} = \sum_{k,r} k^0 \left(a_{rp}^\dagger(k) a_{rp}(k) + a_{rn}^\dagger(k) a_{rn}(k) \right), \quad (2.59)$$

dove gli indici p e n si riferiscono rispettivamente a protoni e neutroni. Segue che gli autostati di energia della materia nucleare sono, come nel caso in assenza di interazione, autostati simultanei dell'operatore numero $N_{rp,n}(k) = a_{rp,n}^\dagger(k) a_{rp,n}(k)$

i cui autovalori di energia sono la somma degli autovalori k_0 degli stati di singola particella occupati per il relativo numero di occupazione. In conclusione, le soluzioni della dinamica di neutroni e protoni sono stati di quasi-particelle che si muovono indipendenti nei campi mesonici. La definizione di quasi-particella é legata alle seguenti proprietà:

- in virtù del loro accoppiamento con i campi mediatori e in particolare col mesone σ , i quasi-nucleoni hanno una massa effettiva m^* data dalla massa m_N a cui si aggiunge una correzione dovuta all'interazione $-g_\sigma\sigma$;
- Gli autostati di singola particella sono identificati dagli autovalori del quadri-momento k^μ , in cui l'energia k^0 e il momento spaziale \vec{k} obbediscono a una nuova relazione di dispersione:

$$\begin{aligned}
K^{*\mu}K_\mu^* - m^{*2} = 0 &\Rightarrow K^{*0} = |\vec{k}|^2 + m^{*2} \\
&\Rightarrow k^0 = K^{*0} + g_\omega\omega \pm \frac{1}{2}g_\rho\rho \\
&= \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^{*2}} + g_\omega\omega \pm \frac{1}{2}g_\rho\rho \\
&= \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^{*2}} + \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}n_B \pm \frac{1}{4}\frac{g_\rho^2}{m_\rho^2}(n_p - n_n) .
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Alla luce di queste considerazioni, abbiamo tutti gli strumenti necessari per analizzare l'energia totale e le altre caratteristiche globali del sistema in funzione della densità barionica, unico parametro esterno non modificabile dalle interazioni forti e deboli che partecipano nel core di una stella di neutroni.

2.4.2 Spettro di energia e massa effettiva

Pur avendo incluso le forze che si esercitano tra i nucleoni, la materia nucleare del modello $\sigma - \omega - \rho$ è un sistema a molti corpi descrivibile come l'insieme di due gas fermionici le cui proprietà sono date dagli stati di singola particella. Di conseguenza, la statistica che caratterizza questi FG è quella di Fermi-Dirac per cui, a $T = 0$, tutti i livelli energetici con degenerazione di spin-isospin γ sono riempiti fino al momento di Fermi k_F .

Il valore di k_F dipende dalla densità di particelle di ogni specie n_i (protoni o neutroni) secondo l'uguaglianza:

$$n_i = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k = \frac{k_F^3}{3\pi^2} . \tag{2.61}$$

L'energia di Fermi e_F é l'energia di un quasi-nucleone che si trova sulla superficie di Fermi ed é, facendo riferimento alla relazione (2.60):

$$e_F = \sqrt{k_F^2 + m^{*2}} + g_\omega\omega \pm \frac{1}{2}g_\rho\rho . \tag{2.62}$$

Data la densità di Hamiltoniana totale del modello $\sigma - \omega - \rho$, è possibile ricavare la densità di energia $\epsilon(n_B)$ per unità di volume e la pressione $P(n_B)$ calcolando il corrispondente valor medio sullo stato fondamentale in cui si trova il mezzo.

La densità di energia $\epsilon(n_B)$ é legata al valor medio del tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ dalla seguente equazione:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = u_\mu u_\nu (\epsilon + P) - g_{\mu\nu} P, \quad (2.63)$$

con

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.64)$$

e u_μ la quadrivelocità del sistema tale che $u^\mu u_\mu = 1$. Supponendo di metterci nel sistema di riferimento in cui i barioni sono a riposo, otteniamo:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \langle T_{00} \rangle = -\langle \mathcal{L} \rangle + i \langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle = \mathcal{H} \\ P &= \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle = \langle \mathcal{L} \rangle + \frac{i}{3} \langle \bar{\psi} \gamma_i \partial_i \psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Partiamo col determinare esplicitamente la densità ϵ . Nell'approssimazione di campo medio, di materia stazionaria e uniforme, essa si riduce a:

$$\begin{aligned} \epsilon &= i \langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho^2 + \frac{1}{3} \frac{g_\sigma^3}{G_3} \sigma^3 + \frac{1}{4} \frac{g_\sigma^4}{G_4} \sigma^4 \\ &= i \langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle - \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle^2 - \frac{1}{8} \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \langle \bar{\psi} \gamma_0 \tau_3 \psi \rangle^2 + \\ &+ \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{3} \frac{g_\sigma^3}{G_3} \sigma^3 + \frac{1}{4} \frac{g_\sigma^4}{G_4} \sigma^4. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Il termine $\langle \bar{\psi} \psi \rangle = n_s$ che compare nell'equazione del moto del mesone σ , tenendo conto delle proprietà dei FG a temperatura nulla, si semplifica nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= V \sum_r \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{kr} \Theta(e_F - k_0) \\ &= V \sum_r \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m^*}{V K_0^*} \bar{u}_{rp}(k) u_{rp}(k) \Theta(e_F - k_0) \\ &+ V \sum_r \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m^*}{V K_0^*} \bar{u}_{rn}(k) u_{rn}(k) \Theta(e_F - k_0) \\ &= 2 \int_0^{k_{Fp}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m^*}{K_0^*} + 2 \int_0^{k_{Fn}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m^*}{K_0^*} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{Fp}} dk |\vec{k}|^2 \frac{m^*}{K_0^*} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{Fn}} dk |\vec{k}|^2 \frac{m^*}{K_0^*} \\ &= \frac{1}{\pi^2} m^* \left[k_{Fp} K_0^* - m^{*2} \ln \left(\frac{k_{Fp} + K_0^*}{m^*} \right) \right] + \frac{1}{\pi^2} m^* \left[k_{Fn} K_0^* - m^{*2} \ln \left(\frac{k_{Fn} + K_0^*}{m^*} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.67)$$

dove $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{kr}$ rappresenta il valor medio fatto sul modo normale di momento k e polarizzazione r e u_{rp}, u_{rn} sono i quadrispinori dei protoni e dei neutroni. La quantità scalare n_s contiene, in linea del tutto generale, due integrali separati per neutroni e protoni dal momento che i rispettivi momenti di Fermi sono proporzionali alle

relative densità. I termini $\langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle$ e $\langle \bar{\psi} \gamma_0 \tau_3 \psi \rangle$, con un procedimento analogo a quello appena eseguito, sono riscrivibili in:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle &= V \sum_r \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle_{kr} \\ &= \frac{1}{3\pi^2} \left(k_{Fp}^3 + k_{Fn}^3 \right) = n_p + n_n \quad (2.68) \\ \langle \bar{\psi} \gamma_0 \tau_3 \psi \rangle &= n_p - n_n, \end{aligned}$$

con n_p e n_n le densità rispettivamente protoniche e neutroniche. Infine il valore di aspettazione $\langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle$ risulta essere:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle &= V \sum_r \int_0^{k_{Fp}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle \bar{\psi}_p \gamma_0 \partial_0 \psi_p \rangle_{kr} + V \sum_r \int_0^{k_{Fn}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle \bar{\psi}_n \gamma_0 \partial_0 \psi_n \rangle_{kr} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{Fp}} dk k^2 \sqrt{k^2 + m^{*2}} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{Fn}} dk k^2 \sqrt{k^2 + m^{*2}} \\ &+ \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} (n_p + n_n)^2 + \frac{1}{4} \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} (n_p - n_n)^2. \quad (2.69) \end{aligned}$$

Complessivamente, unendo tutti i risultati ottenuti dei vari contributi alla densità di energia totale e ricordando la definizione della massa effettiva (2.43), l'espressione finale dell'equazione di stato $\epsilon(n_p, n_n)$ è:

$$\begin{aligned} \epsilon(n_p, n_n) &= \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m_N - m^*)^2 + \frac{(m_N - m^*)^3}{3G_3} + \frac{(m_N - m^*)^4}{4G_4} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} (n_p - n_n)^2 + \frac{1}{8} \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} (n_p - n_n)^2 \quad (2.70) \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{Fp}} dk k^2 \sqrt{k^2 + m^{*2}} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{Fn}} dk k^2 \sqrt{k^2 + m^{*2}}. \end{aligned}$$

Gli addendi della prima riga derivano dalla dinamica dei campi mesonici mentre gli integrali finali contengono l'informazione sulla cinematica dei gas relativistici di barioni con masse effettive m^* .

Prima di concludere questa Sezione, dobbiamo notare che le due equazioni (2.67) e (2.43) che determinano la massa effettiva non possono essere disaccoppiate. La combinazione di queste due uguaglianze, infatti, fornisce la seguente condizione autoconsistente:

$$\begin{aligned} m^* &= m_N + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{(m_N - m^*)^2}{G_3} + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{(m_N - m^*)^3}{G_4} + \\ &- \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left\{ \frac{1}{\pi^2} m^* \left[k_{Fp} K_0^* - m^{*2} \ln \left(\frac{k_{Fp} + K_0^*}{m^*} \right) \right] + \right. \quad (2.71) \\ &\left. + \frac{1}{\pi^2} m^* \left[k_{Fn} K_0^* - m^{*2} \ln \left(\frac{k_{Fn} + K_0^*}{m^*} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

La massa effettiva, di conseguenza, può essere calcolata solo numericamente attraverso un procedimento iterativo.

L'analisi del set di autovalori nel modello $\sigma - \omega - \rho$ mostra, come nel caso della teoria a molti corpi non relativistica, che la massa effettiva è una proprietà del sistema globale che tiene traccia dei meccanismi di interazione tra nucleoni caratterizzati, in questo caso, dallo scambio di particelle mesoniche.

Come vedremo nel prossimo Capitolo, i valori di m^* , indipendentemente dalle approssimazioni usate per descrivere le forze reciproche tra i nucleoni, intervengono nel calcolo della sezione d'urto dei neutrini che, una volta creati nel core, fuggono dalla stella attraversandone la materia.

Capitolo 3

Produzione e interazioni dei neutrini nelle stelle di neutroni

Lo studio dell'evoluzione, della composizione e delle interazioni all'interno di una stella di neutroni è un problema fisico su cui è, ancora oggi, posta grande attenzione nel panorama sia dell'astrofisica sia della fisica delle particelle.

Tra le scarse informazioni sperimentali disponibili sulle stelle di neutroni, hanno un ruolo importante le misure che permettono di risalire all'evoluzione termica, cioè al raffreddamento, della stella. Questo processo è dovuto al fatto che i neutrini prodotti all'interno della stella non interagiscono in modo significativo con la materia circostante, e quindi sono liberi di allontanarsene. Prima di discutere l'interazione dei neutrini con la materia stellare, analizziamo i meccanismi grazie ai quali queste particelle vengono prodotte.

3.1 La produzione di neutrini nel core

I neutrini sono generati da numerose reazioni all'interno del core di una stella di neutroni. Ad ognuno di questi processi è associata una data emissività Q , corrispondente all'energia trasportata dai neutrini per secondo e per unità di volume. In generale, l'emissività dipende dalla temperatura e dalla densità della stella e da un parametro k caratteristico del meccanismo di produzione [13]:

$$Q(T, \rho) = Q_0(\rho)T^k / (10^9 K), \quad (3.1)$$

dove $Q_0(\rho)$ è una funzione che descrive la dipendenza dalla densità ρ .

Gran parte delle emissioni di neutrini è generata dai processi detti *Urca* diretti e inversi, cioè i decadimenti del neutrone e le catture leptoniche descritte dalle equazioni (1.10) e (1.11).

Va sottolineato che la produzione di neutrini da queste reazioni nella materia $npe^- \mu$ all'equilibrio β è realizzabile solo se la temperatura della stella è $T \neq 0$. Per comprendere questa condizione supponiamo $T = 0$. Se ipotizziamo che i costituenti del core siano trattabili separatamente come dei gas di Fermi fortemente degeneri, ognuno di essi è caratterizzato da un potenziale chimico $\mu_i = E_{F_i}$ con $i = n, p, e^-$, μ e E_{F_i} la corrispondente energia di Fermi. Le particelle di ogni specie si dispongono secondo la distribuzione di Fermi-Dirac occupando tutti i livelli energetici al di sotto

di E_{Fi} . Prendendo ad esempio il decadimento β (Eq.(1.10)), il neutrone iniziale ha un'energia $E_n \leq E_{Fn} \equiv \mu_N$; gli elettroni e i protoni uscenti, invece, devono essere prodotti con energie finali $E_e, E_p \geq E_{Fe}, E_{Fp} \equiv \mu_e, \mu_p$ in modo da occupare gli stati liberi al di fuori della sfera di Fermi e non violare il principio di esclusione di Pauli. Poichè la condizione di equilibrio β implica l'equivalenza $\mu_n - \mu_p - \mu_e = 0$, la legge di conservazione dell'energia nel decadimento $E_{in} = E_n = E_{fin} = E_e + E_p + E_\nu$ non può essere soddisfatta nella materia β stabile a $T = 0$. In questa circostanza, infatti, vale:

$$E_n \leq E_{Fn} = E_{Fp} + E_{Fe} < E_{Fp} + E_{Fe} + E_\nu \leq E_p + E_e + E_\nu \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow E_{in} \neq E_{fin} . \quad (3.3)$$

Neutrini ed antineutrini, quindi, vengono generati solo per valori finiti della temperatura $T \neq 0$: in tal caso, le superfici di Fermi si diffondono e gli stati con energia in un intervallo $k_B T$ intorno al potenziale chimico μ sono solo parzialmente occupati. I neutroni, grazie all'energia termica, possono essere eccitati a livelli superiori a μ_n , acquisendo l'energia sufficiente per il decadimento all'equilibrio dinamico. Le energie tipiche dei neutrini emessi saranno dell'ordine $E_\nu \sim k_B T$ [22].

In virtù di queste considerazioni, le reazioni (1.10) e (1.11) hanno una soglia di densità che le rende possibili solo alle alte densità del core.

Poichè le uniche particelle coinvolte in queste interazioni sono quelle negli stati vicini alle superfici di Fermi, i moduli dei momenti P_i di ogni specie differiscono dai relativi momenti di Fermi P_{Fi} di $k_B T$. Sotto le tipiche condizioni delle stelle di neutroni, $k_B T \ll P_i$ e possiamo approssimare $P_i \sim P_{Fi}$ a meno di piccole correzioni di ordine $k_B T$.

Trascurando i momenti $P_{\nu, \bar{\nu}}$ dei neutrini e degli antineutrini, la conservazione dell'impulso totale è soddisfatta solo se è valida la seguente disuguaglianza triangolare:

$$\vec{P}_n = \vec{P}_p + \vec{P}_{e,\mu} \Rightarrow P_{Fn} \leq P_{Fp} + P_{Fe,\mu} . \quad (3.4)$$

Questa condizione si verifica, all'equilibrio dinamico, solo per una frazione di protoni $x_p = n_p/n_B > x_D$ con $x_D = 1/9$ e $x_D \sim 0.14$ rispettivamente in assenza e in presenza di muoni [13]. Questi valori della densità protonica sono raggiunti solo alle densità barioniche n_B del core della stella, l'unica regione in cui i processi di decadimento β e di cattura leptonica sono permessi. L'emissività delle reazioni di Urca dirette e inverse dipende dalla temperatura secondo la potenza $k = 6$ ed è stimata intorno a $Q \sim 10^{26} - 10^{27}$.

Oltre a questi meccanismi di produzione, il flusso di neutrini è accresciuto anche dai processi Urca modificati (Eq.(3.5) e Eq.(3.6)) e di Bremsstrahlung nucleone-nucleone (Eq.(3.7)) [13][23]:

$$n + N \rightarrow p + N + l + \bar{\nu}_l \quad (3.5)$$

$$p + N + l \rightarrow n + N + \nu_l \quad (3.6)$$

$$N + N \rightarrow N + N + \nu + \bar{\nu} , \quad (3.7)$$

dove N indica un nucleone e $l = e^-, \mu$. Le reazioni (3.5) e (3.6), a cui sono associate creazioni di elettroni e muoni, differiscono dalle Eq.(1.10) e Eq.(1.11) per un nucleone spettatore necessario per la conservazione del quadrimpulso totale quando x_p non

soddisfa la condizione di soglia del processo Urca diretto. I processi (3.7) generano coppie di neutrini e antineutrini di tutti i sapori e avvengono in tre possibili canali, $p - p$, $n - p$, $n - n$. Le reazioni (3.5), (3.6) e (3.7), non essendo a soglia, possono avvenire in qualunque regione della stella di neutroni e sono responsabili della diffusione di neutrini a densità in cui le interazioni (1.10) e (1.11) non sono permesse. L'emissività Q è caratterizzata dal parametro $k = 8$ ed assume valori $Q \sim 10^{20}$, cioè ben sette ordini di grandezza inferiore ai processi a soglia [13].

Poichè le reazioni di Urca modificate e di Bremsstrahlung sono nettamente più deboli dei decadimenti di Urca diretti e inversi e il core esterno ha densità $\rho \geq \rho_{crit} = 1.3 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ tali da rendere energeticamente possibili i processi a soglia, la produzione di neutrini nella materia $npe^- \mu$ è dominata dalle interazioni (1.10) e (1.11) e le rimanenti sono completamente trascurabili.

Indipendentemente dai meccanismi che lo generano, il flusso di neutrini costituisce una delle più importanti fonti di informazioni su una stella di neutroni: il trasporto di energia attraverso queste particelle, infatti, ha un ruolo centrale nell'evoluzione della stella e nella determinazione di numerose proprietà globali della materia di cui è composta.

3.2 I neutrini e l'evoluzione termica

Prodotti nel core dalle reazioni (1.10) e (1.11), i neutrini si diffondono all'esterno attraverso processi di assorbimento e scattering multipli, sottraendo energia e momento alla materia nucleare. Poichè interagiscono debolmente, i neutrini trasportano l'energia liberata dalla stella in maniera più efficiente della radiazione elettromagnetica e degli elettroni.

Per circa $10^5 - 10^6$ anni, la temperatura delle stelle di neutroni diminuisce e si verifica il meccanismo di **raffreddamento termico**. L'emissione di neutrini è la causa primaria di questo fenomeno. Data la alta densità del core, nelle fasi immediatamente successive alla sua nascita (circa un minuto dall'esplosione della supernova [13]), la stella di neutroni è opaca al passaggio di neutrini. Con il passare del tempo, la materia nucleare diventa trasparente al flusso neutrino che, liberato all'esterno, costituisce la maggiore fonte di raffreddamento termico della stella. L'analisi dello scenario dei possibili processi di interazione tra i neutrini e il fluido $npe^- \mu$ è, quindi, fondamentale per lo studio dell'evoluzione temporale della temperatura stellare.

Il trasporto neutrino dal core dipende da numerosi fattori: la temperatura, la composizione, la densità e in generale l'equazione di stato della stella [24]. Per questo motivo, lo studio dell'emissione dei neutrini è uno strumento importante per determinare aspetti qualitativi e quantitativi di una stella di neutroni, confermando o rigettando i diversi modelli teorici proposti per descrivere la materia nucleare al suo interno. Confrontando con le osservazioni sperimentali le varie curve di raffreddamento ottenute da simulazioni numeriche in più fasi evolutive e in corrispondenza di diversi parametri fisici della stella, è possibile ricostruire le proprietà intrinseche della materia nucleare da cui il raffreddamento stesso è influenzato (si veda la Fig. 3.1). Data l'elevata emissività delle reazioni di decadimento β e di cattura elettronica e muonica (Eq.(1.10) e Eq.(1.11)), il meccanismo più efficiente e

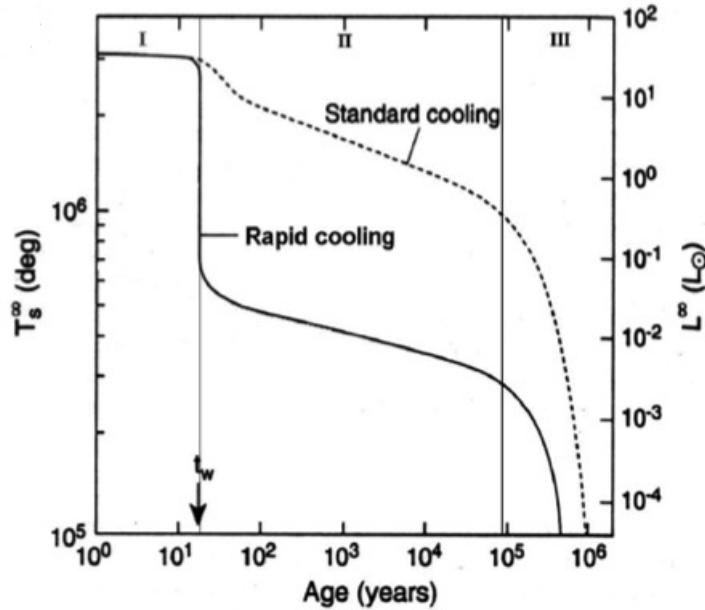


Figura 3.1. Evoluzione termica della superficie di una stella in funzione del tempo per due tipi di raffreddamento: lo *standard cooling* (linea tratteggiata), piú lento e tipico delle stelle meno massive, che ha origine principalmente dai processi nell'outer core; il *rapid cooling* (linea continua), associato a stelle di grande massa e influenzato anche dalla composizione esotica dell'inner core [12].

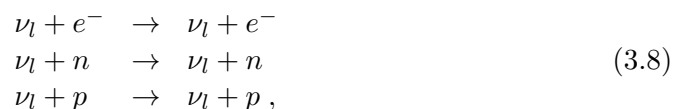
rapido di raffreddamento è dato dai neutrini generati in questi processi, che sono possibili solo a densità barioniche n_B sufficientemente alte.

Nel confronto tra i calcoli teorici e le osservazioni sperimentali relative alla liberazione di energia termica da una stella, uno degli ingredienti di maggiore rilevanza nelle interazioni di queste particelle con la materia del core esterno è il **cammino libero medio** λ , elemento fondamentale per le simulazioni numeriche.

Lo scopo del prossimo Paragrafo sarà quello di sviluppare il formalismo teorico generale per il calcolo della sezione d'urto degli scattering con le particelle del mezzo e, dalla quale è possibile determinare il cammino libero medio.

3.3 Interazioni di corrente neutra

Una volta prodotti, i neutrini e gli antineutrini interagiscono debolmente con i nucleoni e i leptoni del core esterno. Fanno parte dei processi d'interazione gli scattering elastici a corrente neutra:



in cui, in generale, $\nu_l = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$. Medesime reazioni coinvolgono gli antineutrini e sono ottenibili dalle (3.8) sostituendo $\nu \rightarrow \bar{\nu}$. Oltre a queste interazioni, possono

verificarsi anche i processi di assorbimento a corrente carica:

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_e + p &\rightarrow e^+ + n \\ \nu_e + n &\rightarrow e^- + p.\end{aligned}\quad (3.9)$$

A densità $\rho \sim 2\rho_0$, in cui è energeticamente permessa la produzione di muoni, sono presenti anche le seguenti reazioni:

$$\nu_l + \mu^- \rightarrow \nu_l + \mu^- . \quad (3.10)$$

Al primo ordine della teoria delle perturbazioni, i processi (3.8) e (3.10) sono descritti dal diagramma di Feynman in Fig. 3.2

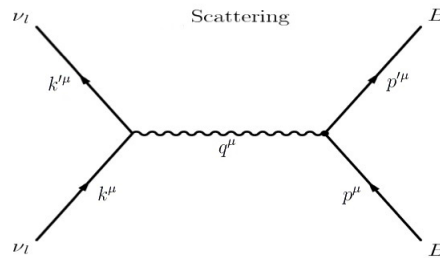


Figura 3.2. Diagramma di Feynman all'ordine perturbativo piú basso dei processi di scattering a corrente neutra. Il simbolo $B = e^-, n, p, \mu$ a seconda che nella reazione intervengano elettroni, neutroni, protoni o muoni. p^μ e p'^μ sono rispettivamente i quadrimomenti iniziali e finali delle particelle leptoniche o barioniche, k^μ e k'^μ i quadrimomenti dei neutrini in entrata e in uscita e q il quadrimomento trasferito.

Poichè la carica elettrica dello stato iniziale e finale è la stessa in entrambi le correnti in interazione, i processi a corrente neutra possono avvenire solo attraverso l'emissione di un bosone neutro Z_0 . Gli eventi (3.9), invece, sono dati dallo scambio di un bosone W^\pm tra correnti cariche e presentano un isospin-flip tra le particelle iniziali e finali (si veda il diagramma in Fig. 3.3).

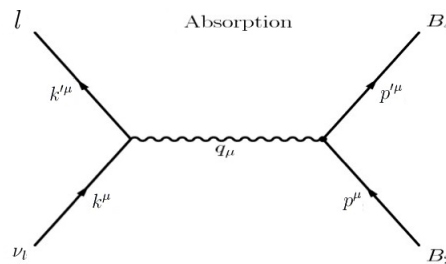


Figura 3.3. Diagramma di Feynman all'ordine perturbativo piú basso dei processi di scattering a corrente carica. I simboli $B_i = e^-, n, p$ a seconda che nella reazione intervengano elettroni, neutroni o protoni. k^μ e k'^μ sono i quadrimomenti delle particelle leptoniche e P^μ e P'^μ i quadrimomenti delle particelle barioniche. q il quadrimomento trasferito.

I neutrini ν_τ e ν_μ sono termicamente prodotti con energie $\sim k_B T \ll m_\mu, m_\tau$, in cui $T \sim 3 \times 10^8 K$, e non possono partecipare ai processi con corrente carica. Al

contrario, le reazioni date dalla mediazione del bosone neutro sono comuni a tutti i sapori dei neutrini [25]; tra queste, dati gli alti valori di densità ρ necessari per la comparsa della componente muonica nel core, gli scattering (3.10) sono soppressi rispetto ai processi dominanti (3.8).

Nel seguito porremo l'attenzione esclusivamente sulle interazioni a corrente neutra tra neutrini e nucleoni ed elettroni del core, trascurando gli eventi in cui partecipano i muoni, e ne calcoleremo in maniera esplicita la sezione d'urto differenziale, a energia del neutrino incidente fissata, in funzione dell'energia e dell'angolo di diffusione del neutrino nello stato finale. Tutta la derivazione sarà svolta all'interno di due principali approssimazioni:

- L'effetto delle interazioni forti tra le particelle del mezzo viene schematizzato sostituendo alla massa *nuda* dei nucleoni, la massa effettiva ricavata dai modelli dinamici discussi nel Capitolo precedente. In questo modo, la sezione d'urto dei processi (3.8) in presenza di interazione è ricavabile dall'espressione calcolata nell'approssimazione di particelle libere, semplicemente sostituendo le masse di protoni e neutroni con le rispettive masse effettive m_p^* e m_n^* .
- Le proprietà di equilibrio della materia, che sono proprietà globali del sistema determinate da tutte le particelle che occupano gli stati all'interno del mare di Fermi, sono ottenute nel limite di temperatura nulla. Questa approssimazione è giustificata per le temperature tipiche delle stelle di neutroni ($\sim 10^9$ K ~ 100 KeV), che risultano molto minori delle energie tipiche dei nucleoni (~ 10 MeV). Al contrario, i processi di emissione e diffusione di neutrini coinvolgono solo le particelle di energia prossima all'energia di Fermi (si veda la Fig. 3.4). Di conseguenza, si possono verificare solo a temperatura finita e dipendono in modo apprezzabile dalla temperatura.

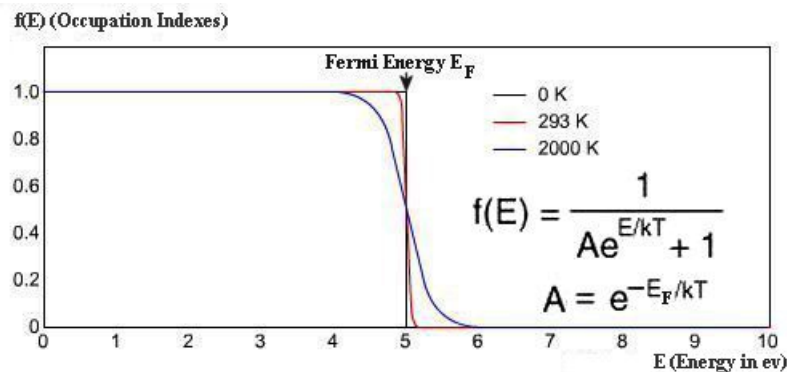


Figura 3.4. Distribuzione di Fermi Dirac per differenti temperature.

Gli stati che descrivono i sistemi a molti corpi di elettroni, neutroni e protoni sono dati dalla configurazione di minima energia, in cui tutti gli autostati di singola particella al di sotto dell'energia di Fermi e_F sono occupati e quelli al di sopra sono liberi. Anche in questo caso, le funzioni d'onda dei gas fermionici a temperatura nulla differiscono poco dalle corrispondenti a temperatura finita,

poichè solo la frazione di stati nell'intorno del momento di Fermi di larghezza kT variano la loro distribuzione a $T \neq 0$ e diventano parzialmente occupati (si veda la Fig. 3.4).

Il primo passo per il calcolo della sezione d'urto è quello di introdurre la Lagrangiana che descrive l'interazione ed analizzare gli stati iniziale e finale del processo d'interesse. Le reazioni (3.8) sono rappresentate da una densità di Lagrangiana effettiva \acute{a} la Fermi con vertice d'interazione corrente-corrente:

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{H}_{int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} l_\mu J^{F\mu}, \quad (3.11)$$

con (per semplificare la notazione omettiamo la dipendenza dalla variabile spaziotemporale):

$$\begin{aligned} J^{F\mu} &= \sum_i j_i^\mu = N j^\mu \\ l_\mu &= \bar{\psi}_\nu \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu \\ j^\mu &= \bar{\psi}_{e,p,n} \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_{e,p,n}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove G_F é la costante di Fermi. La corrente leptonica del neutrino l_μ si accoppia con la corrente a N corpi (N elettroni, protoni o neutroni) del gas di Fermi $J^{F\mu}$. Nell'ipotesi che le forze reciproche tra le particelle del gas siano trascurabili e che il neutrino interagisca con una sola particella del sistema alla volta, $J^{F\mu}$ è data dalla somma delle correnti di singola particella j_i^μ . Queste ultime, riferendosi a particelle indistinguibili, sono tutte identicamente uguali alla corrente j^μ . A seconda che si tratti di e^- , p o n , j^μ contiene al suo interno diversi valori dei coefficienti c_V, c_A . Naturalmente assumiamo che i neutrini creati abbiano massa nulla. Nella corrente adronica sono stati omessi i fattori di forma $F_1(q^2), F_2(q^2)$ relativi alla parte vettoriale della corrente che tengono conto della struttura interna dei nucleoni; nelle situazioni astrofisiche di interesse, infatti, il fattore di Dirac $F_1(q^2)$ è vicino all'unità e il fattore di Pauli $F_2(q^2)$, essendo proporzionale al rapporto tra il quadrimomento trasferito e le masse dei nucleoni, è trascurabile [26].

I valori numerici della costante di accoppiamento debole G_F e dei coefficienti c_V e c_A sono elencati nella Tabella 3.1. Nei termini $c_V^{(e)}$ e $c_A^{(e)}$ corrispondenti alla

Tabella 3.1. Costanti di accoppiamento c_V e c_A in funzione dell'angolo di Weinberg Θ_W e della costante di accoppiamento assiale del nucleone $g_A = 1.23$.

	e^-	p	n
c_V	$2 \sin^2 \Theta_W \pm \frac{1}{2}$	$-2 \sin^2 \Theta_W + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
c_A	$\pm \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} g_A$	$-\frac{1}{2} g_A$

componente elettronica della materia il segno + si riferisce ai neutrini ν_e mentre il - è per neutrini τ e μ . Questa differenza di segni è dovuta al fatto che alla sezione d'urto dello scattering dei neutrini elettronici non contribuiscono solo i processi a corrente neutra ma anche le reazioni a corrente carica (3.9). Attraverso una trasformazione di Fierz, infatti, la Lagrangiana di interazione degli eventi (3.9) può

essere riscritta in una forma analoga all'interazione tra correnti neutre. Nei fattori $c_V^{(e)}$ e $c_A^{(e)}$ relativi ai neutrini elettronici il segno + tiene traccia dello scambio del bosone neutro e dei bosoni carichi mentre per i neutrini degli altri sapori partecipa solo lo scattering a corrente neutra.

Data la densità di Lagrangiana analizziamo gli stati iniziali e finali che partecipano all'interazione. I neutrini entranti $|k\rangle$ e uscenti $|k'\rangle$ hanno rispettivamente quadrimpulso $k^\mu = (k_0, \vec{k})$ e $k'^\mu = (k'_0, \vec{k}')$. Questi vettori sono legati al quadrimomento q^μ del mediatore dalla legge di conservazione di energia e impulso:

$$q^\mu = k^\mu - k'^\mu . \quad (3.13)$$

Nonostante i neutrini esistano solo nello stato a elicità negativa, supponiamo che le polarizzazioni iniziali e finali s, s' non siano fissate e possano assumere entrambi i valori. Il fattore $1 - \gamma^5$ nella Lagrangiana assicura, infatti, che i neutrini destrogiri non contribuiscano alla sezione d'urto.

I ν interagiscono col mezzo costituito da elettroni, protoni e neutroni. Se trattiamo l'insieme delle particelle di ogni specie come un gas di Fermi libero, lo stato iniziale $|0\rangle$ che descrive una data componente della materia è costituito da tutti gli stati di singola particella con impulso all'interno della sfera di Fermi di raggio k_F . Questo stato è identificato da un quadrimpulso iniziale totale $P^\mu = (M, 0)$, dove l'impulso spaziale è nullo perchè somma di tutti i trimpulsi appartenenti alla sfera e M è la massa invariante del sistema. Anche la polarizzazione totale R è nulla. Dopo lo scattering, il gas di Fermi ha assorbito l'impulso \vec{q} trasferito dal neutrino. Attraverso questo processo, una particella del mare di Fermi con momento \vec{h} viene estratta lasciando una buca al suo posto e viene portata ad un livello energetico sopra e_F con momento $\vec{p} = \vec{h} + \vec{q}$. Sottolineiamo che lo stato finale del nucleone o del leptone scatterato deve essere esterno alla sfera di Fermi poichè, per il principio di esclusione di Pauli, tutti gli stati con energia inferiore a e_F sono occupati. Essendo $J^{F\mu}$ somma di operatori di singola particella e considerando trascurabili le forze interne al gas, l'interazione dei neutrini con il mezzo corrisponde a un'eccitazione del sistema a molti corpi, che passa dallo stato fondamentale di minima energia $|0\rangle$ ad uno stato $|F\rangle$ in cui è stata creata una coppia particella-buca. Se ridefiniamo $|0\rangle$ come lo stato di vuoto, lo stato finale $|F\rangle$ si riduce a uno stato a due corpi, una particella e una buca con quadrimpulso p^μ e $-h^\mu$ rispettivamente. In totale $|F\rangle$ è individuato dal vettore energia-impulso $P'^\mu = (P'^0, \vec{q})$, con $P'^0 = M + q^0$ e $\vec{q} = \vec{p} - \vec{h}$, e dalla polarizzazione R' .

Poichè gli stati $|0\rangle$ e $|F\rangle$ hanno lo stesso numero N di componenti, le relative funzioni d'onda $\Psi_0(x)$ e $\Psi_F(x)$ possono essere espresse in termini delle funzioni d'onda di singola particella. Protoni, elettroni e neutroni sono fermioni da cui $\Psi_0(x)$ è determinata dal seguente determinante di Slater:

$$\Psi_0(X) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(1) & \cdots & \phi_N(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(N) & \cdots & \phi_N(N) \end{vmatrix} , \quad (3.14)$$

in cui $\phi_m(n)$ è la funzione d'onda della n -esima particella che si trova nell'autostato di energia m , dove m è comprensivo anche del numero quantico di spin.

La prima delle uguaglianze (3.12) suggerisce di riscrivere $\Psi_0(x)$ isolando la funzione di singola particella:

$$\Psi_0(X) = \frac{\sqrt{(N-1)!}}{\sqrt{N!}} \sum_i \phi_i(1) \Phi_{j \neq i}(2, \dots, N), \quad (3.15)$$

dove $\phi_i(1)$ rappresenta la particella 1 nell' i -esimo livello energetico e $\Phi_{j \neq i}(2, \dots, N)$ descrive il sistema delle restanti $N-1$ particelle che occupano gli autostati $j \neq i$. Il fattore $\sqrt{(N-1)!}$ fa sì che due funzioni Φ_α e Φ_β con l'insieme dei numeri di occupazione identificati rispettivamente dagli indici α e β soddisfino la seguente condizione di ortonormalità:

$$\langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.16)$$

Per quanto riguarda lo stato $|F\rangle$, esso è costituito da $N-1$ particelle nel mare di Fermi, una buca con momento $|h| < k_F$ e una particella con momento $|p| > k_F$. Utilizzando lo stesso formalismo dell'Eq.(3.15), otteniamo:

$$\Psi_F(X) = \frac{\sqrt{(N-1)!}}{\sqrt{N!}} \left(\sum_{l \neq h} \phi_l(1) \Phi_{p, m \neq l, h}(2, \dots, N) + \phi_p(1) \Phi_{m \neq h}(2, \dots, N) \right). \quad (3.17)$$

Una volta chiarita la natura della Lagrangiana e degli stati che partecipano al processo di scattering possiamo iniziare a sviluppare esplicitamente la sezione d'urto differenziale. Essa è ricavabile dalla seconda regola d'oro di Fermi:

$$d\sigma(k_0) = \frac{W}{\phi} Ph. \quad (3.18)$$

Il termine ϕ è la densità di flusso dei neutrini entranti per unità di superficie. Poiché siamo interessati a una sezione d'urto inclusiva in cui gli unici osservabili misurati sono l'energia dei neutrini iniziali e il momento \vec{k}' del neutrino finale, Ph comprende lo spazio delle fasi totale del gas di Fermi uscente, cioè la densità degli stati con impulso P' qualsiasi. Data l'impossibilità di misurare l'impulso di una particella con precisione infinita, Ph tiene anche conto del fatto che il momento del neutrino diffuso è misurato in un intervallo d^3k' intorno al valore k' . Ricordiamo che nel sistema di riferimento del laboratorio l'impulso totale P prima dello scattering è nullo.

W rappresenta la probabilità per unità di tempo che il sistema neutrino-gas passi dallo stato iniziale $|i\rangle$ allo stato finale $\langle f|$. Definendo T come l'intervallo di tempo in cui si svolge l'interazione, W è data da:

$$W = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{T}, \quad (3.19)$$

dove, al primo ordine della teoria delle perturbazioni:

$$\langle f|S|i\rangle = -i \int d^4x \langle f| \mathcal{H}_{int}(x) |i\rangle. \quad (3.20)$$

Nell'espressione (3.19), $\overline{|\langle f|S|i\rangle|^2}$ costituisce il quadrato dell'elemento di matrice del processo sommato sulle polarizzazioni iniziali e finali del neutrino e sui numeri quantici interni del gas di Fermi dopo lo scattering. Esplicitamente:

$$\overline{|\langle f|S|i\rangle|^2} = \sum_{s,s',F} |\langle F, k', s' | S | k, s, 0 \rangle|^2 . \quad (3.21)$$

L'elemento di matrice è riscrivibile nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= -i \int d^4x \langle f | \mathcal{H}_{int}(x) | i \rangle \\ &= -i \int d^4x \frac{G}{\sqrt{2}} \langle f | l_\mu(x) J^{F\mu}(x) | i \rangle \\ &= -i \int d^4x \frac{G}{\sqrt{2}} \langle k', s' | l_\mu(x) | k, s \rangle \langle F | J^{F\mu}(x) | 0 \rangle \\ &= -i \int d^4x \frac{G}{\sqrt{2}} \langle k', s' | e^{iP \cdot x} l_\mu(0) e^{-iP \cdot x} | k, s \rangle \langle F | e^{iP \cdot x} J^{F\mu}(0) e^{-iP \cdot x} | 0 \rangle \\ &= -i \int d^4x \frac{G}{\sqrt{2}} e^{i(P'+k') \cdot x} e^{-i(P+k) \cdot x} \langle k', s' | l_\mu(0) | k, s \rangle \langle F | J^{F\mu}(0) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nell'ultima uguaglianza si è sfruttata l'invarianza della teoria sotto le trasformazioni spazio-temporali generate dall'operatore quadrimpulso P^μ e il fatto che gli stati iniziali e finali sono autostati di energia e momento con autovalori $k^\mu, k'^\mu, P^\mu, P'^\mu$. Ricordando l'espressione della trasformata di Fourier della distribuzione $\delta^{(4)}(x)$ di Dirac, svolgiamo l'integrazione in d^4x ricavando:

$$\langle f|S|i\rangle = -i\delta^{(4)}(k + P - k' - P') \frac{G}{\sqrt{2}} \langle k', s' | l_\mu(0) | k, s \rangle \langle F | J^{F\mu}(0) | 0 \rangle . \quad (3.23)$$

La presenza della δ assicura la conservazione dell'energia e del momento totale nel processo. Se rinominiamo i contributi all'elemento di matrice in questo modo:

$$\begin{aligned} L_\mu &= \langle k', s' | l_\mu(0) | k, s \rangle \\ H^\mu &= \langle F | J^{F\mu}(0) | 0 \rangle , \end{aligned} \quad (3.24)$$

l'Eq.(3.23) diventa:

$$\langle f|S|i\rangle = -i\delta^{(4)}(k + P - k' - P') \frac{G}{\sqrt{2}} L_\mu H^\mu . \quad (3.25)$$

Complessivamente, la probabilità totale che la transizione avvenga è data da:

$$\begin{aligned} \overline{|\langle f|S|i\rangle|^2} &= \\ &= \sum_{s,s',F} \frac{G^2}{2} (2\pi)^4 VT \delta^{(4)}(k + P - k' - P') H^\mu L_\mu H^{*\nu} L_\nu^* , \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove $H^{*\nu}$ e L_ν^* sono i vettori aggiunti rispettivamente di H^μ e L_μ .

Il primo termine che dobbiamo calcolare nell'Eq.(3.26) è il tensore leptónico $L_\mu L_\nu^* = L_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \langle k', s' | l_\mu(0) | k, s \rangle \langle k', s' | l_\nu(0) | k, s \rangle^* \\ &= \langle k', s' | \bar{\psi}_\nu(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(0) | k, s \rangle \left(\langle k', s' | \bar{\psi}_\nu(0) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(0) | k, s \rangle \right)^* . \end{aligned} \quad (3.27)$$

I quadrispinori dei neutrini $\psi_\nu(0)$ e $\bar{\psi}_\nu(0)$ sono combinazione di tutti gli operatori di creazione a_{th}^+ , b_{th}^+ e distruzione a_{th} , b_{th} relativi ai modi con triimpulso \vec{t} e polarizzazione h :

$$\begin{aligned} \psi_\nu(0) &= \sum_{t,h} \frac{1}{\sqrt{2t_0V}} \left(a_{th} u_{th} + b_{th}^+ v_{th} \right) \\ \bar{\psi}_\nu(0) &= \sum_{t,h} \frac{1}{\sqrt{2t_0V}} \left(a_{th}^+ \bar{u}_{th} + b_{th} \bar{v}_{th} \right) , \end{aligned} \quad (3.28)$$

dove $t_0 = |\vec{t}|$ e abbiamo usato la normalizzazione covariante. Poichè il neutrino iniziale ha polarizzazione s e quello finale s' , a L_μ contribuiscono solo gli operatori $a_{k's'}^+$ che creano un neutrino con momento k' e polarizzazione s' e gli operatori a_{ks} che distruggono un neutrino con momento k e polarizzazione s . Di conseguenza, il quadrivettore leptónico L_μ si riduce a:

$$L_\mu = \frac{1}{2V\sqrt{k_0k'_0}} \bar{u}_\nu(k', s') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_\nu(k, s) . \quad (3.29)$$

L'operatore aggiunto L_ν^* è derivabile attraverso le proprietà delle matrici γ_ν e γ_5 . Sfruttando la regola di anticommutazione $\{\gamma_\nu, \gamma_5\} = 0$, otteniamo:

$$L_\nu^* = \frac{1}{2V\sqrt{k_0k'_0}} \bar{u}_\nu(k, s) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_\nu(k', s') . \quad (3.30)$$

Date le Eq.(3.29) e Eq.(3.30), il tensore $L_{\mu\nu}$ diventa:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \\ &= \frac{1}{4V^2 k_0 k'_0} \left(\bar{u}_\nu(k', s') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_\nu(k, s) \bar{u}_\nu(k, s) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_\nu(k', s') \right) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

La somma sulle polarizzazioni iniziali e finali s, s' è, infine:

$$\begin{aligned}
\sum_{s,s'} L_{\mu\nu} &= \sum_{s,s'} \frac{1}{4V^2 k_0 k'_0} \times \\
&\quad \times \left(\bar{u}_{\nu\alpha}(k', s') [\gamma_\mu(1 - \gamma_5)]_{\alpha\beta} u_{\nu\beta}(k, s) \bar{u}_{\nu\rho}(k, s) [\gamma_\nu(1 - \gamma_5)]_{\rho\sigma} u_{\nu\sigma}(k', s') \right) \\
&= \frac{1}{4V^2 k_0 k'_0} \left([\gamma_\mu(1 - \gamma_5)]_{\alpha\beta} \not{k}_{\beta\rho} [\gamma_\nu(1 - \gamma_5)]_{\rho\sigma} \not{k}'_{\sigma\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{4V^2 k_0 k'_0} \text{Tr} \left[\gamma_\mu(1 - \gamma_5) \not{k} \gamma_\nu(1 - \gamma_5) \not{k}' \right] \\
&= \frac{1}{4V^2 k_0 k'_0} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \not{k} (1 + \gamma_5)^2 \gamma_\nu \not{k}' \right] \\
&= \frac{1}{4V^2 k_0 k'_0} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \not{k} 2(1 + \gamma_5) \gamma_\nu \not{k}' \right] \\
&= \frac{2}{4V^2 k_0 k'_0} \left(\text{Tr}[\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k}'] + \text{Tr}[\gamma_\mu \not{k} \gamma_5 \gamma_\nu \not{k}'] \right) \\
&= \frac{2}{4V^2 k_0 k'_0} \left[k^\alpha k'^\beta (4g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + 4g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - 4g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) + k^\rho k'^\sigma (-4i\epsilon_{\nu\sigma\mu\rho}) \right], \tag{3.32}
\end{aligned}$$

dove la derivazione delle equazioni (3.32) è determinata utilizzando la proprietà $\gamma_5^2 = 1$ e le seguenti regole di completezza:

$$\sum_h u_{th\alpha} \bar{u}_{th\beta} = (\not{t})_{\alpha\beta}. \tag{3.33}$$

In totale il tensore leptonic assume la seguente forma:

$$L_{\mu\nu} = \sum_{s,s'} L_\mu L_\nu^* = \frac{2}{V^2 k_0 k'_0} \left[k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} (k \cdot k') - ik^\rho k'^\sigma \epsilon_{\nu\sigma\mu\rho} \right]. \tag{3.34}$$

Per quanto riguarda il contributo adronico, il tensore $H^{\mu\nu} = H^\mu H^{*\nu}$ è rappresentato dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} &= \langle F | J^{F\mu}(0) | 0 \rangle \left(\langle F | J^{F\nu}(0) | 0 \rangle \right)^* \\
&= \langle F | \sum_i j_i^\mu(0) | 0 \rangle \left(\langle F | \sum_i j_i^\nu(0) | 0 \rangle \right)^* \\
&= N^2 \langle F | j^\mu(0) | 0 \rangle \left(\langle F | j^\nu(0) | 0 \rangle \right)^* \\
&= N^2 \langle F | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi(0) | 0 \rangle \left(\langle F | \bar{\psi}(0) \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5) \psi(0) | 0 \rangle \right)^*. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Lo spinore di Dirac $\psi(0)$ e il suo aggiunto $\bar{\psi}(0)$, che si riferiscono a elettroni, protoni o neutroni a seconda che il gas di Fermi che interviene nello scattering sia di e^- , p o n , sono anch'essi somma di operatori di creazione a_{ts}^+ e distruzione a_{ts} (le antiparticelle sono assenti):

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= \sum_{t,s} \frac{1}{\sqrt{2t_0 V}} (a_{ts} u_{ts}) \\
\bar{\psi}(0) &= \sum_{t,s} \frac{1}{\sqrt{2t_0 V}} (a_{ts}^+ \bar{u}_{ts}). \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Usando la seguente notazione per gli stati $|0\rangle$ e $|F\rangle$:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \sqrt{\frac{(N-1)!}{N!}} \sum_i |i\rangle_1 |j \neq i\rangle_{N-1} \\ |F\rangle &= \sqrt{\frac{(N-1)!}{N!}} \left(\sum_l |l\rangle_1 |p, m \neq (l, h)\rangle_{N-1} + |p\rangle_1 |m \neq h\rangle_{N-1} \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

il quadrivettore H^μ diventa:

$$\begin{aligned} H^\mu &= N \langle F | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi(0) | 0 \rangle \\ &= \frac{N}{N} (A + B), \end{aligned} \quad (3.38)$$

con

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,l} {}_1 \langle l | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi(0) | i \rangle_1 {}_{N-1} \langle p, m \neq (l, h) | j \neq i \rangle_{N-1} \\ B &= \sum_i {}_1 \langle p | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi(0) | i \rangle_1 {}_{N-1} \langle m \neq h | j \neq i \rangle_{N-1}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ricordando la normalizzazione (3.16):

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \sum_i {}_1 \langle p | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi(0) | i \rangle_1 \delta(i - h) \\ &= {}_1 \langle p | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi(0) | h \rangle_1. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Esplicitiamo gli indici di spin finora inclusi nei numeri quantici h e p sostituendoli rispettivamente con le coppie (h, σ) e (p, σ') . L'operatore $a_{h,\sigma}$, che crea una buca di momento \vec{h} e polarizzazione σ , e l'operatore $a_{p,\sigma'}^+$, che crea una particella di momento \vec{p} e polarizzazione σ' , agiscono sullo stato iniziale $|0\rangle$ dando il seguente risultato:

$$H^\mu = \frac{1}{2V\sqrt{p_0 h_0}} \bar{u}(p, \sigma') \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) u(h, \sigma). \quad (3.41)$$

Ugualmente, il quadrivettore aggiunto $H^{*\nu}$ in termini degli spinori di Dirac è dato da:

$$H^{*\nu} = \frac{1}{2V\sqrt{p_0 h_0}} \bar{u}(h, \sigma) \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5) u(p, \sigma'), \quad (3.42)$$

da cui il tensore adronico è riscrivibile nel modo seguente:

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= \frac{1}{4V^2 p_0 h_0} \\ &\times \left(\bar{u}(p, \sigma') \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) u(h, \sigma) \bar{u}(h, \sigma) \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5) u(p, \sigma') \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dato un valore fissato dell'impulso totale P' del gas di Fermi nello stato finale $|F\rangle$, il momento p della particella eccitata al di fuori del mare può assumere tutto il range di valori superiori a k_F mentre il momento h della buca è vincolato dalla legge di conservazione $P'^\mu = p^\mu - h^\mu$. Inoltre, come per il calcolo del tensore neutrinico, nel processo di scattering a cui siamo interessati non osserviamo coppie particelle-buca con polarizzazione R' definita. Ne segue che la somma su tutti i numeri quantici interni allo stato $|F\rangle$ con quadrimpulso P' e spin qualunque è equivalente a:

$$\sum_F H^{\mu\nu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} V \sum_{\sigma, \sigma'} \Theta(|\vec{p}| - k_F) H^{\mu\nu}, \quad (3.44)$$

dove la funzione Θ assicura che la particella sia creata all'esterno della sfera di Fermi. Con un procedimento analogo a quello usato per determinare l'Eq.(3.34), otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_F H^{\mu\nu} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} V \sum_{\sigma, \sigma'} \Theta(|\vec{p}| - k_F) \frac{1}{4V^2 p_0 h_0} \\ &\quad \times \bar{u}(p, \sigma') [\gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5)] u(h, \sigma) \bar{u}(h, \sigma) [\gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5)] u(p, \sigma') \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} V \Theta(|\vec{p}| - k_F) \frac{1}{4V^2 p_0 h_0} Tr \left[(\not{p} + m) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{h} + m) \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5) \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sapendo che $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ e $\gamma_5^2 = 1$, la traccia si semplifica nel seguente modo:

$$\begin{aligned} Tr \left[(\not{p} + m) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{h} + m) \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5) \right] &= \\ Tr \left[\not{p} \gamma^\mu \not{h} \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5)^2 \right] + Tr \left[m^2 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5) \right] &= \\ Tr \left[\not{p} \gamma^\mu \not{h} \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5)^2 \right] + Tr \left[m^2 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) (c_V + c_A \gamma^5) \gamma^\nu \right] &= \\ Tr \left[\not{p} \gamma^\mu \not{h} \gamma^\nu (c_V^2 + c_A^2 - 2c_V c_A \gamma^5) \right] + Tr \left[m^2 (c_V^2 - c_A^2) \gamma^\mu \gamma^\nu \right] &= \\ (c_V^2 + c_A^2) 4 [h^\mu p^\nu + h^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} (h \cdot p)] - 2c_V c_A \left[-4i \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_\alpha h_\beta \right] + \\ + 4m^2 (c_V^2 - c_A^2) g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

con m la massa dell'elettrone o del nucleone a seconda del tipo di particelle del gas di Fermi a cui ci stiamo riferendo.

A questo punto, sostituiamo nell'Eq.(3.26) le espressioni derivate (3.34) e (3.45) dei tensori neutrinici e fermionici e scriviamo la probabilità per unità di tempo W :

$$\begin{aligned} W &= \frac{G^2}{2} (2\pi)^4 V \delta^{(4)}(k + P - k' - P') \frac{2}{V^2 k_0 k'_0} \\ &\quad \times \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} V \Theta(|\vec{p}| - k_F) \frac{1}{V^2 p_0 h_0} \bar{L}_{\mu\nu} \bar{H}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

con:

$$\begin{aligned}\bar{L}_{\mu\nu} &= k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}(k \cdot k') - ik^\rho k'^\sigma \epsilon_{\nu\sigma\mu\rho} \\ \bar{H}^{\mu\nu} &= (c_V^2 + c_A^2) [h^\mu p^\nu + h^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}(h \cdot p)] + 2ic_V c_A [\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p_\alpha h_\beta] + \\ &\quad + m^2(c_V^2 - c_A^2)g^{\mu\nu} .\end{aligned}\quad (3.48)$$

Il prodotto $\bar{L}_{\mu\nu}\bar{H}^{\mu\nu}$ è facilitato dal fatto che la contrazione tra un tensore simmetrico (come $g^{\mu\nu}$) e uno antisimmetrico (come $\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}$) è nulla. In definitiva, si ha:

$$\begin{aligned}\bar{L}_{\mu\nu}\bar{H}^{\mu\nu} &= (c_V^2 + c_A^2) [2(k \cdot h)(k' \cdot p) + 2(k \cdot p)(k' \cdot h)] + \\ &\quad - 2m^2(c_V^2 - c_A^2)(k \cdot k') + 2c_V c_A [k^\rho k'^\sigma p_\alpha h_\beta \epsilon_{\nu\sigma\mu\rho} \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}] .\end{aligned}\quad (3.49)$$

L'ultimo termine dell'espressione (3.49) può essere ulteriormente sviluppato:

$$\begin{aligned}k^\rho k'^\sigma p_\alpha h_\beta \epsilon_{\nu\sigma\mu\rho} \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} &= k^\rho k'^\sigma p_\alpha h_\beta \epsilon_{\nu\sigma\mu\rho} \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} \\ &= k^\rho k'^\sigma p_\alpha h_\beta 2 \left(g_\sigma^\alpha g_\rho^\beta - g_\sigma^\beta g_\rho^\alpha \right) \\ &= 2(k' \cdot p)(k \cdot h) - 2(k' \cdot h)(k \cdot p) .\end{aligned}\quad (3.50)$$

Complessivamente abbiamo:

$$\begin{aligned}\bar{L}_{\mu\nu}\bar{H}^{\mu\nu} &= (c_V^2 + c_A^2) [2(k \cdot h)(k' \cdot p) + 2(k \cdot p)(k' \cdot h)] + \\ &\quad - 2m^2(c_V^2 - c_A^2)(k \cdot k') + \\ &\quad + 2c_V c_A [2(k' \cdot p)(k \cdot h) - 2(k' \cdot h)(k \cdot p)] \\ &= 2 \{ (c_V + c_A)^2 [(k \cdot h)(k' \cdot p)] + \\ &\quad + (c_V - c_A)^2 [(k \cdot p)(k' \cdot h)] + \\ &\quad - m^2(c_V^2 - c_A^2)(k \cdot k') \} \\ &= 2k_0 k'_0 h_0 p_0 \{ (c_V + c_A)^2 (1 - v_h \cos(\theta_{kh}))(1 - v_p \cos(\theta_{k'p})) + \\ &\quad + (c_V - c_A)^2 (1 - v_p \cos(\theta_{kp}))(1 - v_h \cos(\theta_{k'h})) + \\ &\quad - \frac{m^2}{h_0 p_0} (c_V^2 - c_A^2) (1 - \cos(\theta_{k'k})) \} ,\end{aligned}\quad (3.51)$$

con $v = \frac{\vec{p}}{E}$ velocità di una particella con energia E e impulso \vec{p} e θ_{ij} è l'angolo tra la j -esima e l' i -esima particella.

L'Eq.(3.18) della sezione d'urto mostra che, oltre a dipendere dalla probabilità di transizione per unità di tempo W , $d\sigma(k_0)$ è anche funzione della densità di flusso ϕ per unità di superficie dei neutrini entranti e dello spazio delle fasi Ph dei neutrini e del mezzo negli stati finali. Il flusso ϕ , tenendo conto che le particelle di massa nulla viaggiano alla velocità della luce $c = 1$ (in unità naturali), è dato da:

$$\frac{1}{\phi} = \frac{V}{v} = V .\quad (3.52)$$

Lo spazio delle fasi Ph rappresenta la densità degli stati posizione-momento occupati dai neutrini e dal gas di Fermi dopo lo scattering. $d\sigma(k_0)$, infatti, comprende la somma delle probabilità dei processi (3.8) con tutti i possibili P' e k' nell'intervallo d^3k' . Segue che:

$$Ph = \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} V \int \frac{d^3h}{(2\pi)^3} V \Theta(k_F - |\vec{h}|), \quad (3.53)$$

dove la funzione $\Theta(k_F - |\vec{h}|)$ di Heaviside deriva dal fatto che la buca viene creata all'interno del mare di Fermi. In totale, la sezione d'urto differenziale è:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\sigma(k_0)}{d^3k'} &= V \frac{1}{(2\pi)^3} V \int \frac{d^3h}{(2\pi)^3} V \Theta(k_F - |\vec{h}|) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} V \Theta(|\vec{p}| - k_F) \\ &\quad \times \left\{ \frac{G^2}{2} (2\pi)^4 V \delta^{(4)}(k + P - k' - P') \frac{2}{V^2 k_0 k'_0} \frac{1}{V^2 p_0 h_0} \bar{L}_{\mu\nu} \bar{H}^{\mu\nu} \right\} \\ &= V \frac{G^2}{(2\pi)^5} \int d^3h \Theta(k_F - |\vec{h}|) \Theta(|\vec{h} + \vec{k} - \vec{k}'| - k_F) \\ &\quad \times \delta(k_0 - k'_0 - p_0 + h_0) \left\{ \frac{1}{k_0 k'_0 p_0 h_0} \bar{L}_{\mu\nu} \bar{H}^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Per comodità, riscriviamo il risultato (3.54) in termini del quadrimomento q^μ trasferito, legato alle variabili k, k' dalla relazione:

$$q^\mu = k^\mu - k'^\mu, \quad (3.55)$$

con $q = |\vec{q}|$. L'Eq.(3.54) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\sigma(k_0)}{d^3k'} &= V \frac{G^2}{(2\pi)^5} \int d^3h \Theta(k_F - |\vec{h}|) \Theta(|\vec{h} + \vec{q}| - k_F) \\ &\quad \times \delta(q_0 - p_0 + h_0) \left\{ \frac{1}{k_0 k'_0 p_0 h_0} \bar{L}_{\mu\nu} \bar{H}^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Nell'integrazione sul momento h della buca, per ogni q fissato, l'azione combinata delle funzioni Θ e della δ di conservazione dell'energia fa sì che gli estremi dell'integrale in d^3h dipendano dall'intervallo di q che si sta prendendo.

3.4 Limite non relativistico

L'espressione (3.56) della sezione d'urto può essere determinata esattamente sia in linea generale trattando le particelle del mezzo come relativistiche sia nel limite non relativistico. Come primo passo esaminiamo il caso non relativistico, in cui possono essere introdotte notevoli semplificazioni di calcolo nell'Eq.(3.56).

L'ipotesi che i momenti \vec{p} e \vec{h} della coppia particella-buca siano in modulo nettamente minori delle rispettive masse (m_e, m_p o m_n per un gas rispettivamente di elettroni, protoni o neutroni) comporta due principali approssimazioni: le velocità

$v_i \ll 1$ che compaiono nell'Eq.(3.51) del prodotto $\bar{L}_{\mu\nu}\bar{H}^{\mu\nu}$ sono trascurabili; la relazione energia-impulso assume la forma non relativistica $E = |\vec{p}|^2/m^2$.

Inoltre, nell'Eq.(3.51), il termine contenente l'angolo $\theta_{kk'}$ tra il neutrino iniziale e finale dà un piccolo contributo alla contrazione $\bar{L}_{\mu\nu}\bar{H}^{\mu\nu}$, essendo proporzionale alla differenza $c_V^2 - c_A^2$ [25]. Per questo motivo, manteniamo solo la dipendenza dai coefficienti c_V e c_A trascurando il fattore $1 - \cos(\theta_{kk'})$. Sotto queste condizioni, l'Eq.(3.56) si modifica in:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\sigma(k_0)}{d^3k'} &= V \frac{G^2}{(2\pi)^5} \int d^3h \Theta(k_F - |\vec{h}|) \Theta(|\vec{h} + \vec{q}| - k_F) \\ &\quad \times \delta\left(q_0 - \frac{|\vec{h} + \vec{q}|^2}{2m} + \frac{|\vec{h}|^2}{2m}\right) \left\{ \frac{1}{k_0 k'_0 p_0 h_0} \bar{L}_{\mu\nu} \bar{H}^{\mu\nu} \right\} \\ &= V \frac{G^2}{(2\pi)^5} \int_{-1}^1 2\pi d\cos\phi \int_0^\infty h^2 dh \\ &\quad \times \Theta(k_F - |\vec{h}|) \Theta(|\vec{h} + \vec{q}| - k_F) \delta\left(q_0 - \frac{|\vec{h} + \vec{q}|^2}{2m} + \frac{h^2}{2m}\right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{k_0 k'_0 p_0 h_0} \bar{L}_{\mu\nu} \bar{H}^{\mu\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

dove $h = |\vec{h}|$ e:

$$\frac{1}{k_0 k'_0 p_0 h_0} \bar{L}_{\mu\nu} \bar{H}^{\mu\nu} = 2(c_V^2 + 3c_A^2). \quad (3.58)$$

La variabile d'integrazione $d\cos\phi$ è riscrivibile in funzione del momento $|\vec{p}| = p$. Dalla legge di conservazione dell'impulso totale abbiamo:

$$p^2 = h^2 + q^2 + 2hq\cos\phi \Rightarrow p dp = hq d\cos\phi, \quad (3.59)$$

in cui l'angolo tra le direzioni degli impulsi \vec{h} e \vec{q} è stato preso uguale alla coordinata polare ϕ . Nell'approssimazione non relativistica, il momento p è legato all'energia p_0 dalla relazione $p_0 = \frac{p^2}{2m}$. Il differenziale dp può essere ulteriormente modificato:

$$p_0 = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow m dp_0 = p dp \Rightarrow d\cos\phi = \frac{m}{hq} dp_0. \quad (3.60)$$

Di conseguenza, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\sigma(k_0)}{d^3k'} &= V \frac{G^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q} \int_0^\infty dh \int_{p_{0-}}^{p_0^+} dp_0 m \\ &\quad \left\{ h \times \Theta(k_F - |\vec{h}|) \Theta(|\vec{h} + \vec{q}| - k_F) \delta\left(q_0 - p_0 + \frac{h^2}{2m}\right) \right. \\ &\quad \left. \times 2(c_V^2 + 3c_A^2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

in cui $p_{0-} = \frac{(h-q)^2}{2m}$ e $p_0^+ = \frac{(h+q)^2}{2m}$. Gli estremi di integrazione in dp_0 derivano dall'insieme di valori assunti dal coseno.

3.4.1 Sezione d'urto

Le regioni di integrazione in dh dipendono dal valore del modulo q . Per esplicitarle, analizziamo i vincoli derivanti dalle due funzioni Θ e dalla distribuzione δ di Dirac:

- Per poter essere utilizzata nell'integrale in dp_0 la $\delta(q_0 - p_0 + \frac{h^2}{2m})$ richiede che il termine $q_0 + \frac{h^2}{2m}$ vari nell'insieme di valori assunti dalla variabile p_0 . Da questo si ha:

$$\frac{(h-q)^2}{2m} \leq q_0 + \frac{h^2}{2m} \leq \frac{(h+q)^2}{2m}. \quad (3.62)$$

Inoltre, il limite inferiore dato dalla funzione $\Theta(p - k_F)$ si traduce nella condizione aggiuntiva $\frac{p^2}{2m} > \frac{k_F^2}{2m}$ da cui:

$$\frac{k_F^2}{2m} < q_0 + \frac{h^2}{2m}. \quad (3.63)$$

Queste disuguaglianze fissano i valori massimi e minimi assumibili dall'energia q_0 a cui corrispondono tre limiti di integrazione all'infuori dei quali la sezione d'urto è nulla:

$$\begin{aligned} q_0 \geq q_{01} = \frac{k_F^2}{2m} - \frac{h_1^2}{2m} &\Rightarrow h \geq h_1 = \sqrt{k_F^2 - 2mq_0} \\ q_0 \geq q_{02} = \frac{q^2}{2m} - \frac{h_2q}{m} &\Rightarrow h \geq h_2 = \frac{q}{2} - \frac{mq_0}{q} \\ q_0 \leq q_{03} = \frac{q^2}{2m} + \frac{h_3q}{m} &\Rightarrow h \geq h_3 = \frac{mq_0}{q} - \frac{q}{2}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

- La $\Theta(k_F - h)$ implica che:

$$\Theta(k_F - h) \Rightarrow 0 \leq h \leq k_F. \quad (3.65)$$

- Da $\Theta(|\vec{h} + \vec{q}| - k_F)$ segue che:

$$\begin{aligned} \Theta(|\vec{h} + \vec{q}| - k_F) &\Rightarrow k_F \leq |\vec{h} + \vec{q}| \leq |\vec{h}| + |\vec{q}| \\ &\Rightarrow k_F - |\vec{q}| \leq |\vec{h}|. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Per tradurre queste tre condizioni sugli estremi di integrazione in dh , dobbiamo considerare separatamente diversi intervalli di q :

- Per $0 \leq q \leq k_F$, $k_F - q \geq 0$ da cui i valori permessi dalle due Θ si restringono a:

$$k_F - q \leq h \leq k_F. \quad (3.67)$$

L'energia q_0 , poichè $\frac{q^2}{2m} - \frac{hq}{m} \leq 0$, varia nel seguente intervallo:

$$0 \leq q_0 \leq \frac{q^2}{2m} + \frac{k_Fq}{m}. \quad (3.68)$$

- Per $k_F \leq q \leq 2k_F$, $k_F - q \leq 0$ e gli estremi imposti dalla $\Theta(k_F - h)$ soddisfano automaticamente l'altra Θ :

$$0 \leq h \leq k_F . \quad (3.69)$$

La differenza $\frac{q^2}{2m} - \frac{hq}{m} \leq 0$ e l'arco di valori di q_0 rimane:

$$0 \leq q_0 \leq \frac{q^2}{2m} + \frac{k_F q}{m} . \quad (3.70)$$

- Infine per $q > 2k_F$ si ottiene:

$$0 \leq h \leq k_F , \quad (3.71)$$

e, dato che $\frac{q^2}{2m} - \frac{hq}{m} \geq 0$:

$$\frac{q^2}{2m} - \frac{k_F q}{m} \leq q_0 \leq \frac{q^2}{2m} + \frac{k_F q}{m} . \quad (3.72)$$

In totale, effettuata l'integrazione in dp_0 utilizzando la distribuzione δ , l'integrale $I(q, q_0)$ in dh si riduce a :

- Per $0 \leq q_0 \leq \frac{k_F q}{m} - \frac{q^2}{2m}$:

$$\begin{aligned} I(q, q_0) &= \int_0^\infty dh \left\{ \frac{m}{q} 2(c_V^2 + 3c_A^2) h \Theta(k_F - |\vec{h}|) \Theta(|\vec{h} + \vec{q}| - k_F) \right\} \\ &= \frac{m}{q} (c_V^2 + 3c_A^2) (2mq_0) . \end{aligned} \quad (3.73)$$

- Per $\frac{q^2}{2m} - \frac{k_F q}{m} \leq q_0 \leq \frac{q^2}{2m} + \frac{k_F q}{m}$:

$$\begin{aligned} I(q, q_0) &= \int_0^\infty dh \left\{ \frac{m}{q} 2(c_V^2 + 3c_A^2) h \Theta(k_F - |\vec{h}|) \Theta(|\vec{h} + \vec{q}| - k_F) \right\} \\ &= \frac{m}{q} (c_V^2 + 3c_A^2) k_F^2 \left(1 - \left(\frac{mq_0}{qk_F} - \frac{q}{2k_F} \right)^2 \right) . \end{aligned} \quad (3.74)$$

L'andamento dei risultati dell'integrazione $I(q, q_0)$, e quindi della sezione d'urto differenziale, per vari valori del momento trasferito q sono mostrati in Fig. 3.5 in funzione dell'energia trasferita q_0 .

Il risultato che abbiamo ottenuto si può estendere immediatamente al caso di nucleoni interagenti, sostituendo alle loro masse nude le masse effettive.

3.5 Sezione d'urto relativistica

Nel caso generale, in cui le particelle del gas di Fermi che partecipano allo scattering hanno energie relativistiche, il calcolo della sezione d'urto differenziale (3.56) risulta più complesso, anche se concettualmente del tutto analogo a quello descritto per il caso non relativistico.

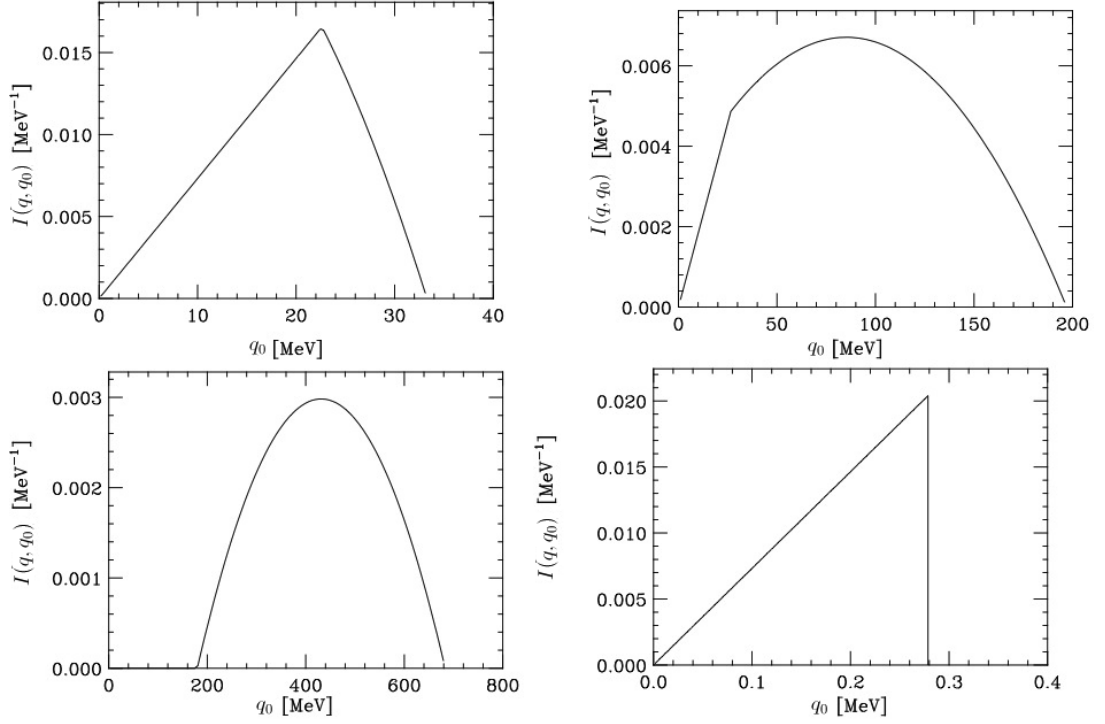


Figura 3.5. Andamento dell'integrale $I(q, q_0)$ per un gas di Fermi con momento $k_F = 262$ Mev e alla densità di equilibrio 0.16 fm^{-3} , in corrispondenza di vari valori di q . In alto a sinistra $q = 100 \text{ MeV} < k_F$, in alto a destra $k_F < q = 400 \text{ MeV} < 2k_F$, in basso a sinistra $q = 900 \text{ MeV} > 2k_F$ e in basso a destra $q = 1 \text{ MeV} \ll k_F$.

Nel seguito riportiamo solo l'espressione finale di $d^2\sigma(k_0)/V d\Omega dk^0$ con Ω l'angolo solido dell'impulso \vec{k}^j [26].

$$\frac{1}{V} \frac{d^3\sigma}{d\Omega dk^0} = \frac{G_F^2 k^0 q_\mu^2}{4\pi^3 k_0} (AR_1 + R_2 + BR_3), \quad (3.75)$$

in cui A e B sono fattori cinematici dati da

$$A = \frac{2k_0(k_0 - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2}{q^2}, \quad B = 2k_0 - q_0, \quad (3.76)$$

e le tre funzioni di risposta R_i si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1^V + R_1^A = \sum_{i=e,p,n} (c_V^{(i)2} + c_A^{(i)2}) (Im\Pi_T^{(i)} + Im\Pi_L^{(i)}) \\ R_2 &= R_2^V + R_2^A = \sum_{i=e,p,n} [c_V^{(i)2} Im\Pi_T^{(i)} + c_A^{(i)2} (Im\Pi_T^{(i)} - Im\Pi_A^{(i)})] \\ R_3 &= R_3^V + R_3^A = \sum_{i=e,p,n} 2c_V^{(i)} c_A^{(i)} Im\Pi_{VA}^{(i)}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Le espressioni esplicite delle quantità Π_L , Π_T e Π_A , che descrivono la propagazione di una coppia particella-buca nel mezzo nucleare, sono date nell'Appendice A.

Capitolo 4

Risultati

In questo Capitolo presentiamo i risultati numerici dei calcoli effettuati utilizzando i due modelli dinamici discussi precedentemente, che comprendono le proprietà statiche della materia nucleare in equilibrio β e le sezioni d'urto differenziali di diffusione di neutrini. I programmi di calcolo utilizzati, in linguaggio FORTRAN, sono stati tutti sviluppati appositamente per il lavoro di Tesi. I tempi di calcolo tipici, necessari per risolvere le equazioni di equilibrio e ottenere la sezione d'urto utilizzando un personal computer di fascia media, sono stati dell'ordine della decina di secondi.

4.1 Composizione e proprietà della materia β -stabile

Le equazioni di equilibrio derivate nel Capitolo 1 sono state risolte numericamente per il caso di materia costituita da neutroni, protoni ed elettroni. Per ogni valore della densità barionica, n_B , i potenziali chimici così ottenuti determinano la frazione di protoni, x_p , presente. Per quanto riguarda la frazione di elettroni, la condizione di neutralità di carica elettrica del sistema impone $x_e = x_p$. Ricordiamo che, nella derivazione della relazione tra i potenziali chimici all'equilibrio (Eq.(1.17)), i neutrini uscenti sono trattati come non degeneri e quindi con un potenziale chimico nullo, dal momento che essi scappano all'infinito via dalla stella.

Gli andamenti di x_p in funzione di n_B , ottenuti usando l'interazione effettiva CBF e il modello $\sigma - \omega - \rho$ in approssimazione di campo medio, sono illustrati nella Fig. 4.1. Si vede chiaramente che le differenze tra le due descrizioni della dinamica si riflettono in un diverso andamento di x_p . I potenziali chimici, infatti, che coincidono con le energie di Fermi e_F a temperatura nulla, hanno una diversa dipendenza dal momento di Fermi k_F , data dalla relazione $\frac{k_F^2}{2m^*}$ nel caso non relativistico e $\sqrt{k_F^2 + m^{*2}}$ in quello relativistico. Di conseguenza, alla stessa densità barionica n_B , il valore di x_p che soddisfa le condizioni di equilibrio non coincide tra i due modelli. L'approccio relativistico prevede una frazione di protoni che cresce più rapidamente con la densità. Ad esempio, a $n_B = 0.32 \text{ fm}^{-3}$, corrispondente al doppio della densità di equilibrio della materia nucleare simmetrica, i valori di x_p ottenuti dai modelli non relativistico e relativistico sono, rispettivamente, $\sim 8\%$ e $\sim 15\%$. Questa differenza ha un impatto importante sulla attivazione del processo Urca diretto, discusso nel Capitolo precedente.

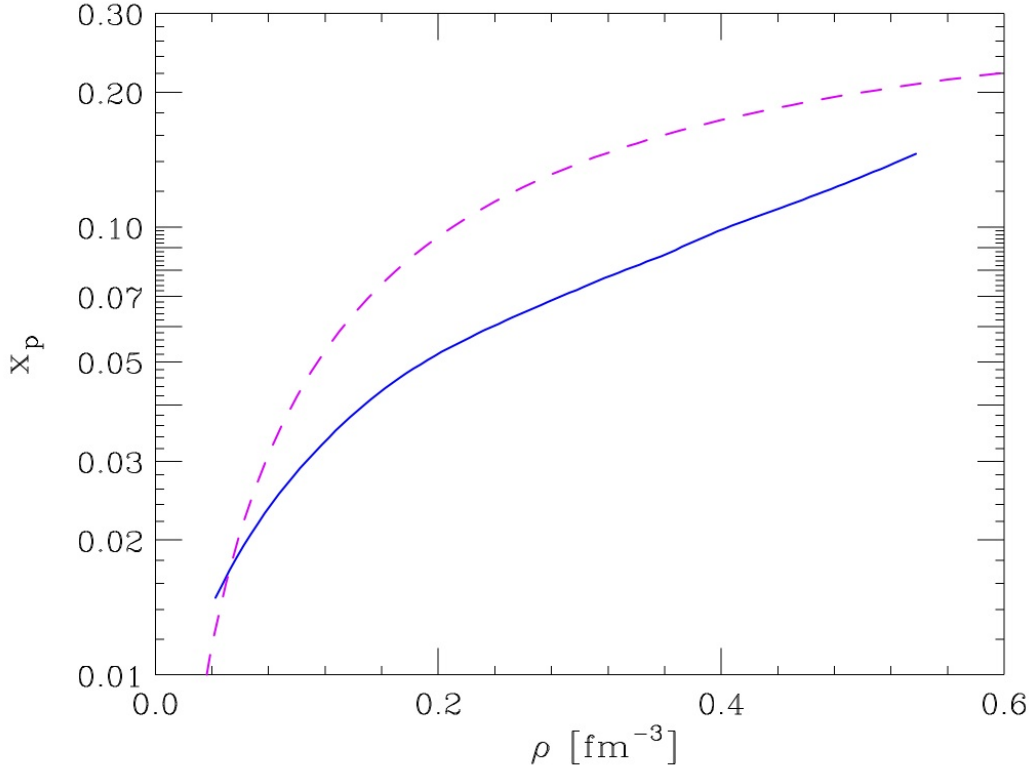


Figura 4.1. Andamento della frazione di protoni x_p in funzione della densità barionica ρ nella materia β -stabile. La linea continua rappresenta la predizione all'interno dell'interazione effettiva CBF mentre la linea tratteggiata corrisponde al modello $\sigma - \omega - \rho$ nell'approssimazione di campo medio.

Data la densità di protoni e neutroni del mezzo, la massa effettiva m^* dei barioni è perfettamente definita sia nella teoria non relativistica CBF sia nel modello $\sigma - \omega - \rho$. Naturalmente, poiché questa proprietà della materia interagente tiene conto delle mutue forze tra le sue componenti, i valori di m^* risultanti dipendono fortemente dal tipo di approccio usato per descrivere l'interazione nucleare.

In Fig. 4.2 è mostrata la dipendenza della massa effettiva dei neutroni m_n^* e dei protoni m_p^* dalla densità barionica, ottenuta adottando l'interazione effettiva CBF all'equilibrio β e la generalizzazione delle Eq.(2.26)-(2.29) al caso di materia β -stabile.

La Fig. 4.3, invece, rappresenta l'andamento della massa effettiva m^* del nucleone in funzione della densità di nucleoni totale nell'ambito di una descrizione relativistica dell'interazione forte attraverso il modello $\sigma - \omega - \rho$, mantenendoci sempre in condizioni di equilibrio β .

Notiamo immediatamente che il modello non relativistico prevede due valori di massa effettiva, rispettivamente del protone e del neutrone, che sono nettamente diversi tra loro. A densità $n_B = 0.32 \text{ fm}^{-3}$, $m_p^*/m_p \sim 0.55$ e $m_n^*/m_n \sim 0.73$. In generale, la massa effettiva predetta per il neutrone è maggiore di quella del protone dal momento che, in condizioni di equilibrio β , la densità di neutroni parte, a

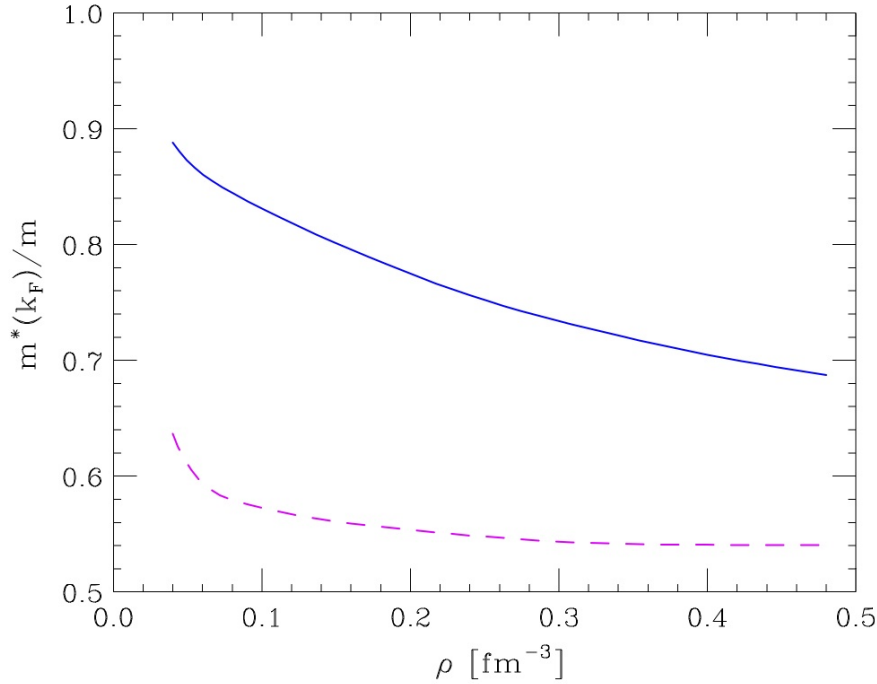


Figura 4.2. Andamento del rapporto tra le massa effettive del protone (linea tratteggiata) e del neutrone (linea solida) e le corrispondenti masse nude in funzione della densità barionica ρ , usando l'interazione effettiva CBF per descrivere le forze nucleari e nella materia β -stabile.

basse n_B , da un valore sostanzialmente uguale alla densità nucleonica totale per poi diminuire al crescere di n_B . Al contrario la frazione di protoni è inizialmente nulla per piccole densità barioniche ed aumenta secondo l'andamento mostrato nella Fig. 4.1. Di conseguenza, a parità di n_B , il numero di particelle che contribuisce a m_n^* è nettamente maggiore di quello associato a m_p^* .

La teoria relativistica nell'approssimazione di campo medio assegna un'unica m^* a entrambi i nucleoni come si vede dalla Fig. 4.3. Questa sostanziale differenza, rispetto al modello non relativistico, nella predizione di questa grandezza che schematizza l'effetto delle interazioni tra i barioni del core, dipende dai termini di interazione e, in particolare, dagli accoppiamenti con i mesoni mediatori responsabili dello shift di massa. Nell'interazione effettiva CBF, infatti, i contributi alle masse nude relativi alle forze mutue dipendono dal numero quantico di isospin, per esempio attraverso il meccanismo di scambio di pioni, e sono di conseguenza diversi per la massa del protone e del neutrone. Nel modello $\sigma - \omega - \rho$, come si evidenzia nell'Eq.(2.43), la massa nuda del nucleone acquisisce un termine che deriva dall'accoppiamento del campo di Dirac con il campo mesonico scalare e isoscalare della particella σ e che, quindi, non dipende dall'isospin.

Sia nell'approccio non relativistico che relativistico, i valori delle masse effettive tendono alla rispettiva massa nuda per $n_B \rightarrow 0$, condizione in cui le interazioni forti sono completamente assenti e il mezzo nucleare tende al comportamento di un gas ideale. Al crescere di n_B , in cui le forze attrattive reciproche diventano sempre più

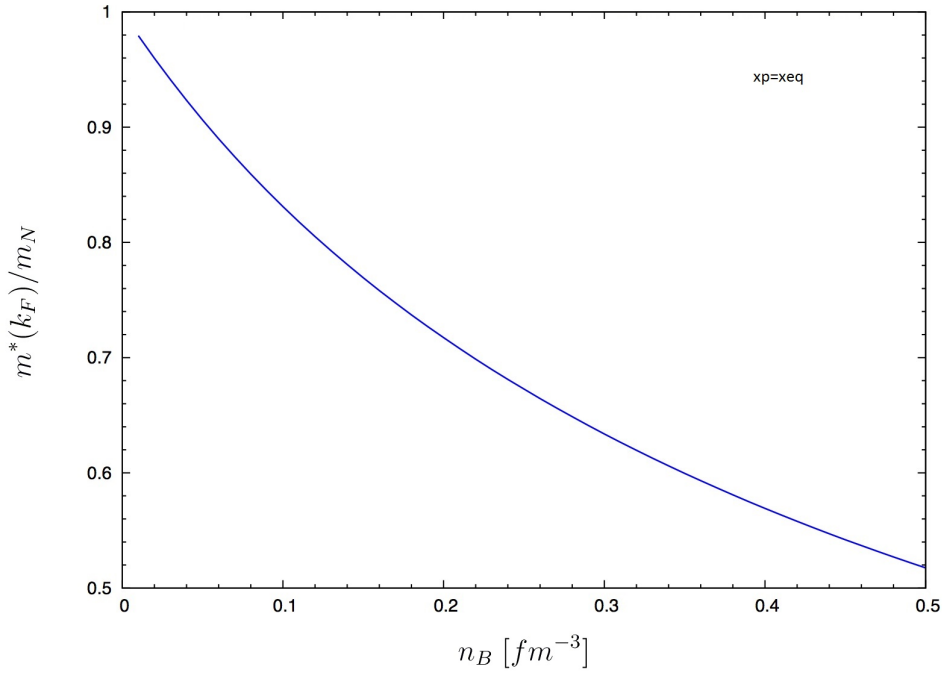


Figura 4.3. Andamento del rapporto tra la massa effettiva m^* e la corrispondente massa nucleonica nuda in funzione della densità barionica n_B , usando il modello relativistico $\sigma - \omega - \rho$ nell'approssimazione di campo medio per descrivere le forze nucleari.

grandi, i contributi dell'interazione alle masse dei nucleoni ne diminuiscono il valore totale.

Le masse effettive sono, in generale, legate allo spettro di energia dei nucleoni, che differisce significativamente da quello puramente cinetico del sistema. A titolo illustrativo, nella Fig. 4.4 riportiamo gli spettri dei neutroni e protoni nella materia nucleare β -stabile alla densità di equilibrio, ottenuti nell'ambito del modello non relativistico CBF. Si vede chiaramente come, per effetto delle interazioni forti, a piccoli valori di k , i nucleoni sentono in misura maggiore le forze reciproche e l'energia diventa negativa in corrispondenza di due differenti densità barioniche rispettivamente per neutroni e protoni. Quando i nucleoni possiedono momenti k più elevati, invece, le mutue forze ne influenzano meno gli spettri di energia che tendono allo stesso andamento di un gas di Fermi.

La Fig. 4.5 mostra la dipendenza dall'impulso degli spettri analoghi a quelli della Fig. 4.4 che si ottengono dal modello non relativistico usando l'Eq.(2.60). Notiamo che, al contrario della massa effettiva, l'energia dei nucleoni riceve contributi dalle interazioni con il mesone isovettoriale ρ , che sono all'origine della differenza tra lo spettro protonico e quello neutronico. Dipendendo dalla differenza $\pm(n_p - n_n)$ (negativa all'equilibrio β), con il segno più relativo ai protoni e il meno ai neutroni, il termine legato allo scambio della particella ρ assicura che, a parità di momento k , l'energia del protone è sempre minore di quella del neutrone.

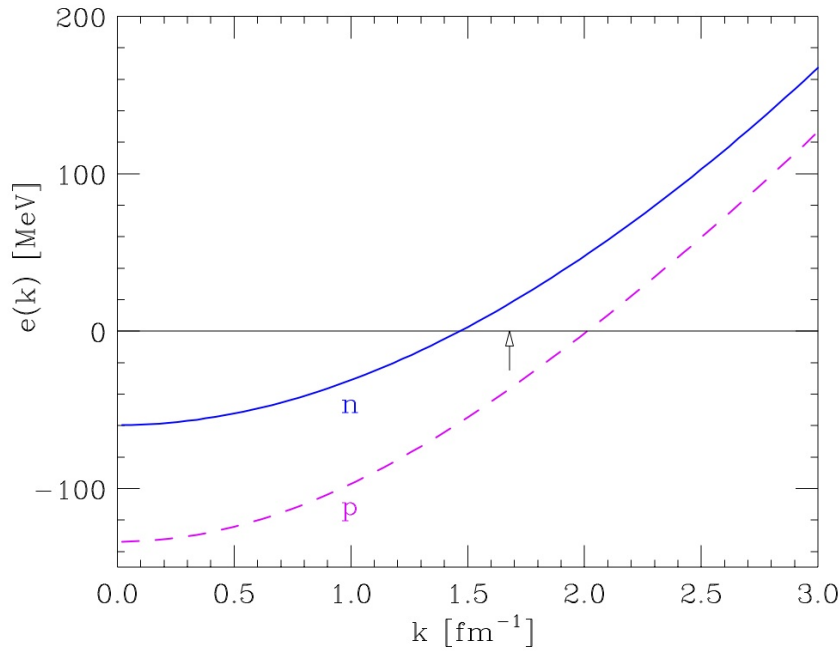


Figura 4.4. Andamento dello spettro di energia di neutroni (linea continua) e protoni (linea tratteggiata) in funzione del momento k di singola particella ottenuto usando l'interazione effettiva CBF e per la materia β -stabile. La densità barionica è quella nucleare $n_B = 0.16 \text{ fm}^{-3}$.

4.2 Sezione d'urto

In questa Sezione confrontiamo i risultati delle sezioni d'urto differenziali ottenuti attraverso integrazioni numeriche per la materia β stabile in assenza di muoni. Facendo riferimento alle derivazioni (3.73)-(3.74) nel caso non relativistico e all'Eq.(3.75) più generale, infatti, è possibile studiare il comportamento della sezione d'urto al variare dei parametri da cui essa dipende: l'energia del neutrino iniziale, il quadrimomento trasferito e la densità protonica e barionica.

Le differenze sulle sezioni d'urto risultanti si traducono in differenti valori del cammino libero medio λ predetto nei due approcci usati, definiti dalla relazione

$$\lambda = \frac{V}{\sigma(k_0)}, \quad (4.1)$$

con

$$\sigma(k_0) = \int d^3k' \frac{d^3\sigma(k_0)}{d^3k'}. \quad (4.2)$$

Questo fa sì che l'evoluzione e, in particolare, il processo di raffreddamento termico di una stella risulti più o meno rapido a seconda della descrizione delle interazioni forti che adottiamo.

La Fig. 4.6 illustra la sezione d'urto differenziale $d^2\sigma(k_0)/Vd\Omega dq_0$ in funzione dell'energia trasferita, a energia del neutrino incidente $k_0 = 5 \text{ Mev}$ e momento trasferito $q = 2.5 \text{ Mev}$, utilizzando l'interazione effettiva CBF. Il calcolo è stato effettuato a una densità barionica $n_B = 0.2 \text{ fm}^{-3}$ vicina alla densità di equilibrio. Il

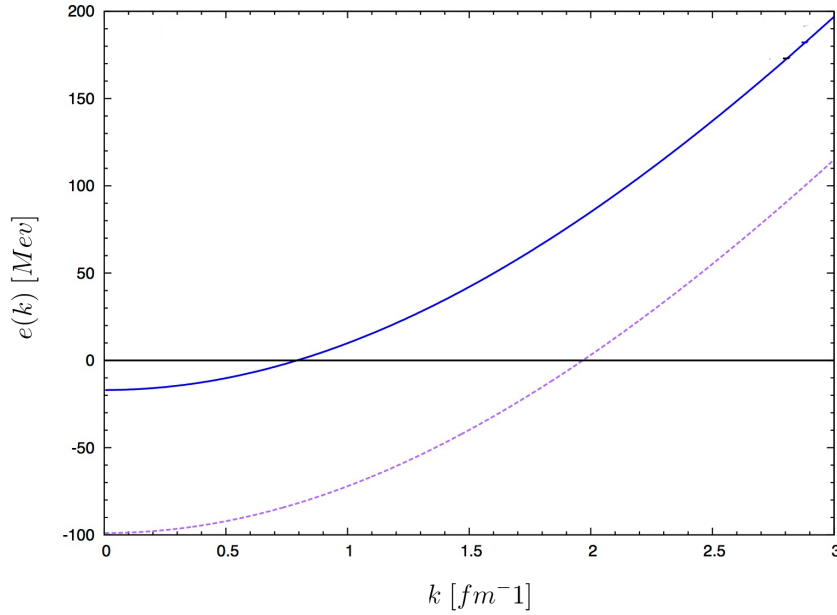


Figura 4.5. Andamento dello spettro di energia di neutroni (linea continua) e protoni (linea tratteggiata) in funzione del momento k di singola particella ottenuto usando il modello relativistico $\sigma - \omega - \rho$ e per la materia β -stabile. La densità barionica è quella nucleare $n_B = 0.16 \text{ fm}^{-3}$.

grafico mette a confronto la sezione d'urto dello scattering del neutrino nella materia interagente del core con il caso in cui i gas delle varie componenti del mezzo sono liberi. La differenza tra queste due situazioni risiede esclusivamente nella massa che, mentre per i gas di Fermi liberi coincide con la massa nuda, nella teoria a molti corpi non relativistica è sostituita dalle masse effettive m_p^* e m_n^* dei nucleoni.

Nella Fig. 4.7 sono mostrati i contributi additivi alla sezione d'urto dei tre tipi di particelle, elettroni, protoni e neutroni, che partecipano all'interazione. Il comportamento a gradino delle sezioni d'urto parziali riflette i limiti di integrazione analizzati nel Capitolo precedente. Per questi valori della densità barionica e della frazione di protoni, infatti, il modulo dell'impulso q è molto minore di tutti i momenti di Fermi k_F delle singole specie, e la risposta del mezzo alla diffusione di neutrini è diversa da zero solo per l'intervallo $0 \leq q_0 \leq \frac{k_F q}{m^*} + \frac{q^2}{2m^*}$, nel quale dipende linearmente da q_0 fino a $qk_F/m - q^2/2m$ e quadraticamente da q_0 nel range rimanente. Poichè all'equilibrio $x_p \ll x_n$ da cui $k_{Fp} \ll k_{Fn}$, il massimo valore di q_0 per i protoni è nettamente minore di quello dei neutroni. Per gli elettroni, al contrario, $m_e^* = m_e \ll k_{Fe}$ e lo scattering avviene per qualunque valore di energia. Osserviamo che, i limiti superiori imposti sull'integrazione, essendo inversamente proporzionali alle masse effettive, risultano più grandi di quelli ottenuti con le rispettive masse nude.

I grafici 4.8 e 4.9 sono analoghi alle Fig. 4.6 e Fig. 4.7 ma sono stati determinati a una densità barionica superiore, $n_B = 0.3 \text{ fm}^{-3}$. Nonostante l'andamento della

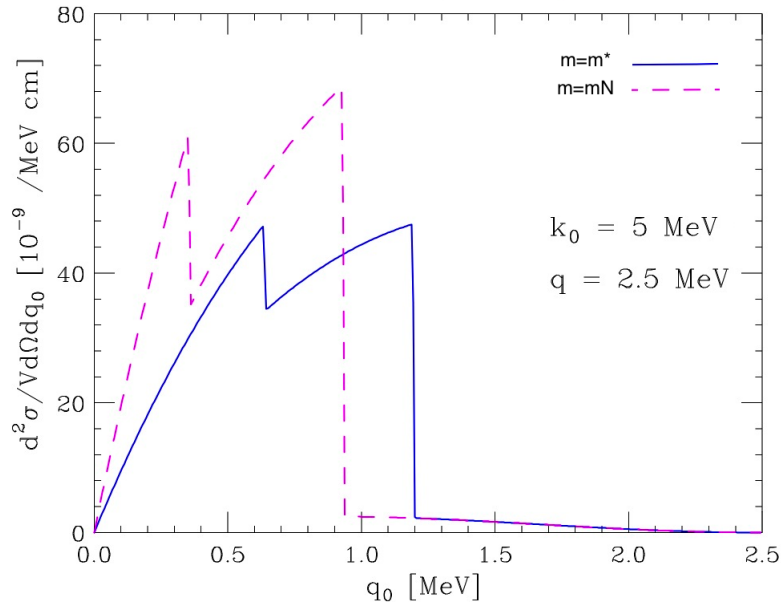


Figura 4.6. Sezione d'urto differenziale relativistica in funzione dell'energia trasferita q_0 ottenuta usando le masse effettive dell'interazione CBF per la materia β stabile (linea continua) confrontata con il risultato ottenuto usando le masse nude (linea tratteggiata). La densità barionica è $n_B = 0.2 \text{ fm}^{-3}$, l'energia del neutrino iniziale è $k_0 = 5 \text{ MeV}$ e il momento trasferito è $q = 2.5 \text{ MeV}$.

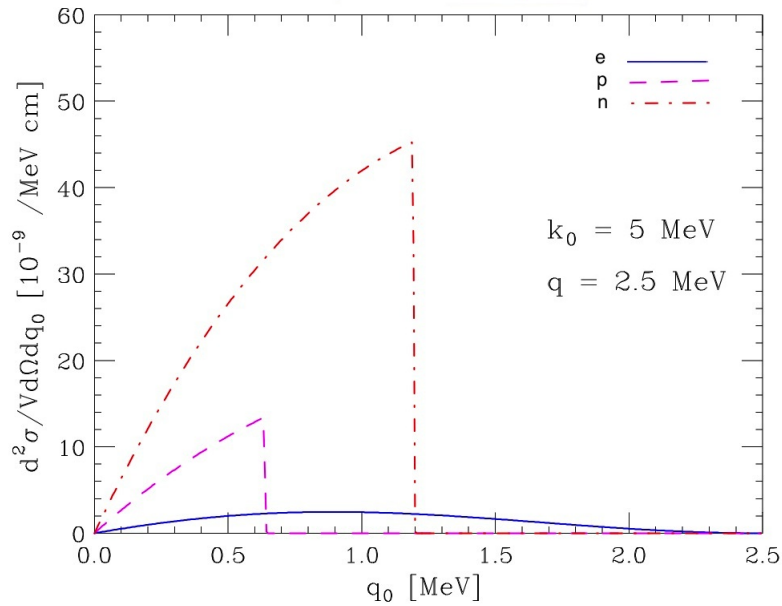


Figura 4.7. Singoli contributi dei neutroni (linea tratteggiata e con punti), protoni (linea tratteggiata) ed elettroni (linea continua) alla sezione d'urto differenziale relativistica in funzione dell'energia trasferita q_0 a densità barionica $n_B = 0.2 \text{ fm}^{-3}$.

sezione d'urto sia lo stesso, notiamo che i contributi dei neutroni e dei protoni, che possiedono energie di Fermi più alte e masse effettive più piccole, si annullano per valori dell'energia trasferita maggiori rispetto al caso precedente. L'analisi della Fig. 4.9 evidenzia infine come le composizioni della materia nucleare a $n_B = 0.3 \text{ fm}^{-3}$ e $n_B = 0.2 \text{ fm}^{-3}$ siano governate dalla condizione di equilibrio β . Per densità nucleoniche maggiori, infatti, la frazione di protoni cresce, insieme alla relativa sezione d'urto, come mostrato in Fig. 4.9. Al contrario, il numero di neutroni diminuisce e questo si riflette in una probabilità di scattering minore.

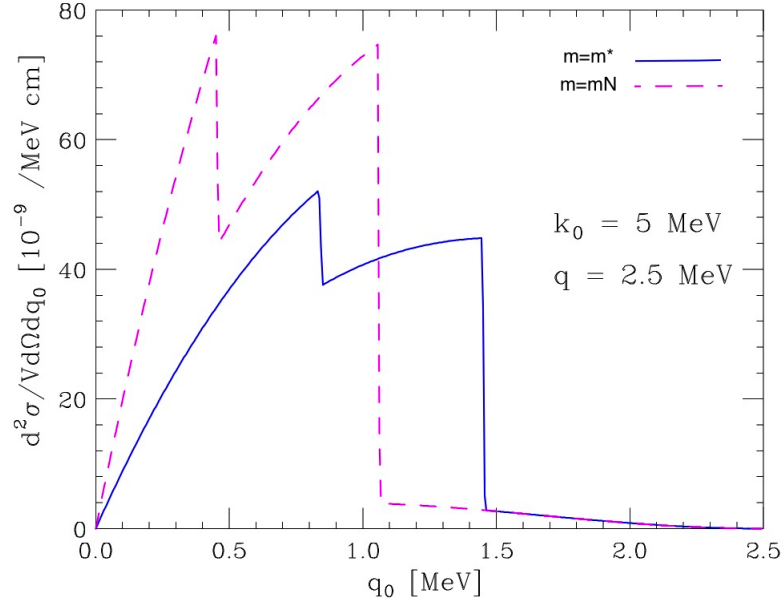


Figura 4.8. Sezione d'urto differenziale relativistica in funzione dell'energia trasferita q_0 ottenuta usando le masse effettive dell'interazione CBF per la materia β stabile (linea continua) confrontata con il risultato ottenuto usando le masse nude (linea tratteggiata). La densità barionica è $n_B = 0.3 \text{ fm}^{-3}$, l'energia del neutrino iniziale è $k_0 = 5 \text{ MeV}$ e il momento trasferito è $q = 2.5 \text{ MeV}$.

Per quanto riguarda l'analisi relativistica, le Fig. 4.10 e Fig. 4.11 rappresentano la sezione d'urto differenziale e quelle parziali degli scattering con elettroni, protoni e neutroni nelle medesime condizioni dei grafici 4.6 e 4.7. L'andamento ottenuto è sostanzialmente analogo al caso non relativistico con valori massimi di energia trasferita oltre i quali le diffusioni da parte di protoni e neutroni sono proibite. L'eccitazione della coppia particella-buca, indipendentemente dal tipo di particelle che stiamo considerando, ha un limite inferiore su q_0 determinato dalla legge di conservazione dell'energia:

$$h_0 + q_0 = p_0 \Rightarrow \sqrt{m^{*2} + \hbar^2} + q_0 = \sqrt{m^{*2} + (\vec{h} + \vec{q})^2}, \quad (4.3)$$

Poichè, per questi valori della densità barionica, il momento trasferito è $q \leq 2k_{Fi}$, con $i = e^-, p, n$, la sezione d'urto è diversa da zero per qualunque valore positivo dell'energia trasferita, in quanto $\vec{k} = -(1/2)\vec{q}$ soddisfa l'Eq.(4.3) per $q_0 = 0$.

La struttura a gradini che si riscontra, che nel limite non relativistico emerge esplicitamente attraverso la combinazione delle funzioni θ e δ , può essere derivata

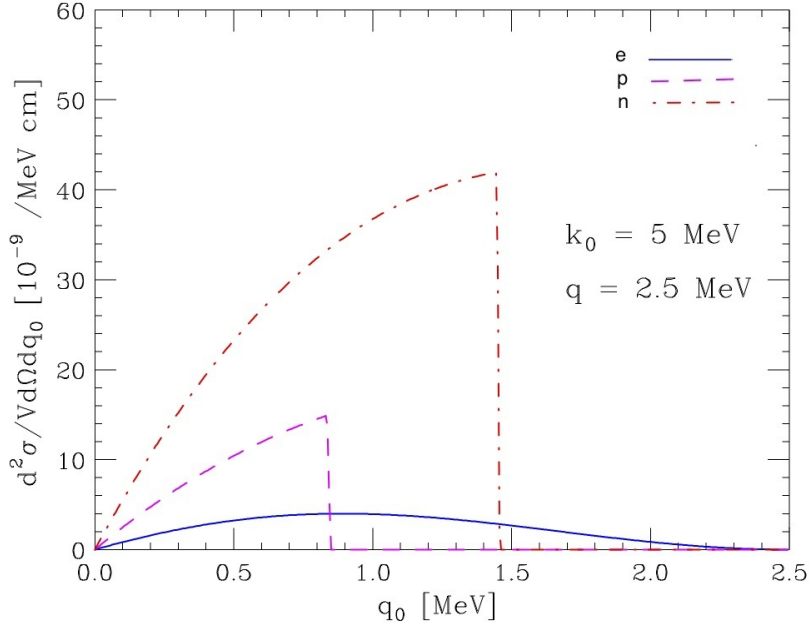


Figura 4.9. Singoli contributi dei neutroni (linea tratteggiata e con punti), protoni (linea tratteggiata) ed elettroni (linea continua) alla sezione d'urto differenziale relativistica in funzione dell'energia trasferita q_0 a densità barionica $n_B = 0.3 \text{ fm}^{-3}$.

anche in questo caso dalla legge di conservazione dell'energia, che impone:

$$\begin{aligned}
 q_0 + e_F &= \sqrt{m^{*2} + (\vec{k}_F + \vec{q})^2} \leq \sqrt{m^{*2} + (k_F + q)^2} \\
 \Rightarrow q_0 &\leq q_{0max} = \sqrt{m^{*2} + (k_F + q)^2} - e_F .
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Mentre la massa degli elettroni è tale che $m^* \ll k_F$ e $k_F \sim e_F$, da cui $q_{0max} \sim q$ è sempre soddisfatta, nel caso di protoni e neutroni il processo di interazione oltre una certa soglia non può più avvenire e la sezione d'urto corrispondente cade bruscamente a zero. Naturalmente il valore di q_0 sopra al quale la diffusione è proibita dipende dalla densità della componente che si considera: in generale, poichè l'integrazione numerica è stata effettuata sulla materia stabile, vale che $q_{0max}^p \neq q_{0max}^n$.

I grafici 4.12 e 4.13 illustrano le stesse grandezze delle Fig. 4.10 e Fig. 4.11 ma a $n_B = 0.3 \text{ fm}^{-3}$. Anche nel modello relativistico, le sezioni d'urto parziali di protoni e neutroni si annullano per valori dell'energia trasferita maggiori rispetto al caso con densità più bassa, mostrando come la conservazione dell'energia è soddisfatta per un intervallo di q_0 più largo. La differenza tra la sezione d'urto per la materia interagente e quella libera ($m^* = m_N$) è aumentata notevolmente indicando che l'effetto delle interazioni forti modifica in misura superiore la diffusione dei neutrini nel mezzo.

Le immagini 4.14 e 4.15 mostrano il comportamento della sezione d'urto in funzione del momento trasferito q , mantenendo fissati i valori dell'energia del neutrino incidente a $k_0 = 5 \text{ MeV}$ e dell'energia assorbita dal mezzo a $q_0 = 0.5, 1.3 \text{ MeV}$ rispettivamente nella Fig. 4.14 e Fig. 4.15. La relazione (4.4) si traduce in un

limite inferiore di attivazione dei processi di scattering con le varie componenti della materia, che, dato un certo q_0 , possono iniziare solo al di sopra di un impulso q_{min} . Ad energia trasferita maggiore (si confrontino la Fig. 4.14 e la Fig. 4.15), questa soglia inferiore, che è proporzionale a q_0 , aumenta e la diffusione per ogni specie di particelle è energeticamente permessa ad un momento trasferito più elevato. In entrambe le figure, la prima discontinuità si riferisce all'accensione dello scattering neutrino-neutrone mentre la seconda a quella dello scattering neutrino-protone.

Concludiamo questa Sezione, confrontando i risultati ottenuti sulle sezioni d'urto utilizzando l'interazione effettiva CBF e il modello $\sigma - \omega - \rho$. Osservando ad esempio la Fig. 4.7 e la Fig. 4.11, infatti, si nota come la sezione d'urto con i neutroni predetta dalla teoria a molti corpi è nettamente maggiore di quella calcolata nel modello relativistico con gli stessi parametri esterni. Ne consegue che nel primo caso i due valori raggiunti dalla sezione d'urto in corrispondenza dell'annullamento dei contributi protonici e neutroni sono sostanzialmente uguali, al contrario della descrizione relativistica in cui la sezione si abbassa notevolmente quando si interrompono gli scattering con i protoni. Questo comportamento deriva dalle differenti frazioni di neutroni previste nei due modelli, che, a parità di densità barionica, sono più alti nell'interazione CBF in cui il numero di protoni cresce più lentamente.

Inoltre il profilo della sezione d'urto nel modello $\sigma - \omega - \rho$ si modifica in misura maggiore all'aumentare della densità barionica rispetto al caso non relativistico, evidenziando come il numero totale di nucleoni abbia un'influenza più grande sulla dinamica del sistema.

Indipendentemente dall'approccio usato per descrivere la materia nucleare, l'effetto complessivo delle interazioni forti è un abbassamento delle sezioni d'urto comprensive delle forze reciproche tra le particelle del mezzo rispetto ai valori ottenuti all'interno di una trattazione dei nucleoni e degli elettroni del core come gas di Fermi. Segue che, in generale, il cammino libero medio dei processi di scattering dei neutrini con la materia risulta più alto se teniamo conto delle mutue interazioni tra i suoi costituenti.

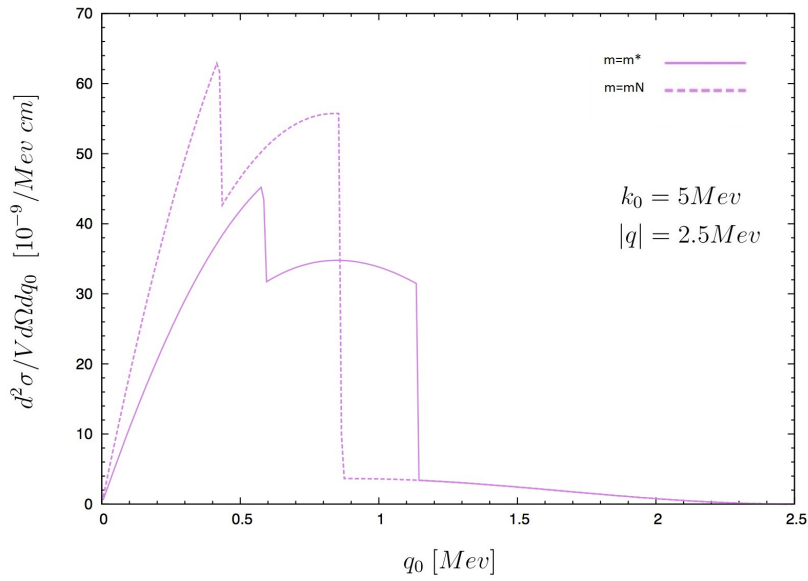


Figura 4.10. Sezione d'urto differenziale relativistica in funzione dell'energia trasferita q_0 ottenuta usando le masse effettive del modello $\sigma - \omega - \rho$ per la materia β stabile (linea continua) confrontata con il risultato ottenuto usando le masse nude (linea tratteggiata). La densità barionica è $n_B = 0.2 \text{ fm}^{-3}$, l'energia del neutrino iniziale è $k_0 = 5 \text{ Mev}$ e il momento trasferito è $q = 2.5 \text{ Mev}$.

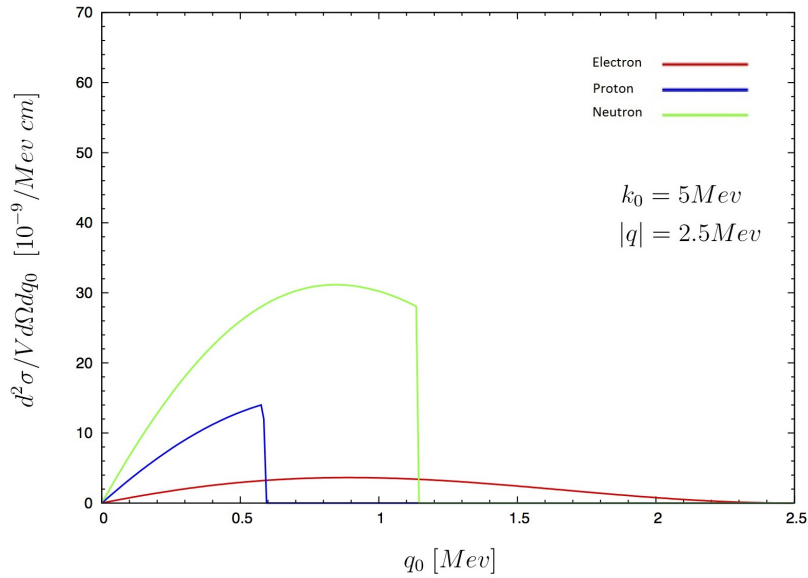


Figura 4.11. Singoli contributi dei neutroni (linea verde), protoni (linea blu) ed elettroni (linea rossa) alla sezione d'urto differenziale relativistica in funzione dell'energia trasferita q_0 a densità barionica $n_B = 0.2 \text{ fm}^{-3}$.

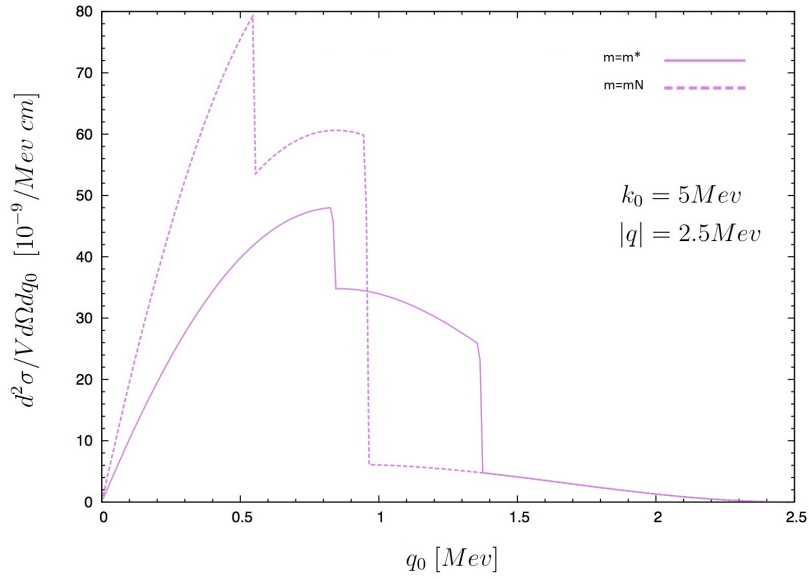


Figura 4.12. Sezione d'urto differenziale relativistica in funzione dell'energia trasferita q_0 ottenuta usando le masse effettive del modello $\sigma - \omega - \rho$ per la materia β stabile (linea continua) confrontata con il risultato ottenuto usando le masse nude (linea tratteggiata). La densità barionica è $n_B = 0.3 \text{ fm}^{-3}$, l'energia del neutrino iniziale è $k_0 = 5 \text{ Mev}$ e il momento trasferito è $q = 2.5 \text{ Mev}$.

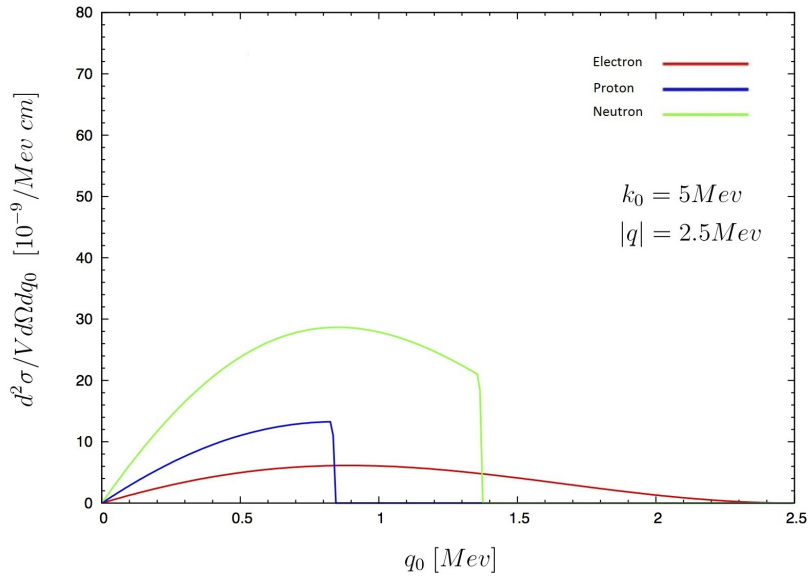


Figura 4.13. Singoli contributi dei neutroni (linea verde), protoni (linea blu) ed elettroni (linea rossa) alla sezione d'urto differenziale relativistica in funzione dell'energia trasferita q_0 a densità barionica $n_B = 0.3 \text{ fm}^{-3}$.

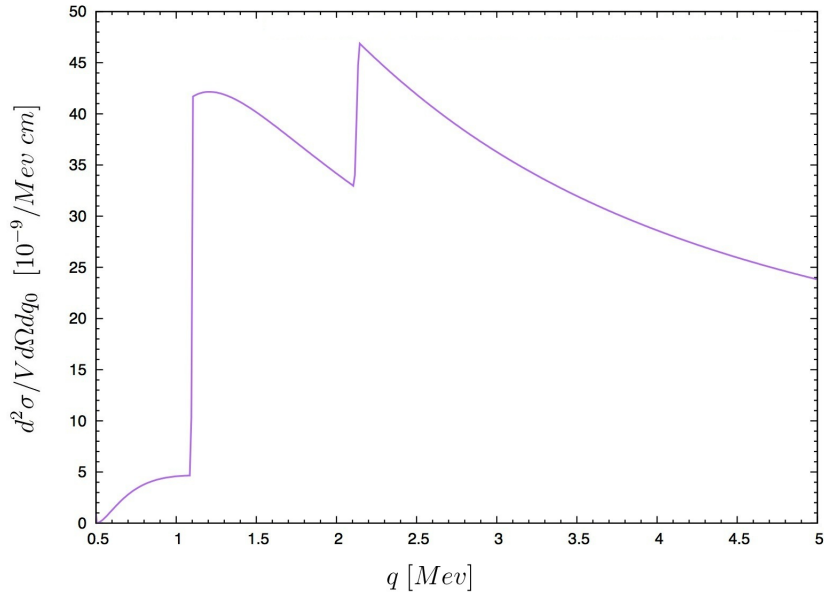


Figura 4.14. Sezione d'urto differenziale relativistica in funzione del momento trasferito q ottenuta usando le masse effettive del modello $\sigma - \omega - \rho$ per la materia β stabile. La densità barionica è $n_B = 0.2 \text{ fm}^{-3}$, l'energia del neutrino iniziale è $k_0 = 5 \text{ Mev}$ e l'energia trasferita è $q_0 = 0.5 \text{ Mev}$.

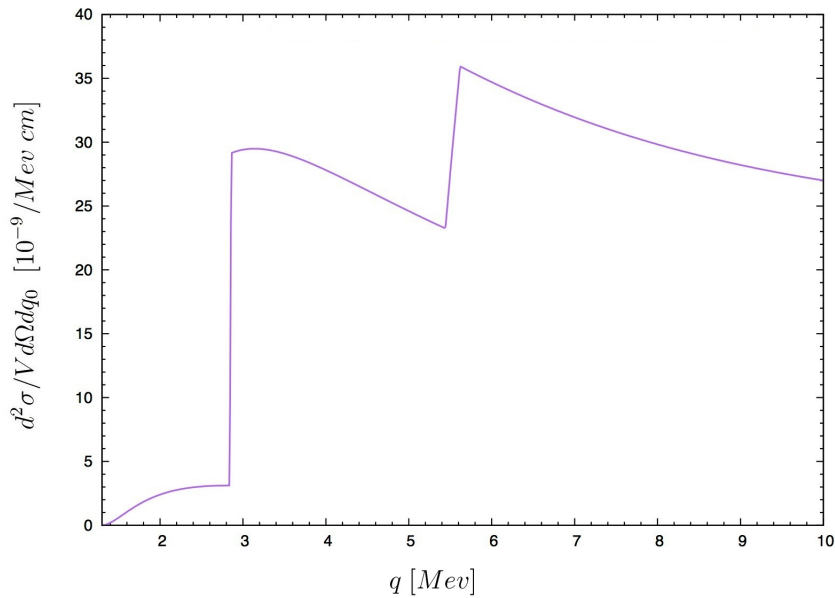


Figura 4.15. Sezione d'urto differenziale relativistica in funzione del momento trasferito q ottenuta usando le masse effettive del modello $\sigma - \omega - \rho$ per la materia β stabile. La densità barionica è $n_B = 0.2 \text{ fm}^{-3}$, l'energia del neutrino iniziale è $k_0 = 5 \text{ Mev}$ e l'energia trasferita è $q_0 = 1.3 \text{ Mev}$.

Conclusioni

Lo scopo di questa Tesi è stato lo studio della sezione d'urto di diffusione di neutrini con energia dell'ordine di qualche MeV sui protoni, neutroni ed elettroni che costituiscono la materia nel core esterno di una stella di neutroni. La conoscenza di questa grandezza è di grande importanza, poicè da essa si può ottenere il cammino libero medio dei neutrini, che è l'elemento fondamentale per la descrizione del processo di raffreddamento della stella.

In particolare, abbiamo analizzato l'effetto delle interazioni tra i nucleoni, che giocano un ruolo fondamentale nella determinazione delle configurazioni di equilibrio, confrontando i risultati ottenuti nell'ambito di due diversi approcci.

Il primo è fondato sulla descrizione non relativistica della materia nucleare e utilizza una Hamiltoniana realistica, cioè fortemente vincolata dalla fenomenologia, mentre nel secondo le interazioni tra i nucleoni sono schematizzate con lo scambio di bosoni scalari e vettoriali, descritto nel formalismo della teoria quantistica dei campi, ed il problema a molti corpi è risolto in approssimazione di campo medio.

In entrambi i casi, gli effetti della dinamica nucleare sono stati schematizzati sostituendo alla massa *nuda* dei nucleoni una massa effettiva. Questa procedura permette di confrontare in maniera consistente i due modelli considerati, ma introduce un'importante limitazione, in quanto non tiene conto degli effetti di correlazione tra le particelle interagenti.

I nostri risultati mostrano chiaramente che, indipendentemente dallo schema utilizzato per descriverli, le interazioni provocano un significativo aumento del cammino libero medio, rispetto al caso del gas di Fermi.

Gli andamenti qualitativi delle sezioni d'urto ottenute dai due approcci sono simili, anche se si osservano apprezzabili differenze, dovute sia alla diversa composizione della materia che ai valori diversi della masse effettive. L'approccio relativistico predice infatti una frazione di protoni ed una massa effettiva dei neutroni – le particelle di gran lunga più abbondanti – maggiore di quella che si ottiene dal modello non relativistico. Notiamo, a questo proposito, che la differente composizione della materia stellare implica anche notevoli differenze nel rate di produzione dei neutrini.

L'uso della teoria a molti corpi non relativistica, pienamente giustificato nel regime di densità nel quale le energie di Fermi dei nucleoni sono molto minori delle masse corrispondenti, ha l'indubbio vantaggio di permettere una descrizione degli effetti dinamici che va al dell'approssimazione di massa effettiva utilizzata nel nostro lavoro. Studi effettuati nell'ambito della teoria delle funzioni di base correlate hanno mostrato come le correlazioni, sia a corto che a lungo raggio, tra i nucleoni, siano importanti, in quanto provocano una apprezzabile riduzione degli elementi di matrice di transizione. L'approccio relativistico, pur essendo più consistente nel limite di

grande densità, richiede l'uso dell'approssimazione di campo medio, e non è quindi in grado di descrivere questi effetti.

In conclusione, i risultati del nostro studio mostrano che la dinamica nucleare gioca un ruolo importante, e deve essere inclusa se si vogliono ottenere stime realistiche del cammino libero medio dei neutrini nella materia stellare.

Dal confronto tra i due modelli considerati emergono somiglianze e differenze nelle predizioni, che pongono il problema di quale descrizione sia più accurata. La risposta a questa domanda dipende fondamentalmente dalle densità che si raggiungono all'interno della stella, e quindi dalla sua massa. Nel caso di stelle molto massive, con $M \sim 2M_{\odot}$, le densità del core interno sono presumibilmente tali da richiedere una trattazione relativistica.

Bisogna però anche tenere presente che a densità dell'ordine di $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ è ragionevole attendersi un drastico cambiamento della materia stellare, con la comparsa di barioni con stranezza non nulla, gli iperoni, e la possibile transizione dalla fase adronica ad una fase in cui i quark che costituiscono gli adroni sono deconfinati, cioè liberi di propagarsi individualmente per distanze macroscopiche.

Appendice A

Funzioni di risposta

Le quantità Π che compaiono nell'espressione della sezione d'urto differenziale nel caso relativistico presentano una parte reale e una immaginaria e includono contributi dipendenti dalla densità di particelle Π^D e contributi di Feynman Π^F . Alle funzioni R_i , con $i = 1, 2, 3$, partecipano esclusivamente le parti immaginarie $Im\Pi^D$, le cui funzioni analitiche per ogni componente della materia (p, n, e^-) sono:

$$\begin{aligned}
 Im \Pi_T^D &= \frac{1}{4\pi q} \left[\left(m^{*2} + \frac{q_\mu^2}{2} + \frac{q_\mu^4}{4q^2} \right) (e_F - E^*) \right. \\
 &\quad \left. + q_0 \frac{q_\mu^2}{2q^2} (e_F^2 - E^{*2}) + \frac{q_\mu^2}{3q^2} (e_F^3 - E^{*3}) \right] , \\
 Im \Pi_L^D &= \frac{q_\mu^2}{2\pi q^3} \left[\frac{1}{4} (e_F - E^*) q_\mu^2 + \frac{1}{2} q_0 (e_F^2 - E^{*2}) + \frac{1}{3} (e_F^3 - E^{*3}) \right] , \\
 Im \Pi_A^D &= \frac{m^{*2}}{2\pi q} (e_F - E^*) , \\
 m \Pi_M^D &= \frac{m^*}{4\pi q} [q_0 (e_F - E^*) + e_F^2 - E^{*2}] , \\
 Im \Pi_{VA}^D &= \frac{q_\mu^2}{2q^2 m^*} Im \Pi_M^D ,
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

con

$$\begin{aligned}
 E^* &= \min[e_F, E_{max}] , \\
 E_{max} &= \max[e_F - q_0, \frac{1}{2}(q\sqrt{1 - 4m^{*2}/q_\mu^2} - q_0)] .
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Il termine m^* é la massa effettiva dei nucleoni nel caso i Π si riferiscano a protoni e neutroni e la massa dell'elettrone se sono associati alla componente elettronica del core.

Bibliografia

- [1] Stuart L Shapiro and Saul A Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. Wiley-Interscience, 1983.
- [2] Georg G Raffelt. *Stars as Laboratories for Fundamental Physics*. Chicago University Press, 1996.
- [3] Attilio Ferrari. *Stelle, galassie e universo: Fondamenti di astrofisica*. Springer, 2011.
- [4] C. J. Pethick. Cooling of neutron stars. *Rev. Mod. Phys.*, 64:1133–1140, Oct 1992.
- [5] Adam Burrows, Eli Livne, Luc Dessart, CD Ott, and Jeremiah Murphy. A new mechanism for core-collapse supernova explosions. *The Astrophysical Journal*, 640(2):878, 2006.
- [6] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55:374–381, Feb 1939.
- [7] Robert B Wiringa, VGJ Stoks, and R Schiavilla. Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking. *Physical Review C*, 51(1):38, 1995.
- [8] Brian D Serot and John Dirk Walecka. Recent progress in quantum hydrodynamics. *International Journal of Modern Physics E*, 6(04):515–631, 1997.
- [9] Marcello Baldo. *Nuclear Methods and the Nuclear Equation of State*. World Scientific, 1999.
- [10] Omar Benhar. *Physics of dense matter*. 2005.
- [11] Norman K Glendenning. *Compact Stars*. Springer, 2000.
- [12] Pierre M Pizzochero. Neutron stars, the most exotic nuclear lab in the universe. *arXiv preprint arXiv:1001.1272*, 2010.
- [13] Pawel Haensel, Aleksander Yu Potekhin, and Dmitri G Yakovlev. *Neutron Stars 1*, volume 1. Springer Science+ Business Media, 2007.
- [14] Anis ben Ali Dadi. Parametrization of the relativistic σ - ω model for nuclear matter. *Physical Review C*, 82(2):025203, 2010.

- [15] SC Pieper and RB Wiringa. Quantum monte carlo calculations of light nuclei. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 51(1):53–90, 2001.
- [16] John W Clark. Variational theory of nuclear matter. *Progress in particle and nuclear physics*, 2:89–199, 1979.
- [17] Alessandro Lovato, Cristina Losa, and Omar Benhar. Weak response of cold symmetric nuclear matter at three-body cluster level. *Nuclear Physics A*, 2013.
- [18] Nicola Farina. Weak response of nuclear matter. *arXiv preprint arXiv:0901.2507*, 2009.
- [19] BS Pudliner, VR Pandharipande, J Carlson, and Robert B Wiringa. Quantum monte carlo calculations of a less than 6 nuclei. *Physical review letters*, 74(22):4396–4399, 1995.
- [20] SA Chin and JD Walecka. An equation of state for nuclear and higher-density matter based on relativistic mean-field theory. *Physics Letters B*, 52(1):24–28, 1974.
- [21] J Boguta and AR Bodmer. Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface. *Nuclear Physics A*, 292(3):413–428, 1977.
- [22] P Haensel. Composition of dense matter and neutrino cooling of neutron stars. *Acta Physica Polonica*, 25:373, 1994.
- [23] DG Yakovlev, AD Kaminker, O Yu Gnedin, and P Haensel. Neutrino emission from neutron stars. *Physics Reports*, 354(1):1–155, 2001.
- [24] DG Yakovlev and CJ Pethick. Neutron star cooling. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 42:169–210, 2004.
- [25] Sanjay Reddy, Madappa Prakash, and James M Lattimer. Neutrino interactions in hot and dense matter. *Physical Review D*, 58(1):013009, 1998.
- [26] CJ Horowitz and K Wehrberger. Neutrino neutral current interactions in nuclear matter. *Nuclear Physics A*, 531(3):665–684, 1991.