



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Studio del cammino libero medio dei neutrini nelle stelle di neutroni

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Candidato

Giuseppe Galesi
Matricola 1558465

Relatore

Prof. Omar Benhar Noccioli

Anno Accademico 2017/2018

Studio del cammino libero medio dei neutrini nelle stelle di neutroni

Tesi di Laurea Magistrale. Sapienza – Università di Roma

© 2018 Giuseppe Galesi. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L^AT_EX e la classe Saphthesis.

Email dell'autore: galesi.1558465@studenti.uniroma1.it

*Alla mia famiglia,
a Simona
e alla bellezza delle leggi della natura.*

Indice

1	Materia nucleare ad alta densità	3
1.1	Miscela di gas fermionici	3
1.2	Potenziale di tipo Skyrme	4
1.3	Termodinamica	8
1.3.1	Pressione	9
1.3.2	Energia interna ed equazione di stato	11
1.3.3	Entropia	11
1.3.4	Termodinamica della miscela	12
1.4	Composizione chimica	13
1.4.1	Equilibrio chimico	13
1.4.2	Potenziali chimici a temperatura finita	15
1.4.2.1	Stima dell'errore	16
1.4.2.2	Densità dei leptoni	20
1.4.2.3	Densità dei barioni	20
1.4.2.4	Pressione dei leptoni	21
1.4.2.5	Pressione dei barioni	21
1.4.2.6	Potenziali chimici efficaci e potenziali di Skyrme	21
1.4.3	Risultati numerici	23
1.4.3.1	Concentrazioni e potenziali chimici	23
1.4.3.2	Pressione e entropia	27
1.4.3.3	Massa efficace di Landau e potenziale di Skyrme	28
1.4.4	Approssimazione a basse temperature	31
1.4.4.1	Approssimazione analitica dei potenziali	31
1.4.4.2	Termodinamica del gas di Fermi	36
2	Opacità di neutrino	39
2.1	Canale di assorbimento principale	39
2.1.1	Calcolo preliminare dell'ampiezza	39
2.1.2	Calcolo dei tensori mediati sulle polarizzazioni	43

2.1.2.1	Nucleoni	46
2.1.2.2	Leptoni	47
2.1.3	Rate di transizione	48
2.1.4	Sezione d'urto per fasci di particelle	50
2.1.5	Sezione d'urto nella miscela di gas	51
2.2	Libero cammino medio del neutrino	53
2.2.1	Nucleoni nel modello di potenziale di Skyrme	54
2.2.2	Approssimazione di alta degenerazione	58
2.2.3	Barioni non interagenti	62
2.2.4	Risultati	64
3	Stella di neutroni	68
3.1	Struttura stellare	69
3.1.1	Equazione di stato politropica	69
3.1.2	Equazioni della struttura stellare	71
3.1.2.1	LICF	72
3.1.2.2	Tensore energia impulso	72
3.1.2.3	Equazioni di campo di Einstein	73
3.1.2.4	Equazioni Tolman–Oppenheimer–Volkoff	76
3.1.2.5	Esterno della stella	77
3.1.2.6	Generalizzazione dell'equazione di Lane-Emden	78
3.1.3	Risultati numerici	81
3.1.3.1	Proprietà generale delle stelle politropiche	81
3.1.3.2	Confronto con la densità barionica	84
3.2	Stella standard	86
3.2.1	Proprietà della stella standard	86
3.2.2	Neutrini nella stella standard	89
A	Potenziale medio di singola particella	93
B	Potenziale chimico a basse temperature	97
	Bibliografia	101

Introduzione

La comprensione del comportamento dei neutrini nella materia nucleare ad alta densità si rivela essere un elemento chiave nello studio di sistemi astrofisici compatti come le protostelle di neutroni. Un aspetto fondamentale di tale comportamento è il libero cammino medio dei neutrini quando la materia si trova all'equilibrio β .

L'evoluzione delle stelle di neutroni passa attraverso una fase in cui i neutrini sono intrappolati sui tempi dinamici di evoluzione della struttura stellare, e la loro presenza altera significativamente la composizione della stella rispetto alla situazione in cui i neutrini non sono più confinati. In questa fase, detta appunto di protostella di neutroni, che segue l'esplosione di supernova di una stella di massa iniziale nel range $\sim 4 M_{\odot} \leq M \leq 20 - 30 M_{\odot}$, la temperatura è dell'ordine delle decine di MeV (in unità $c = \hbar = k_B = 1$) e, nonostante le densità elevate che comportano un alto grado di degenerazione della materia, costituita sostanzialmente di neutroni, protoni, elettroni e, appunto, neutrini, sono importanti gli effetti termici di natura non degenera.

In questa fase la stella perde lentamente neutrini, in un processo noto come deleptonizzazione. I neutrini trasportano una notevole quantità di energia all'esterno della stella provocandone il progressivo raffreddamento. Tutto ciò ha delle importanti conseguenze sulla massa stabile più elevata che la protostella di neutroni può possedere, e la presenza o meno dei neutrini altera significativamente questo limite massimo.

In questo studio preliminare ci siamo riproposti di valutare a tre differenti temperature (5, 30 e 60 MeV) la composizione della materia nucleare ad alta densità. Le temperature sono state scelte per poter confrontare i risultati con quelli già ottenuti da Reddy S. *et al.* e riportati in [11].

È stato necessario utilizzare un valido modello di interazione forte tra i barioni considerati (in questo caso solo neutroni e protoni) e la scelta è ricaduta su un modello di campo medio, descritto in [9], in cui i nucleoni vengono trattati come non relativistici. Questo limita i valori di densità che possono essere studiati con un tale modello perché comporta la comparsa, a concentrazioni troppo elevate, di comportamento acausale della materia che si manifesta in un valore della velocità del suono maggiore della velocità della luce. Inoltre, vengono ignorati contributi

dinamici, soprattutto alla pressione totale, dovuti alle correlazioni tra i nucleoni, che non vengono considerate dalla teoria di campo medio. I valori di densità barionica esaminati in questo lavoro si sviluppano su un range che va da $0.25 n_0$ a $5 n_0$, con $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ la densità dell'equilibrio nucleare.

Il lavoro è stato suddiviso in tre parti fondamentalmente, che corrispondono ai tre capitoli in cui è suddivisa la tesi.

Come prima cosa ci si è concentrati sull'individuazione della composizione chimica della materia nucleare ad alta densità, all'equilibrio β con neutrini intrappolati ad un rapporto $Y_L = 0.4$ tra la componente leptonica e quella barionica e per neutrini non intrappolati. Nel Capitolo 1, dopo una breve introduzione sul tipo di potenziale di interazione forte utilizzato (sezione 1.2), vengono mostrati i calcoli, fondamentalmente basati sulla definizione delle distribuzioni di Fermi delle varie specie chimiche e delle variabili termodinamiche, necessari a identificare le percentuali delle varie componenti in funzione della densità (sezioni 1.3 e 1.4). In particolare è riportata in 1.4.2, a titolo d'esempio, un'analisi sul controllo degli errori per il calcolo numerico degli integrali di Fermi. Vengono quindi mostrati i risultati a temperatura finita e, sia per confronto con la stella di neutroni fredda che per controllo della validità dei risultati numerici a temperatura finita, i risultati equivalenti ottenuti in approssimazione di degenerazione (sottosezione 1.4.4).

Nella Capitolo 2 calcoliamo innanzitutto l'ampiezza di transizione per il canale di assorbimento principale del neutrino (sezione 2.1) e mostriamo la forma generale della sezione d'urto. Quindi riportiamo i passaggi per semplificare l'espressione del libero cammino medio, che diventa così di facile calcolo numerico (sezione 2.2), insieme ai risultati espressi sempre in funzione della densità barionica, con o senza interazione tra i barioni, in tutte le configurazioni in cui è stata valutata la composizione chimica nel Capitolo 1. Inoltre viene mostrato il confronto tra i risultati numerici e quelli ottenuti in approssimazione di alta degenerazione, mostrando l'evidente necessità di ricorrere al calcolo numerico.

Nel Capitolo 3 usiamo i risultati del Capitolo 1 per ricavare un'espressione analitica politropica come approssimazione dell'equazione di stato (sottosezione 3.1.1). Questa viene quindi usata per ricavare la struttura stellare mediante le equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff e ottenere l'andamento della massa e del raggio stellare in funzione della densità, e in particolare la massa massima della stella. Fatto questo si confrontano i dati sul libero cammino medio del neutrino ricavati nel Capitolo 2 con il raggio stellare.

Riportiamo infine le conclusioni del nostro lavoro e accenniamo brevemente alle applicazioni e a eventuali futuri sviluppi.

Capitolo 1

Materia nucleare ad alta densità

1.1 Miscela di gas fermionici

Siamo interessati allo studio di una miscela di neutrini elettronici, elettroni, neutroni e protoni all'equilibrio chimico. La distribuzione degli impulsi di ciascuna delle precedenti specie di particelle sarà descritta dalla funzione di Fermi:

$$f_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{e_i(\mathbf{k}) - \mu_i}{T}\right]} \quad (1.1.1)$$

con T la temperatura assoluta, e_i l'energia di singola particella di impulso \mathbf{k} (che non include in questo schema il termine di massa m_i) e μ_i il potenziale chimico della specie i -esima. La f è tale che il numero totale di fermioni della specie i -esima N_i , di spin S_i , contenuti nel volume V e di impulso compreso nel volume Σ è, nel limite termodinamico,

$$N_i(\Sigma) = \frac{(2S_i + 1)V}{(2\pi)^3} \int_{\Sigma} d^3\mathbf{k} f(\mathbf{k}). \quad (1.1.2)$$

Nel limite di neutrini ultrarelativistici non interagenti levogiri¹, quindi con elicità definita negativa, il numero totale di particelle è la metà del numero di stati disponibili, perché gli stati che corrispondono all'autovalore 1 dell'elicità non sono occupati.

Come si vede f dipende da \mathbf{k} solo attraverso e_i , che assumeremo dipendere solo dal modulo di \mathbf{k} , il che consente, passando a coordinate sferiche o cilindriche, di eliminare due integrazioni.

Si rivela fondamentale la conoscenza dello spettro di singola particella per calcolare l'equazione di stato della miscela. A sua volta questa richiede un modello di interazione efficace forte tra i barioni, mentre si assume trascurabile il contributo delle interazioni

¹Il modello standard non contempla, nella sua forma più semplice, l'esistenza di neutrini destrigiri interagenti con gli altri campi fondamentali.

che coinvolgono i leptoni, e delle interazioni elettrodeboli in generale, alla densità di energia complessiva. Esamineremo in particolare un modello semianalitico che tenga conto dell'interazione forte tra i barioni, che vengono trattati come non relativistici.

1.2 Potenziale di tipo Skyrme

Descriviamo le interazioni forti tra i nucleoni mediante un potenziale schematico medio, introdotto in [9], atto a riprodurre i risultati di calcoli più microscopici sulla materia nucleare simmetrica² e sulla materia ricca di neutroni a temperatura nulla, e che possono essere estesi a temperatura finita.

Esprimiamo la densità di energia ϵ della materia barionica come

$$\epsilon = \epsilon_n^{(\text{cinetica})} + \epsilon_p^{(\text{cinetica})} + \mathcal{V}(u, x, T) \quad (1.2.1)$$

con $u = \frac{n_B}{n_0}$, essendo $n_B = \frac{N_n + N_p}{V}$ la densità barionica e $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ la densità della materia all'equilibrio nucleare, e $x = \frac{n_p}{n_B}$ con $n_p = \frac{N_p}{V}$ la densità protonica. La componente cinetica è data da

$$\epsilon^{(\text{cinetica})} = \epsilon_n^{(\text{cinetica})} + \epsilon_p^{(\text{cinetica})} = 2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{2m} (f_n + f_p) \quad (1.2.2)$$

con f_i le distribuzioni di Fermi-Dirac delle specie barioniche e m la massa dei nucleoni, che approssimeremo ad un valore comune per protoni e neutroni. Mentre la componente di interazione è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(u, x, T) = & An_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^2 \\ & + \frac{Bn_0 \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^{\sigma+1}}{1 + B'n_0 \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^{\sigma-1}} \\ & + \frac{2}{5} u \sum_{i=1,2} \left\{ (2C_i + 4Z_i) 2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}, \Lambda_i) (f_n + f_p) \right. \\ & \left. + (C_i - 8Z_i) 2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}, \Lambda_i) [f_n (1 - x) + f_p x] \right\}, \quad (1.2.3) \end{aligned}$$

che come si vede dipende da una moltitudine di parametri il cui valore viene fissato dai dati empirici sulla materia nucleare simmetrica, e da g che è una funzione che esprime la dipendenza dell'interazione dall'impulso delle particelle e per la quale si esaminerà una forma appropriata. Nel seguito assumeremo che sia $B' = 0$ così che il

²Per materia nucleare simmetrica si intende una miscela costituita in egual misura da neutroni e protoni.

denominatore del secondo termine, introdotto per schermare contributi fortemente repulsivi che, crescendo molto più che linearmente al crescere della densità, provocano effetti di acausalità (velocità del suono superiore alla velocità della luce nel vuoto), si riduce a 1.

La densità di energia è espressa in termini degli spettri di singola particella e_i dalla relazione

$$\epsilon = 2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (e_n f_n + e_p f_p). \quad (1.2.4)$$

Quindi lo spettro di ciascuna specie barionica è ricavabile mediante differenziazione funzionale parziale di ϵ inteso come funzionale di f_n e f_p . Si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{\delta\epsilon[f_n, f_p]}{\delta f_n(\mathbf{k})}(\mathbf{k}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon[f_n + \varepsilon\delta_{\mathbf{k}}^{(3)}, f_p] - \epsilon[f_n, f_p]}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\varepsilon} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e_n \varepsilon \delta_{\mathbf{k}}^{(3)} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} e_n(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

con $\delta_{\mathbf{k}}^{(3)}$ la delta di Dirac tridimensionale centrata in \mathbf{k} . Analogamente per i protoni. Per cui

$$\begin{aligned} e_\alpha(\mathbf{k}) &= \frac{(2\pi)^3}{2} \frac{\delta(\epsilon^{(\text{cinetica})} + \mathcal{V})[f_n, f_p]}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{k^2}{2m} + \frac{(2\pi)^3}{2} \frac{\delta\mathcal{V}[f_n, f_p]}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

con $\alpha = n, p$. Definiamo il potenziale medio di singola particella U come

$$U_\alpha \equiv \frac{(2\pi)^3}{2} \frac{\delta\mathcal{V}[f_n, f_p]}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} \quad (1.2.7)$$

di modo che

$$e_\alpha(\mathbf{k}) = \frac{k^2}{2m} + U_\alpha(\mathbf{k}). \quad (1.2.8)$$

Sostituendo la (1.2.3) nella (1.2.7) (il calcolo completo è riportato in Appendice A)

si ottiene

$$\begin{aligned}
U_\alpha(\mathbf{k}; u, x, T) &= A \left[1 \mp \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) (1 - 2x) \right] u \\
&+ B \left[(\sigma + 1) \mp \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x) \right. \\
&- \left. \frac{2}{3} (\sigma - 1) \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^\sigma \\
&+ \frac{1}{n_0} \frac{2}{5} \sum_{i=1,2} \left\{ (2C_i + 4Z_i) 2 \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) f_{\alpha'} \right. \\
&+ \left. (3C_i - 4Z_i) 2 \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) f_\alpha \right\} \\
&+ \frac{1}{5} u \sum_{i=1,2} [5C_i \pm (C_i - 8Z_i) (1 - 2x)] g(\mathbf{k}, \Lambda_i), \quad (1.2.9)
\end{aligned}$$

con $\alpha' \neq \alpha$. Assumiamo adesso la seguente forma approssimata per la funzione g :

$$g(\mathbf{k}, \Lambda_i) = 1 - \left(\frac{k}{\Lambda_i} \right)^2. \quad (1.2.10)$$

È proprio questo andamento approssimato di interazione locale con dipendenza quadratica dall'impulso che comporta, se non opportunamente schermata, la comparsa di comportamento acausale ad alti valori della densità.

In questo modo il potenziale di singola particella può essere scritto nella forma

$$U_\alpha(k; u, x, T) = \tilde{U}_\alpha(u, x, T) - \frac{k^2}{5} u \sum_{i=1,2} [5C_i \pm (C_i - 8Z_i) (1 - 2x)] \frac{1}{\Lambda_i^2} \quad (1.2.11)$$

con \tilde{U}_α indipendente da k , che chiameremo potenziale di singola particella costante.

Lo spettro di singola particella assume allora la forma seguente

$$e_\alpha(k; u, x, T) = \frac{k^2}{2m_\alpha^*(u, x, T)} + \tilde{U}_\alpha(u, x, T) \quad (1.2.12)$$

essendo m_α^* una massa efficace di Landau opportunamente definita. Evidentemente deve essere

$$\frac{1}{2m_\alpha^*} = \frac{1}{2m} - \frac{1}{5} u \sum_{i=1,2} [5C_i \pm (C_i - 8Z_i) (1 - 2x)] \frac{1}{\Lambda_i^2} \quad (1.2.13)$$

ovvero

$$\frac{m_\alpha^*}{m} = \left\{ 1 - \frac{1}{5E_F^{(0)}} u \sum_{i=1,2} [5C_i \pm (C_i - 8Z_i)(1 - 2x)] \frac{1}{R_i^2} \right\}^{-1}. \quad (1.2.14)$$

essendo

$$R_i \equiv \frac{\Lambda_i}{k_F^{(0)}}, \quad (1.2.15)$$

con $k_F^{(0)}$ l'impulso di Fermi della materia nucleare simmetrica alla densità dell'equilibrio nucleare $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, quindi

$$k_F^{(0)} = \left(\frac{3\pi^2 n_0}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (1.2.16)$$

e $E_F^{(0)}$ la corrispondente energia di Fermi

$$E_F^{(0)} = \frac{[k_F^{(0)}]^2}{2m}. \quad (1.2.17)$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) f_\alpha &= 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \left[1 - \left(\frac{k}{\Lambda_i} \right)^2 \right] f_\alpha \\ &= n_\alpha - \frac{3m_\alpha^* p_\alpha}{2m R_i^2 E_F^{(0)}}, \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

in cui abbiamo definito

$$p_\alpha \equiv \frac{2}{3m_\alpha^*} \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} k^2 f_\alpha, \quad (1.2.19)$$

che dimostriamo di seguito essere la pressione dovuta ai barioni α , così che

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_\alpha(\mathbf{k}; u, x, T) &= A \left[1 \mp \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) (1 - 2x) \right] u \\
&+ B \left[(\sigma + 1) \mp \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x) \right. \\
&- \left. \frac{2}{3} (\sigma - 1) \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^\sigma \\
&+ \frac{1}{n_0} \frac{2}{5} \sum_{i=1,2} \left[(2C_i + 4Z_i) \left(n_{\alpha'} - \frac{3m_{\alpha'}^* p_{\alpha'}}{2mR_i^2 E_F^{(0)}} \right) \right. \\
&+ \left. (3C_i - 4Z_i) \left(n_\alpha - \frac{3m_\alpha^* p_\alpha}{2mR_i^2 E_F^{(0)}} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{5} u \sum_{i=1,2} [5C_i \pm (C_i - 8Z_i) (1 - 2x)]. \tag{1.2.20}
\end{aligned}$$

I valori dei parametri sono riportati in Tabella 1.1 e sono quelli utilizzati in [11].

Tabella 1.1. Valori dei parametri del potenziale di singola particella utilizzato, ricavati fittando i dati empirici sulle proprietà di equilibrio della materia nucleare simmetrica utilizzando un'incompressibilità nucleare $K_0 = 180$ MeV. Tutte le quantità riportate sono espresse in MeV eccetto σ , x_0 , x_3 , R_1 e R_2 che sono invece adimensionali.

A	B	B'	σ	C_1	C_2	x_0	x_3	Z_1	Z_2	R_1	R_2
159.47	-109.04	0	0.844	-41.28	23	-0.410	-0.5	-11.56	-4.421	1.5	3

Il potenziale così ottenuto è denominato SL2 in [9].

1.3 Termodinamica

Gli spettri che andremo ad utilizzare saranno allora i seguenti

$$e_{\text{leptone}}(\mathbf{k}) = k \tag{1.3.1}$$

$$e_{\text{barione}}(\mathbf{k}) = \frac{k^2}{2m^*} + \tilde{U}. \tag{1.3.2}$$

Grazie ad essi è possibile ricavare tutta la termodinamica e in particolare l'equazione di stato.

1.3.1 Pressione

La pressione è definita come la forza esercitata dal gas su un elemento di superficie Σ di area A in conseguenza degli urti elastici delle particelle con lo stesso in un intervallo di tempo infinitesimo Δt diviso per A .

Sia x la direzione ortogonale a Σ . La forza esercitata è data dall'impulso complessivo trasferito nell'intervallo di tempo Δt diviso Δt stesso. Ciascuna particella che urta Σ e viene elasticamente riflessa trasferisce una quantità di impulso $2k_x$, essendo k_x la componente del suo impulso lungo la direzione x . Inoltre contribuiranno tutte e sole quelle particelle che si trovano a una distanza Δx minore di $|v_x| \Delta t$ da Σ e con $v_x \geq 0$ essendo v_x la componente x della velocità. Dalla (1.1.1) si ha quindi

$$p = \frac{s}{A\Delta t} \int_V d^3\mathbf{r} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{2k_x \Theta(v_x) \Theta(v_x \Delta t - x)}{1 + \exp\left[\frac{\epsilon(\mathbf{k}) - \mu}{T}\right]} \quad (1.3.3)$$

con Θ la funzione a gradino:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \quad (1.3.4)$$

La degenerazione s tiene conto della molteplicità degli stati con un valore definito dell'impulso, quindi vale 2 per elettroni e barioni e 1 per i neutrini. Ora bisogna applicare lo spettro specifico per il tipo di particelle considerate. Infatti la relazione tra \mathbf{k} e \mathbf{v} cambia.

La velocità è definita come

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\epsilon}{d\mathbf{k}}(\mathbf{k}) \quad (1.3.5)$$

e quindi è

$$\mathbf{v}_{\text{leptone}} = \frac{\mathbf{k}}{k} = \hat{\mathbf{k}} \quad (1.3.6)$$

per i leptoni, mentre è

$$\mathbf{v}_{\text{barione}} = \frac{\mathbf{k}}{m^*} \quad (1.3.7)$$

per i barioni. Allora

$$\begin{aligned}
p_{\text{leptone}} &= \frac{s}{A\Delta t} \int_V \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{2k_x \Theta\left(\frac{k_x}{k}\right) \Theta\left(\frac{k_x}{k}\Delta t - x\right)}{1 + \exp[\beta(k - \mu)]} \\
&= \frac{s}{4\pi^3} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \int_{-\infty}^\infty dk_z \frac{\frac{k_x^2}{k}}{1 + \exp[\beta(k - \mu)]} \\
&= \frac{s}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{\frac{k_x^2}{k}}{1 + \exp[\beta(k - \mu)]} \\
&= \frac{s}{24\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{k}{1 + \exp[\beta(k - \mu)]} \\
&= \frac{s}{6\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{1 + \exp[\beta(k - \mu)]} \tag{1.3.8}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
p_{\text{barione}} &= \frac{s}{A\Delta t} \int_V \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{2k_x \Theta\left(\frac{k_x}{m^*}\right) \Theta\left(\frac{k_x}{m^*}\Delta t - x\right)}{1 + \exp\left[\beta\left(\frac{k^2}{2m^*} + \tilde{U} - \mu\right)\right]} \\
&= \frac{s}{4\pi^3 m^*} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \int_{-\infty}^\infty dk_z \frac{\frac{k_x^2}{k}}{1 + \exp\left[\beta\left(\frac{k^2}{2m^*} + \tilde{U} - \mu\right)\right]} \\
&= \frac{s}{8\pi^3 m^*} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{\frac{k_x^2}{k}}{1 + \exp\left[\beta\left(\frac{k^2}{2m^*} + \tilde{U} - \mu\right)\right]} \\
&= \frac{s}{24\pi^3 m^*} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{k^2}{1 + \exp\left[\beta\left(\frac{k^2}{2m^*} + \tilde{U} - \mu\right)\right]} \\
&= \frac{s}{6\pi^2 m^*} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{1 + \exp\left[\beta\left(\frac{k^2}{2m^*} + \tilde{U} - \mu\right)\right]}, \tag{1.3.9}
\end{aligned}$$

essendo $\beta \equiv \frac{1}{T}$.

Per barioni interagenti occorre ossevare che, poiché lo spettro utilizzato deriva da un'approssimazione di campo medio con la quale, di fatto, si perdono le informazioni su effetti di correlazione che dipendono dalla posizione relativa di più particelle, oltre che dalla posizione assoluta di ciascuna di esse nel campo medio di interazione forte, l'espressione così ricavata per la pressione ignora contributi dinamici derivanti da questa correlazione che non sono trascurabili alle densità più elevate.

1.3.2 Energia interna ed equazione di stato

L'energia interna E è la somma delle energie di singola particella, esclusa l'energia a riposo. Quindi

$$\begin{aligned} E_{\text{leptone}} &= sV \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k}{1 + \exp[\beta(k - \mu)]} \\ &= \frac{sV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{1 + \exp[\beta(k - \mu)]} \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

e

$$\begin{aligned} E_{\text{barione}} &= sV \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\frac{k^2}{2m^*} + \tilde{U}}{1 + \exp\left[\beta\left(\frac{k^2}{2m^*} + \tilde{U} - \mu\right)\right]} \\ &= \frac{sV}{4\pi^2 m^*} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{1 + \exp\left[\beta\left(\frac{k^2}{2m^*} + \tilde{U} - \mu\right)\right]} + N\tilde{U}. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Si ottengono quindi le seguenti equazioni di stato

$$E_{\text{leptone}} = 3p_{\text{leptone}}V \quad (1.3.12)$$

$$E_{\text{barione}} = \frac{3}{2}p_{\text{barione}}V + N_{\text{barione}}\tilde{U} \quad (1.3.13)$$

ovvero

$$p_{\text{leptone}} = \frac{1}{3}\epsilon_{\text{leptone}} \quad (1.3.14)$$

$$p_{\text{barione}} = \frac{2}{3}\epsilon_{\text{barione}} - \frac{2}{3}n_{\text{barione}}\tilde{U}. \quad (1.3.15)$$

1.3.3 Entropia

L'entropia è definita, a meno di una costante additiva, come il logaritmo della molteplicità degli stati che, per un gas di Fermi, è data da

$$S = sV \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{1 + \xi} \ln(\xi) + \ln\left(\frac{1 + \xi}{\xi}\right) \right] \quad (1.3.16)$$

con

$$\xi = z^{-1} \exp(\beta e), \quad (1.3.17)$$

essendo

$$z \equiv \exp(\beta\mu) \quad (1.3.18)$$

la fugacità. Quindi

$$e = T (\ln z + \ln \xi) \quad (1.3.19)$$

e

$$sV \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 + \xi} = N \quad (1.3.20)$$

$$sVT \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\ln \xi}{1 + \xi} = E - T \ln z N. \quad (1.3.21)$$

Allora si ha

$$S = \frac{E - \mu N}{T} + sV \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln \left(\frac{1 + \xi}{\xi} \right). \quad (1.3.22)$$

L'ultimo termine si può integrare per parti. Si ha

$$\begin{aligned} sV \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln \left(\frac{1 + \xi}{\xi} \right) &= sV \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln [1 + z \exp(-\beta e)] \\ &= \frac{sV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln [1 + z \exp(-\beta e)] \\ &= \frac{sV}{2\pi^2} \frac{k^3}{3} \ln [1 + z \exp(-\beta e)] \Big|_0^\infty \\ &\quad + \frac{sV\beta}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{3} \frac{v}{1 + z^{-1} \exp(\beta e)} \\ &= \frac{pV}{T}. \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Quindi

$$S = \frac{E - \mu N + pV}{T} \quad (1.3.24)$$

ovvero la prima legge della termodinamica

$$E = ST - pV + \mu N. \quad (1.3.25)$$

1.3.4 Termodinamica della miscela

La densità d'energia interna totale ϵ_{totale} della miscela considerata è quindi data da

$$\epsilon_{\text{totale}} = \sigma_{\text{totale}} T - p_{\text{totale}} + \sum_i \mu_i n_i \quad (1.3.26)$$

essendo $\sigma_{\text{totale}} = \frac{1}{V} \sum_i S_i$ e $p_{\text{totale}} = \sum_i p_i$ rispettivamente l'entropia specifica e la pressione totali.

1.4 Composizione chimica

1.4.1 Equilibrio chimico

Se le specie chimiche presenti sono quelle considerate di neutroni, protoni, elettroni e neutrini elettronici, che assumiamo confinati tutti nel medesimo volume, l'equilibrio corrisponde allora ad una condizione di minimo della densità di energia³. Tutte le reazioni note tra queste specie di particelle conservano la carica elettrica e il numero barionico. Se l'energia delle particelle è sufficientemente elevata da innescare le reazioni di decadimento beta inverso o le reazioni di assorbimento neutrino che vogliamo qui studiare allora possono avvenire trasformazioni di sapore leptonico all'interno della stessa famiglia. In sostanza il numero di elettroni e il numero di neutrini elettronici può variare. Non però il numero leptonico che invece continua ad essere conservato.

Per trovare la condizione di equilibrio chimico per questa miscela di particelle mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, assumendo che la carica elettrica complessiva sia nulla (neutralità di carica), definiamo allora la funzione

$$F(n_p, n_n, n_e, n_{\nu_e}, \lambda_Q, \lambda_B, \lambda_L) \equiv \epsilon(n_p, n_n, n_e, n_{\nu_e}) + \lambda_Q(n_p - n_e) + \lambda_B(n_B - n_p - n_n) + \lambda_L(n_L - n_e - n_{\nu_e}), \quad (1.4.1)$$

essendo n_i la densità numerica della specie i di particelle. In particolare n_B e n_L , che è la densità di leptoni, sono quantità fisse. Possiamo quindi definire Y_L tale che

$$n_L = Y_L n_B \quad (1.4.2)$$

ed esprimere n_L in funzione di n_B . Naturalmente, poiché il numero di elettroni è uguale al numero di protoni, il numero di leptoni deve essere maggiore o uguale al numero di protoni e quindi

$$Y_L \geq y_p. \quad (1.4.3)$$

La funzione $\epsilon = \frac{E}{V}$ è la densità di energia della miscela, che dobbiamo minimizzare, mentre λ_Q , λ_B e λ_L sono moltiplicatori di Lagrange. La condizione di equilibrio si trova imponendo l'annullamento del gradiente di F . Dalle derivate rispetto alle

³Stiamo assumendo che il sistema sia meccanicamente e termicamente isolato, quindi non si ha perdita di energia sotto forma di radiazione.

densità si trova il sistema di equazioni

$$\mu_p + \lambda_Q - \lambda_B = 0 \quad (1.4.4)$$

$$\mu_n - \lambda_B = 0 \quad (1.4.5)$$

$$\mu_e - \lambda_Q - \lambda_L = 0 \quad (1.4.6)$$

$$\mu_{\nu_e} - \lambda_L = 0 \quad (1.4.7)$$

essendo

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = \frac{\partial \epsilon}{\partial n_i} = \mu_i \quad (1.4.8)$$

il potenziale chimico della specie i -esima, come si ricava dalla (1.3.26) mantenendo fisse tutte le grandezze globali e variando solo le densità delle singole specie chimiche. Da qui si trova

$$\mu_e - \mu_{\nu_e} = \mu_n - \mu_p. \quad (1.4.9)$$

Ovviamente dalle derivate rispetto ai moltiplicatori si ritrovano le condizioni di conservazione dei numeri quantici:

$$n_p + n_e = 0 \quad (1.4.10)$$

$$n_p + n_n = n_B \quad (1.4.11)$$

$$n_e + n_{\nu_e} = Y_L n_B. \quad (1.4.12)$$

Se invece assumiamo che i neutrini non siano confinati nel volume della miscela⁴, così che la densità di neutrini è di fatto nulla

$$y_{\nu_e} = 0, \quad (1.4.13)$$

allora μ_{ν_e} si annulla e la (1.4.9) va modificata in

$$\mu_e = \mu_n - \mu_p. \quad (1.4.14)$$

Fissati n_B e T e nota la dipendenza dei potenziali dalle rispettive densità, la (1.4.9) e la (1.4.14) forniscono un'equazione per y_p risolta la quale diventa automaticamente nota la composizione chimica della miscela. Per risolvere queste equazioni abbiamo usato il metodo delle secanti, per implementare il quale, naturalmente, abbiamo dovuto definire il metodo di calcolo dei potenziali chimici.

⁴Questo fatto va verificato a posteriori, una volta valutato il grado di opacità della stella e la sua trasparenza ai neutrini che, in questo modo, lasciano la stella occupando idealmente un volume infinito.

1.4.2 Potenziali chimici a temperatura finita

Si è rivelato un buon metodo di calcolo numerico del potenziale chimico μ_i della specie i -esima di particelle, data la densità n_i , una combinazione del metodo delle secanti per la ricerca delle radici di un'equazione con un metodo di integrazione deterministico come il metodo di bisezione.

Il metodo delle secanti si applica alla funzione

$$F_i(\mu_i) = \frac{s_i}{2\pi^2 n_i} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{1 + \exp[\beta(e_i(k) - \mu_i)]} - 1, \quad (1.4.15)$$

per trovare il potenziale chimico data la densità. Si cerca $\bar{\mu}_i$ tale che

$$|F_i(\bar{\mu}_i)| < \varepsilon \quad (1.4.16)$$

con ε la precisione desiderata (abbiamo scelto $\varepsilon = 10^{-4}$).

Per quanto riguarda l'integrazione, abbiamo bisogno di stimare degli integrali di Fermi, cioè integrali della forma

$$I_a(\eta) = \int_0^\infty dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)} \quad (1.4.17)$$

con a razionale positivo. Invece di ricondurci al calcolo di un integrale proprio, magari mediante trasformazione della variabile di integrazione che renda finito l'intervallo, tronchiamo l'integrale approssimandolo con

$$\tilde{I}_a(\eta) = \int_0^{x_{\max}} dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)}, \quad (1.4.18)$$

con x_{\max} sufficientemente grande, e valutiamo l'errore commesso. Questo metodo si rivela molto più rapido di quello citato in precedenza: con un errore relativo inferiore a 10^{-4} il metodo con troncamento dell'intervallo d'integrazione è risultato circa 100 volte più rapido del calcolo dell'integrale ottenuto con la trasformazione $x \rightarrow \frac{1}{x}$ della variabile d'integrazione nel semintervallo $[1, \infty[$. Il troncamento $x_{\max} > 0$ dovrà essere necessariamente maggiore di η , per i motivi che saranno chiari in seguito.

1.4.2.1 Stima dell'errore

Il seguente calcolo è un'estensione di quello mostrato in [12] per $0 < a < 1$. In generale si ha

$$R_a(\eta) \equiv \int_{x_{\max}}^{\infty} dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)} \leq \int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^a \exp(\eta - x). \quad (1.4.19)$$

Dimostriamo ora che

$$\begin{aligned} \int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^a \exp(\eta - x) &= \exp(\eta - x_{\max}) \left\{ x_{\max}^a + \sum_{n=1}^N \left[\prod_{m=0}^{n-1} (a - m) \right] x_{\max}^{a-n} \right\} \\ &+ \left[\prod_{m=0}^N (a - m) \right] \int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^{a-N-1} \exp(\eta - x) \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

per ogni $1 \leq N \leq a$ intero. Infatti per $N = 1$ si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} &\int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^a \exp(\eta - x) \\ &= -x^a \exp(\eta - x) \Big|_{x_{\max}}^{\infty} + a \int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^{a-1} \exp(\eta - x) \\ &= x_{\max}^a \exp(\eta - x_{\max}) - a x_{\max}^{a-1} \exp(\eta - x) \Big|_0^{\infty} \\ &+ a(a-1) \int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^{a-2} \exp(\eta - x) \\ &= x_{\max}^a \exp(\eta - x_{\max}) + a x_{\max}^{a-1} \exp(\eta - x_{\max}) \\ &+ a(a-1) \int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^{a-2} \exp(\eta - x) \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

e supponendo che la (1.4.20) sia valida per un qualche $N \leq a - 1$, poiché

$$\begin{aligned} &\int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^{a-N-1} \exp(\eta - x) \\ &= -x^{a-N-1} \exp(\eta - x) \Big|_{x_{\max}}^{\infty} + (a - N - 1) \int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^{a-N-2} \exp(\eta - x) \\ &= x_{\max}^{a-N-1} \exp(\eta - x_{\max}) + (a - N - 1) \int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^{a-N-2} \exp(\eta - x), \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

si dimostra valida anche per $N + 1$ e quindi, per induzione, per ogni $N \leq a$. Ponendo ora $N = [a]$, con $[a]$ la parte intera di a , si ha

$$\begin{aligned} \int_{x_{\max}}^{\infty} dx x^{a-N-1} \exp(\eta - x) &\leq x_{\max}^{a-N-1} \int_{x_{\max}}^{\infty} dx \exp(\eta - x) \\ &= x_{\max}^{a-N-1} \exp(\eta - x_{\max}), \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

dato che $a - N - 1 \leq 0$, e quindi x^{a-N-1} è una funzione decrescente o costante sull'intervallo di integrazione. Quindi dalla (1.4.19) e dalla (1.4.20) si ha

$$R_a(\eta) \leq \mathcal{P}_a(x_{\max}) \exp(\eta - x_{\max}) \quad (1.4.24)$$

con

$$\mathcal{P}_a(x_{\max}) \equiv x_{\max}^a + \sum_{n=1}^{[a]+1} \left[\prod_{m=0}^{n-1} (a - m) \right] x_{\max}^{a-n}. \quad (1.4.25)$$

Il troncamento dell'integrale comporta quindi un errore che decresce almeno esponenzialmente con x_{\max} .

Stimiamo invece dal basso il valore dell'integrale. Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)} &= \int_0^1 dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)} \\ &+ \int_1^{\infty} dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)}. \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

Ora distinguiamo a seconda del valore assunto da η . Se $\eta > 1$ si ha

$$\int_0^1 dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)} \geq \frac{1}{2(a+1)}. \quad (1.4.27)$$

Se $0 < \eta \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)} \\
 &= \int_0^\eta dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)} + \int_\eta^1 dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)} \\
 &\geq \frac{\eta^{a+1}}{2(a+1)} + \frac{1}{2} \int_\eta^1 dx x^a \exp(\eta - x) \\
 &\geq \frac{\eta^{a+1}}{2(a+1)} + \frac{\exp(\eta - 1)}{2} \int_\eta^1 dx x^a \\
 &= \frac{\eta^{a+1}}{2(a+1)} + \frac{\exp(\eta - 1)}{2(a+1)} (1 - \eta^{a+1}) \\
 &= \frac{1}{2(a+1)} [\eta^{a+1} + (1 - \eta^{a+1}) \exp(\eta - 1)]. \tag{1.4.28}
 \end{aligned}$$

Se $\eta \leq 0$ si ha

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)} &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 dx x^a \exp(\eta - x) \\
 &\geq \frac{\exp(\eta - 1)}{2} \int_0^1 dx x^a \\
 &= \frac{\exp(\eta - 1)}{2(a+1)}. \tag{1.4.29}
 \end{aligned}$$

Invece

$$\int_1^\infty dx \frac{x^a}{1 + \exp(x - \eta)} \geq \int_1^\infty dx \frac{1}{1 + \exp(x - \eta)} \tag{1.4.30}$$

$$= \int_{1-\eta}^\infty dx \frac{1}{1 + \exp(x - \eta)} \tag{1.4.31}$$

$$= \ln [1 + \exp(\eta - 1)]. \tag{1.4.32}$$

Definiamo allora la funzione Ξ_a tale che

$$\Xi_a(\eta) = \ln[1 + \exp(\eta - 1)] + \frac{1}{2(a+1)} \begin{cases} 1 & \eta > 1 \\ \eta^{a+1} + (1 - \eta^{a+1}) \exp(\eta - 1) & 0 < \eta \leq 1 \\ \exp(\eta - 1) & \eta \leq 0 \end{cases} \quad (1.4.33)$$

che per $\eta \gg 1$ si approssima a

$$\Xi_a(\eta) = \eta \quad (1.4.34)$$

mentre per $\eta \ll -1$ si approssima a

$$\Xi_a(\eta) = \frac{2a+3}{2(a+1)} \exp(\eta - 1). \quad (1.4.35)$$

Possiamo quindi stimare dall'alto l'errore relativo commesso approssimando l'integrale (1.4.17) con l'integrale (1.4.18):

$$\frac{R_a(\eta)}{I_a(\eta)} \leq \Xi_a^{-1}(\eta) \mathcal{P}_a(x_{\max}) \exp(\eta - x_{\max}). \quad (1.4.36)$$

Se vogliamo quindi che $\frac{R_a(\eta)}{I_a(\eta)}$ sia minore di una quantità ε , cerchiamo l' x_{\max} ideale che verifica l'equazione trascendente

$$\Xi_a^{-1}(\eta) \mathcal{P}_a(x_{\max}) \exp(\eta - x_{\max}) = \varepsilon \quad (1.4.37)$$

o equivalentemente

$$a \ln x_{\max} + \ln \left[\frac{\mathcal{P}_a(x_{\max})}{x_{\max}^a} \right] - x_{\max} = \ln \varepsilon + \ln \Xi_a(\eta) - \eta. \quad (1.4.38)$$

Osserviamo che parliamo di x_{\max} ideale perché, poiché la funzione integranda decresce esponenzialmente da un certo punto in poi, scegliere un x_{\max} inutilmente troppo grande comporterebbe un dispendio enorme di capacità di calcolo dato che i bin corrispondenti ai valori alti della variabile di integrazione contribuiscono sempre meno alla somma integrale complessiva. La scelta del troncamento è quindi un compromesso per ottenere la precisione desiderata con il minor tempo di esecuzione del programma.

Ovviamente la risoluzione della (1.4.38) sarà anch'essa numerica (in questo caso si è ricorso ancora una volta al metodo delle secanti), con un certo errore Δx_{\max} (in questo caso abbiamo scelto $\Delta x_{\max} = 0.5$). Quindi per essere sicuri di non sottostimare $\frac{R_a(\eta)}{I_a(\eta)}$, aggiungiamo Δx_{\max} alla x_{\max} trovata. Consideriamo ora caso per caso le situazioni che ci interessano.

1.4.2.2 Densità dei leptoni

Si ha

$$\begin{aligned}
 n_{\text{leptone}} &= \frac{s}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{1 + \exp(\beta p - \beta\mu)} \\
 &= \frac{sT^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{1 + \exp(x - \frac{\mu}{T})}.
 \end{aligned} \tag{1.4.39}$$

In questo caso siamo quindi interessati all'integrale di Fermi I_2 con $\eta \equiv \frac{\mu}{T}$. Si ha

$$\sum_{n=1}^{[2]+1} \left[\prod_{m=0}^{n-1} (2-m) \right] x_{\text{max}}^{2-n} = 2x_{\text{max}} + 2 \tag{1.4.40}$$

quindi

$$\mathcal{P}_2(x_{\text{max}}) = x_{\text{max}}^2 + 2x_{\text{max}} + 2. \tag{1.4.41}$$

1.4.2.3 Densità dei barioni

Si ha

$$\begin{aligned}
 n_{\text{barione}} &= \frac{s}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{1 + \exp\left[\beta \frac{p^2}{2m^*} - \beta(\mu - \tilde{U})\right]} \\
 &= \frac{s(2m^*T)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{1 + \exp\left(x^2 - \frac{\mu - \tilde{U}}{T}\right)} \\
 &= \frac{s(2m^*T)^{\frac{3}{2}}}{4\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + \exp\left(x - \frac{\mu - \tilde{U}}{T}\right)}.
 \end{aligned} \tag{1.4.42}$$

In questo caso dobbiamo effettuare un cambio di variabile perché lo spettro dipende quadraticamente dall'impulso. Siamo quindi interessati all'integrale di Fermi $I_{\frac{1}{2}}$ con $\eta = \frac{\mu - \tilde{U}}{T}$. Ora

$$\sum_{n=1}^{[\frac{1}{2}]+1} \left[\prod_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - m\right) \right] x_{\text{max}}^{\frac{1}{2}-n} = \frac{1}{2} x_{\text{max}}^{-\frac{1}{2}} \tag{1.4.43}$$

quindi

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}(x_{\text{max}}) = x_{\text{max}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x_{\text{max}}^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.4.44}$$

1.4.2.4 Pressione dei leptoni

Gli integrali di Fermi ci servono anche per il calcolo della pressione. Dalla (1.3.8) si ha

$$p_{\text{leptone}} = \frac{sT^4}{6\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{1 + \exp\left(x - \frac{\mu}{T}\right)}. \quad (1.4.45)$$

Per i leptoni siamo quindi interessati all'integrale di Fermi I_3 con $\eta = \frac{\mu}{T}$, per il quale si ha

$$\sum_{n=1}^{[3]+1} \left[\prod_{m=0}^{n-1} (3-m) \right] x_{\text{max}}^{3-n} = 3x_{\text{max}}^2 + 6x_{\text{max}} + 6 \quad (1.4.46)$$

quindi

$$\mathcal{P}_2(x_{\text{max}}) = x_{\text{max}}^3 + 3x_{\text{max}}^2 + 6x_{\text{max}} + 6. \quad (1.4.47)$$

1.4.2.5 Pressione dei barioni

Infine per i barioni si ha dalla (1.3.9)

$$\begin{aligned} p_{\text{barione}} &= \frac{s(2m^*T)^{\frac{5}{2}}}{6\pi^2 m^*} \int_0^\infty dk \frac{x^4}{1 + \exp\left(x^2 - \frac{\mu - \tilde{U}}{T}\right)} \\ &= \frac{s(2m^*T)^{\frac{5}{2}}}{12\pi^2 m^*} \int_0^\infty dk \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1 + \exp\left(x - \frac{\mu - \tilde{U}}{T}\right)} \end{aligned} \quad (1.4.48)$$

e quindi siamo interessati all'integrale di Fermi $I_{\frac{3}{2}}$ con $\eta = \frac{\mu - \tilde{U}}{T}$, per il quale si ha

$$\sum_{n=1}^{[\frac{3}{2}]+1} \left[\prod_{m=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2} - m\right) \right] x_{\text{max}}^{\frac{3}{2}-n} = \frac{3}{2} x_{\text{max}}^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} x_{\text{max}}^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.4.49)$$

Quindi

$$\mathcal{P}_{\frac{3}{2}}(x_{\text{max}}) = x_{\text{max}}^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x_{\text{max}}^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} x_{\text{max}}^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.4.50)$$

1.4.2.6 Potenziali chimici efficaci e potenziali di Skyrme

La forma semianalitica del potenziale di singola particella può essere calcolata a partire dalle densità e dalle pressioni barioniche, per calcolare le quali, come sopra descritto, è necessario conoscere solo la differenza

$$\eta_\alpha \equiv \frac{\mu_\alpha - \tilde{U}_\alpha}{T}. \quad (1.4.51)$$

Una volta ricavato \tilde{U}_α mediante la (1.2.20) è possibile calcolare il potenziale chimico barionico mediante la (1.4.51).

Noti quindi i potenziali chimici leptonici e barionici per una data densità barionica e per una data frazione protonica è possibile imporre la condizione dell'equilibrio chimico (1.4.9) e cercare il valore appropriato di y_p .

1.4.3 Risultati numerici

1.4.3.1 Concentrazioni e potenziali chimici

Si valutano, prima in approssimazione di barioni non interagenti (Figura 1.1 per $Y_L = 0.4$ e Figura 1.2 per $y_{\nu_e} = 0$) e poi utilizzando il potenziale di tipo Skyrme (Figura 1.3 per $Y_L = 0.4$ e Figura 1.4 per $y_{\nu_e} = 0$), la composizione della miscela e i potenziali chimici delle differenti specie a tre diverse temperature (5 MeV, 30 MeV e 60 MeV). Le densità considerate sono nel range $[0, 5] \times n_0$ con $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$. Occorre notare che a una densità di circa $n_B \sim 3.6 n_0$ le proprietà di struttura dei nucleoni cominciano a diventare importanti così che il modello di interazioni forti che stiamo usando, in cui neutroni e protoni vengono considerati come puntiformi, risulta essere una sovrasemplificazione alle alte densità considerate.

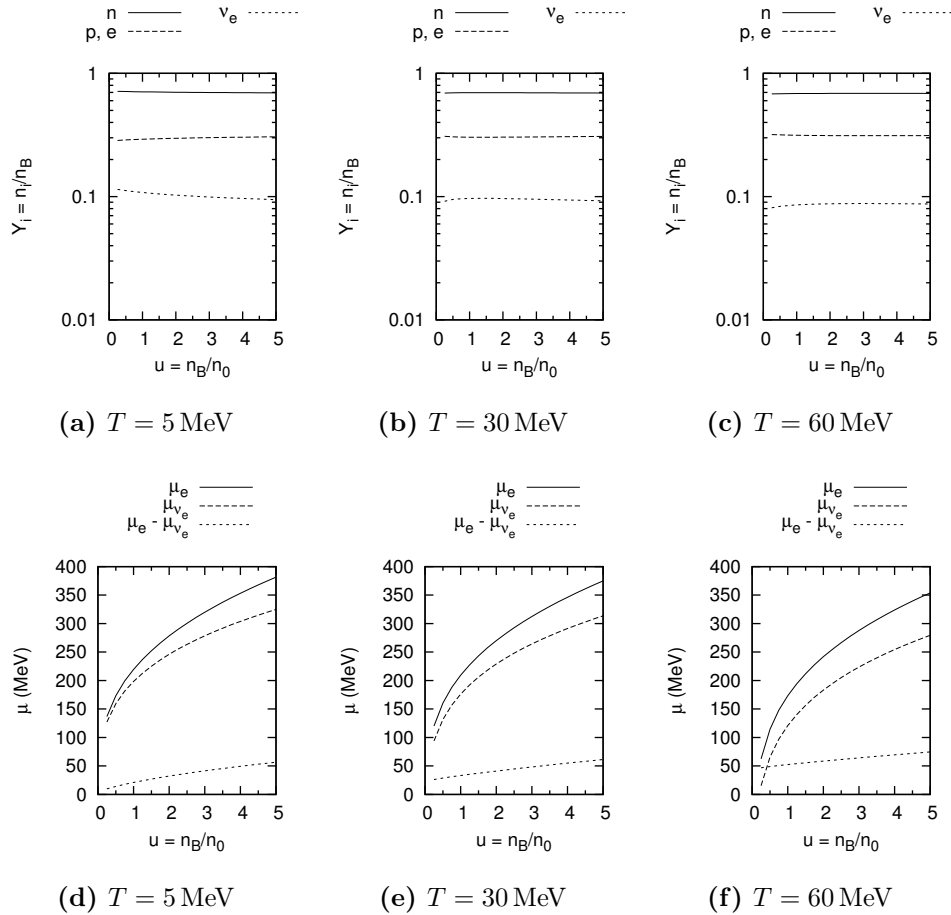


Figura 1.1. Composizione (figure a, b, c) e potenziali chimici (figure d, e, f) per barioni non interagenti all'equilibrio β con $Y_L = 0.4$ a differenti temperature, specificate in MeV (unità $c = \hbar = k_B = 1$).

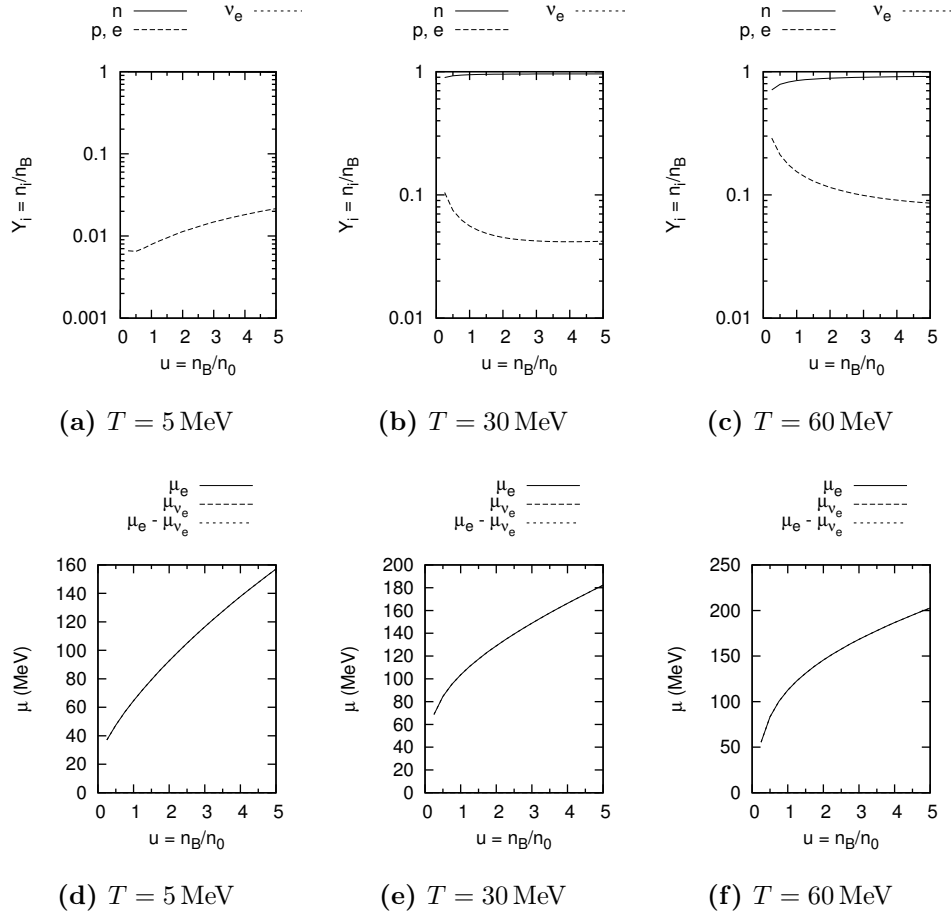


Figura 1.2. Composizione (figure a, b, c) e potenziali chimici (figure d, e, f) per barioni non interagenti all'equilibrio β con $y_{\nu_e} = 0$ a differenti temperature, specificate in MeV (unità $c = \hbar = k_B = 1$). In questo caso non è evidentemente presente la curva neutrinica.

Come si vede confrontando la Figura 1.1 con la 1.2, l'effetto principale dell'intrappolamento neutrinico è quello di mantenere elevata la concentrazione elettronica così che la materia sia più ricca di protoni rispetto al caso in cui i neutrini non trasportano numero leptonico netto.

L'introduzione dell'interazione forte tra i barioni, come si vede, comporta una diminuzione dei valori della concentrazione e del potenziale chimico neutrinici e valori più elevati di $\hat{\mu} \equiv \mu_e - \mu_{\nu_e} = \mu_n - \mu_p$.

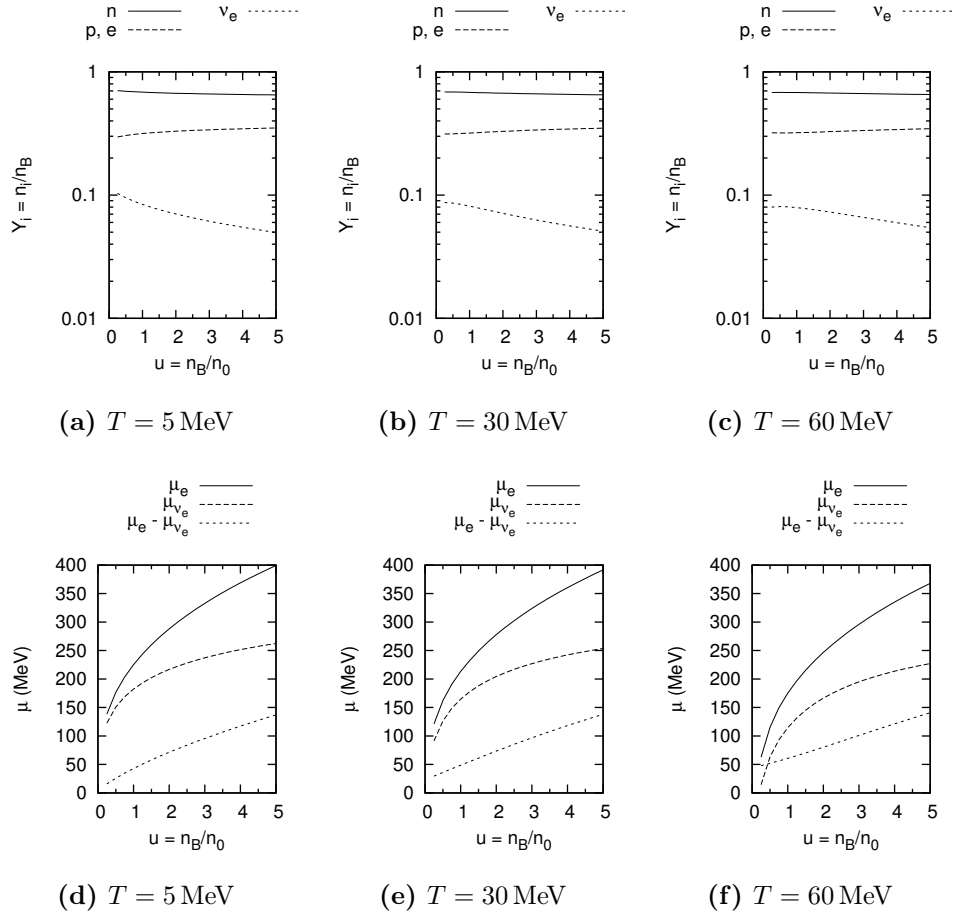


Figura 1.3. Composizione (figure a, b, c) e potenziali chimici (figure d, e, f) per barioni interagenti con potenziale di tipo Skyrme all'equilibrio β con $Y_L = 0.4$ a differenti temperature, specificate in MeV (unità $c = \hbar = k_B = 1$).

Nel caso di neutrini non intrappolati, la presenza delle interazioni forti comporta un leggero aumento della frazione protonica.

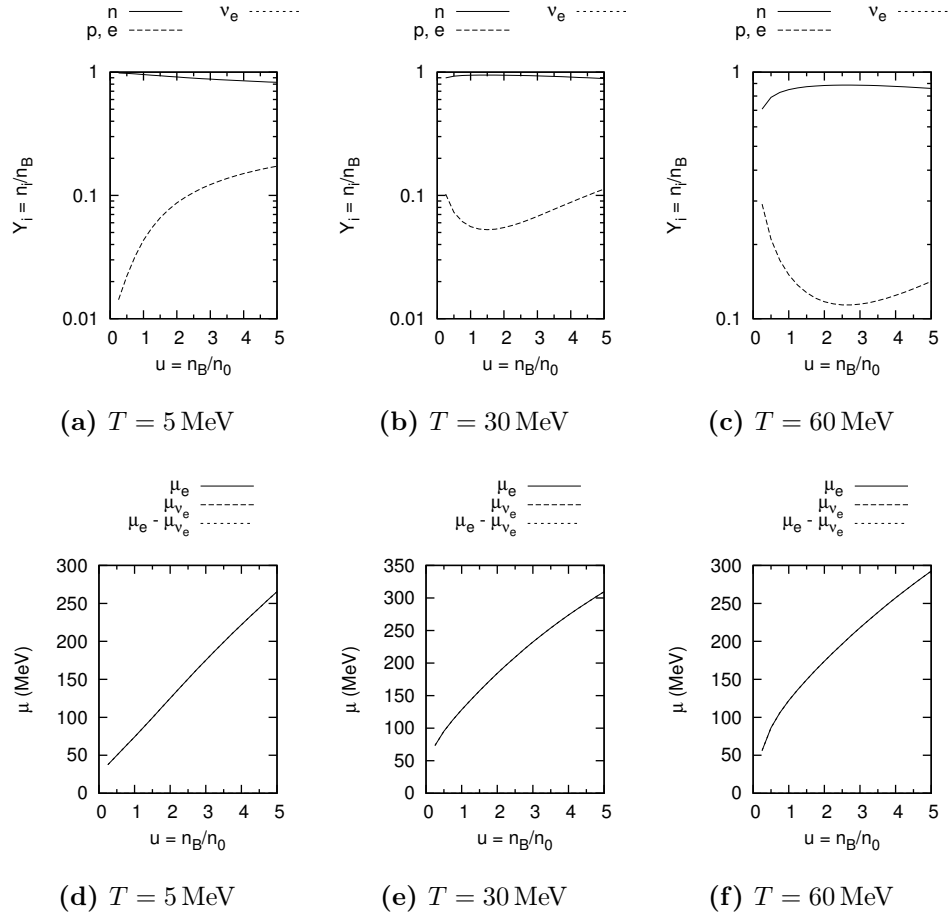


Figura 1.4. Composizione (figure a, b, c) e potenziali chimici (figure d, e, f) per barioni interagenti con potenziale di tipo Skyrme all'equilibrio β con $y_{\nu_e} = 0$ a differenti temperature, specificate in MeV (unità $c = \hbar = k_B = 1$).

1.4.3.2 Pressione e entropia

Riportiamo anche i dati sulla pressione e sull'entropia per il caso di barioni interagenti con potenziale di Skyrme con e senza neutrini intrappolati.

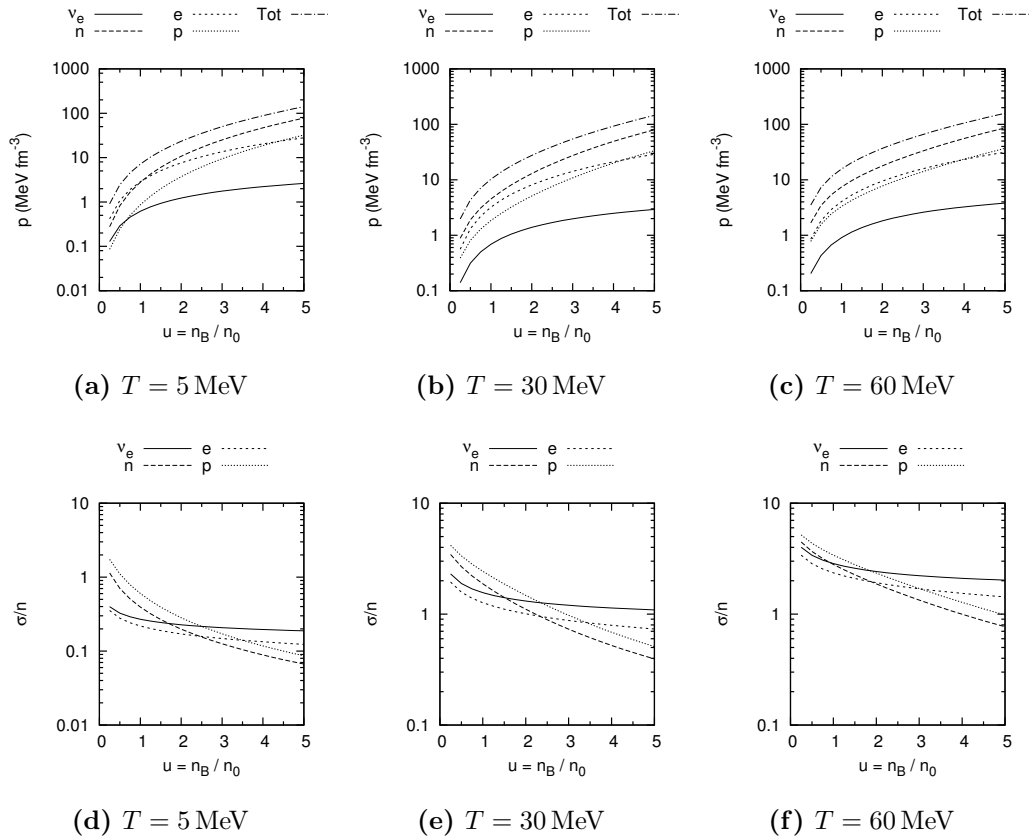


Figura 1.5. Pressione (figure a, b, c) e entropia per particella (figure d, e, f) per barioni interagenti con potenziale di tipo Skyrme all'equilibrio β con $Y_L = 0.4$ a differenti temperature, specificate in MeV (unità $c = \hbar = k_B = 1$).

Il contributo dominante alla pressione è ovviamente dovuto ai neutroni e cresce con la densità. Si ha anche un aumento in conseguenza dell'aumento di temperatura. Tuttavia questo aumento è molto lieve perché il contributo principale alla pressione nucleonica non è termico ed è dovuto all'alto grado di degenerazione della miscela. Si osserva inoltre una diminuzione dell'entropia alle alte concentrazioni dovuta anch'essa al crescente grado di degenerazione delle componenti della miscela, con conseguente minor grado di disordine nell'occupazione degli stati quantici di singola particella.

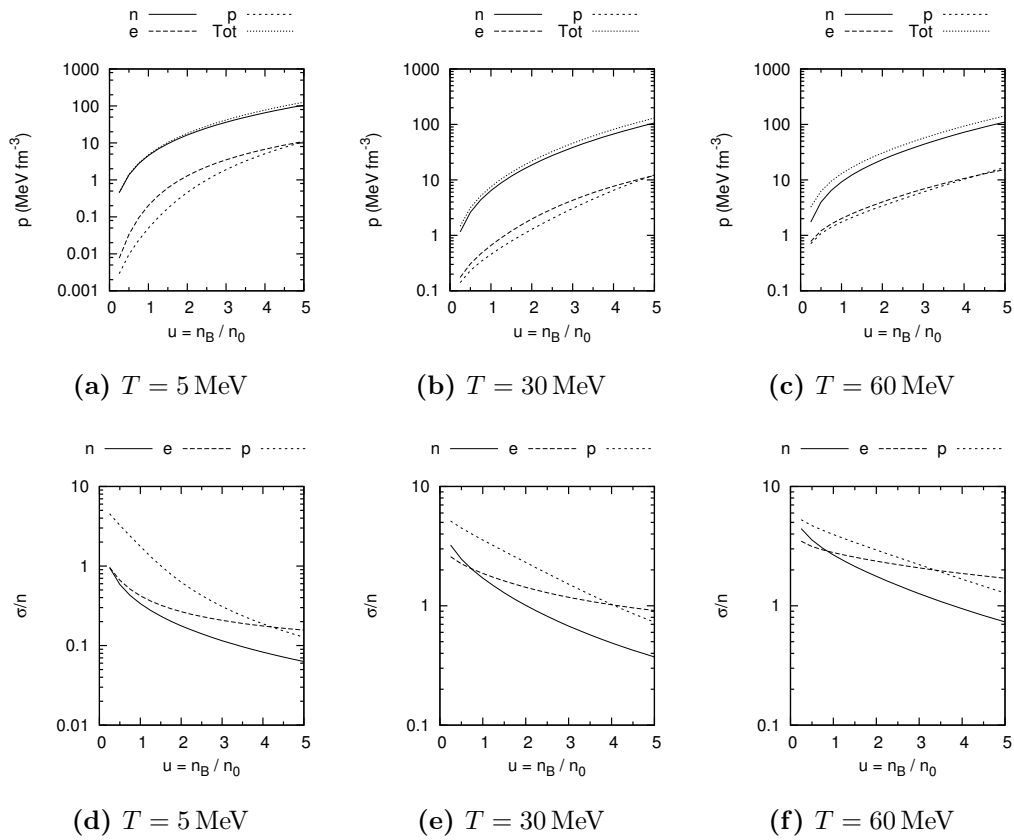


Figura 1.6. Pressione (figure a, b, c) e entropia per particella (figure d, e, f) per barioni interagenti con potenziale di tipo Skyrme all'equilibrio β con $y_{\nu_e} = 0$ a differenti temperature, specificate in MeV (unità $c = \hbar = k_B = 1$).

Ovviamente, poiché come visto l'intrappolamento neutrino comporta concentrazioni protoniche più elevate, in assenza di neutrini la pressione protonica ed elettronica è inferiore.

1.4.3.3 Massa efficace di Landau e potenziale di Skyrme

Presentiamo inoltre l'andamento dei parametri dell'interazione forte in funzione della densità, cioè la massa efficace di Landau (1.2.14) e il potenziale di singola particella (1.2.20), quest'ultimo espresso nelle unità di misura del potenziale chimico (MeV), per le due situazioni considerate con barioni interagenti (con neutrini intrappolati in Figura 1.7 e con neutrini liberi in Figura 1.8).

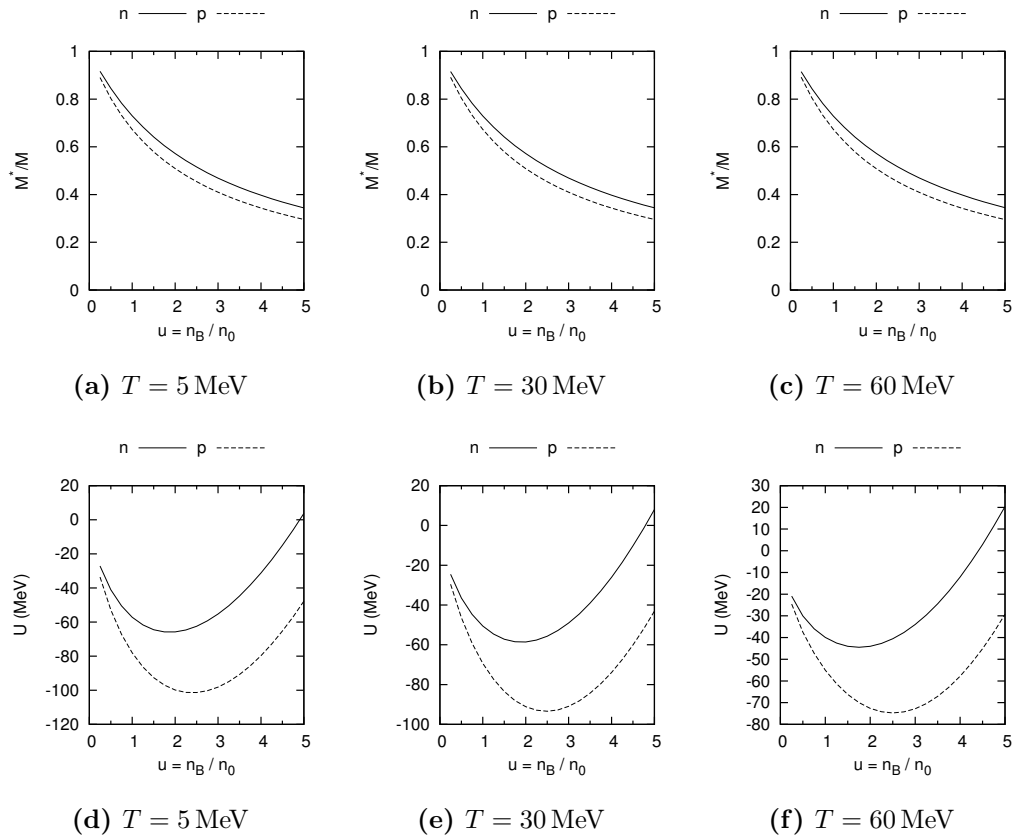


Figura 1.7. Rapporto tra la massa efficace di Landau e la massa dei nucleoni (figure a, b, c) e potenziale di Skyrme costante di singola particella (figure d, e, f) corrispondenti ai valori di concentrazione della Figura 1.3.

Si osserva che l'intrappolamento neutrino comporta il raggiungimento di valori più bassi del potenziale \tilde{U} e il fatto che le masse efficaci dei nucleoni differiscano molto poco tant'è che le curve sono quasi sovrapposte a tutti i valori di densità studiati. Quest'ultimo fatto è imputabile alla maggiore simmetria nella composizione barionica della miscela (minore differenza tra la concentrazione di neutroni e la concentrazione di protoni rispetto al caso in cui i neutrini non sono intrappolati).

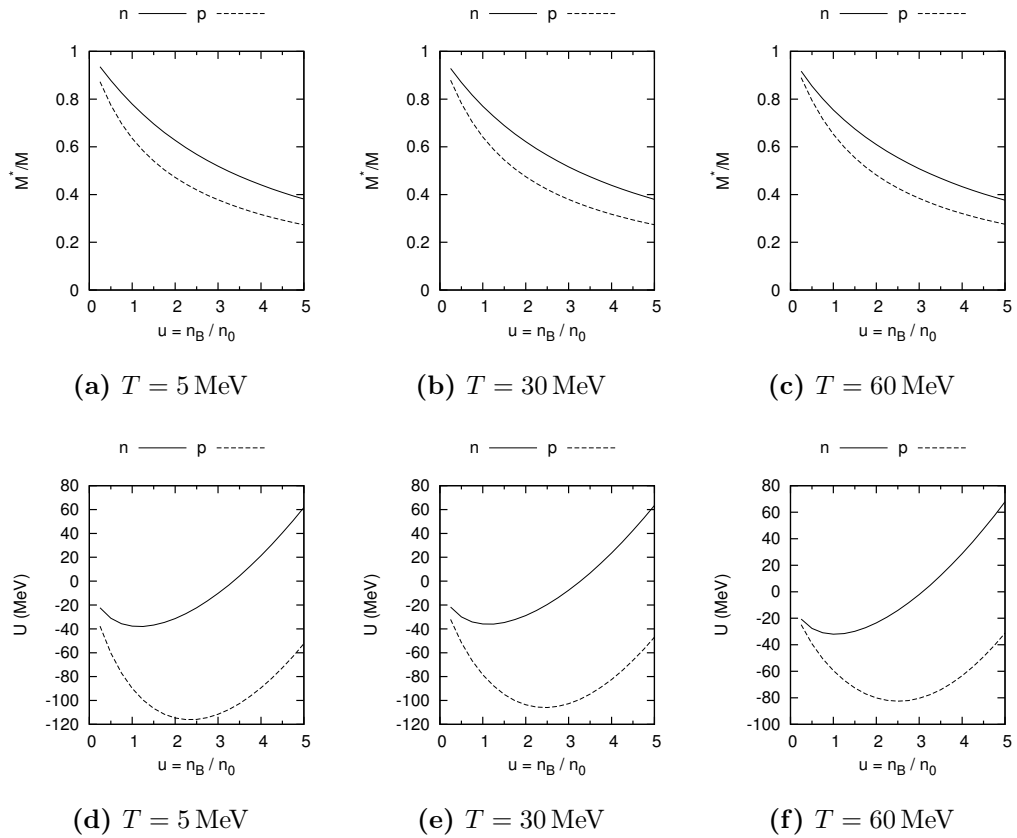


Figura 1.8. Rapporto tra la massa efficace di Landau e la massa dei nucleoni (figure a, b, c) e potenziale di Skyrme costante di singola particella (figure d, e, f) corrispondenti ai valori di concentrazione della Figura 1.4.

Con neutrini liberi l'andamento dei parametri dell'interazione forte è pressoché identico, con le masse efficaci che decrescono con la densità e i potenziali che raggiungono un minimo a densità intermedie.

In entrambe i casi il potenziale di Skyrme costante è in modulo molto più piccolo del potenziale chimico, quindi l'interazione forte tra i barioni si manifesta maggiormente in conseguenza della modifica della massa efficace rispetto al caso di barioni non interagenti. Come si vede questa risulta ridotta notevolmente, il che comporta un generale aumento della concentrazione protonica, che è più marcato ad alte densità.

1.4.4 Approssimazione a basse temperature

1.4.4.1 Approssimazione analitica dei potenziali

A seconda dei valori di temperatura considerati, è possibile ricorrere ad un'espressione analitica approssimata dei potenziali chimici, mentre in generale è necessario ricorrere al calcolo numerico per ricavare l'espressione a temperature arbitrarie.

In questa trattazione siamo particolarmente interessati al regime di basse temperature, oltre che a quelle considerate nei precedenti calcoli numerici. Dopo le fasi iniziali della vita di una stella di neutroni, infatti, a causa dell'emissione dei neutrini, che trasportano una notevole quantità di energia, la stella si raffredda e la temperatura scende di parecchi ordini di grandezza. A queste temperature, oltre che comodo, si rende necessario un metodo di calcolo alternativo, in questo caso analitico, rispetto a quello numerico descritto in 1.4.2. Infatti per come è stato scritto il programma di calcolo, valori così bassi della temperatura danno problemi quando inseriti a denominatore degli argomenti degli esponenziali nelle distribuzioni di Fermi.

Per definire il regime di bassa temperatura abbiamo bisogno di introdurre l'energia di Fermi ϵ_F e la temperatura di Fermi T_F . Nel nostro sistema di unità di misura le due quantità coincidono e sono definite come il valore del potenziale chimico allo zero assoluto

$$T_F = \epsilon_F \equiv \mu(0). \quad (1.4.52)$$

L'impulso di Fermi k_F è invece tale che

$$\epsilon_F = \sqrt{m^2 + k_F^2} - m. \quad (1.4.53)$$

Usiamo l'espressione relativistica di modo che possiamo ricavare contemporaneamente le espressioni per i leptoni ultrarelativistici e per i barioni non relativistici. Inoltre stiamo ignorando l'interazione forte tra i barioni perché l'espressione finale per μ , nel caso di barioni interagenti, può essere ricavata semplicemente usando la massa di Landau m^* al posto della massa nuda del nucleone, e aggiungendo il potenziale di Skyrme \tilde{U} all'equivalente potenziale chimico della teoria con barioni non interagenti.

Considereremo basse le temperature per cui valga

$$\varepsilon \equiv \frac{T}{T_F} \ll 1. \quad (1.4.54)$$

Come viene mostrato in Appendice B si ha

$$\epsilon_F = \sqrt{h^2 + m^2} - m \quad (1.4.55)$$

e

$$\mu(T) = \epsilon_F \left[1 - \pi^2 \frac{(\sqrt{h^2 + m^2} - m)(2h^2 + m^2)}{6h^2\sqrt{h^2 + m^2}} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \right] + O \left[\left(\frac{T}{T_F}\right)^3 \right], \quad (1.4.56)$$

con

$$h \equiv \left(\frac{6\pi^2 n}{s} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.4.57)$$

Possiamo applicare questa espressione per calcolare i potenziali chimici di neutroni, protoni, neutrini ed elettroni. Si ha allora

$$\epsilon_{\text{barione}}^F(T) = \frac{1}{2m^*} \left(\frac{6\pi^2 n}{s} \right)^{\frac{2}{3}} + \tilde{U} \quad (1.4.58)$$

$$\epsilon_{\text{leptone}}^F(T) = \left(\frac{6\pi^2 n}{s} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.4.59)$$

e

$$\mu_{\text{barione}}(T) = \epsilon_{\text{barione}}^F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \right] + \frac{\pi^2 \tilde{U}}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + O(\epsilon^3) \quad (1.4.60)$$

$$\mu_{\text{leptone}}(T) = \epsilon_{\text{leptone}}^F \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \right] + O(\epsilon^3). \quad (1.4.61)$$

Nel caso dei barioni si è usata l'approssimazione non relativistica per $h \ll m$, nel caso dei leptoni quella ultrarelativistica per $h \gg m$.

Si confrontano, mediante questi risultati analitici, le percentuali protoniche ricavate alle varie densità barioniche con i due metodi (Figura 1.9).

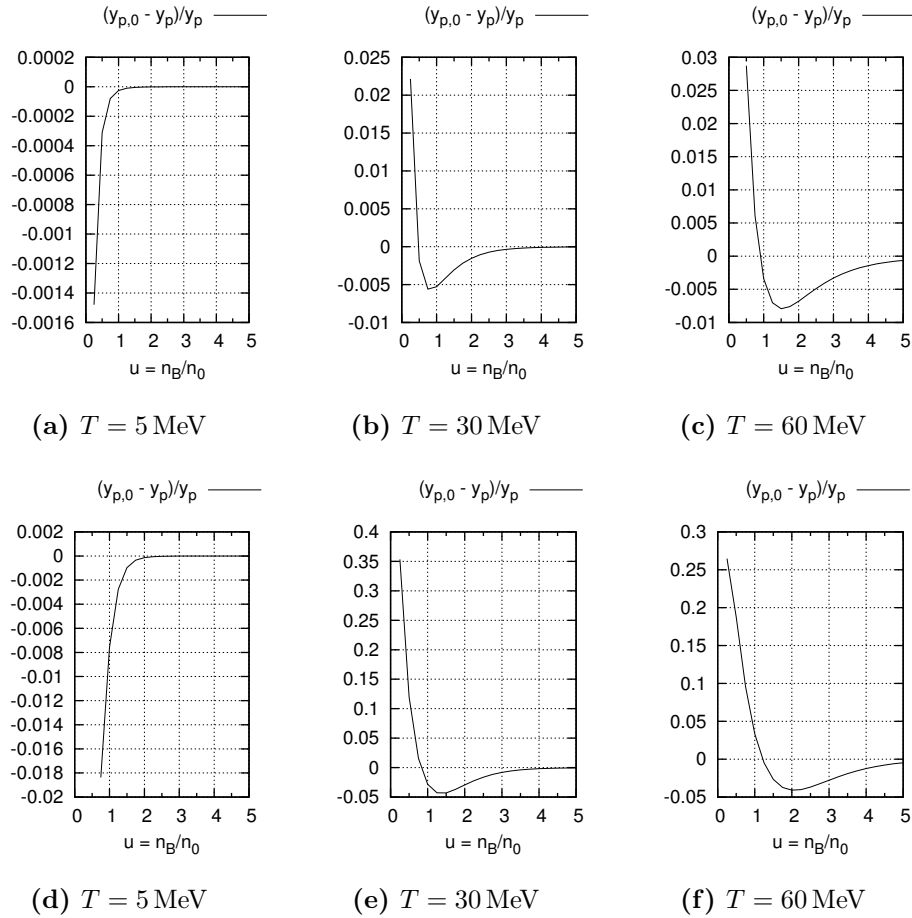


Figura 1.9. Confronto tra i due metodi di calcolo utilizzati per ricavare le concentrazioni e i potenziali chimici con barioni interagenti, con $Y_L = 0.4$ (figure a, b, c) e $y_{\nu_e} = 0$ (figure d, e, f). Il pedice 0 in $y_{p,0}$ sta ad indicare che la percentuale protonica è stata ricavata utilizzando le approssimazioni analitiche di bassa temperatura dei potenziali chimici (equazioni (1.4.60) e (1.4.61)).

Come si vede i risultati del calcolo approssimato si discostano leggermente, alle alte densità barioniche, da quelli ottenuti mediante il metodo numerico, più affidabile del primo alle basse densità barioniche (che corrispondono a basse temperature di Fermi di tutte le specie). D'altronde, ad alte densità (e quindi alte temperature di Fermi), l'approssimazione analitica (equazioni (1.4.60) e (1.4.61)) dei potenziali chimici dovrebbe essere molto buona e questo consente di valutare qualitativamente la bontà del metodo di integrazione del calcolo numerico. Ci si aspetterebbe, prendendo $y_{p,0}$ (concentrazione ottenuta con l'approssimazione analitica) come riferimento, che y_p (concentrazione esatta) tenda ad esso ad alti valori di n_B , ovvero che le curve in Figura 1.9 tendano a 0 nella parte destra del grafico. In effetti è questo quello che si

verifica e studiando valori più alti di n_B questa previsione viene verificata sempre meglio.

Inferendo quindi da ciò che il metodo di integrazione numerica descritto in 1.4.2 sia valido su tutto il range di densità barioniche considerate, la Figura 1.9 rende chiaro l'errore che si commetterebbe alle basse densità se si utilizzasse l'approssimazione delle basse temperature a temperature dell'ordine delle decine di MeV. In particolare l'errore diventa notevole nel caso di neutrini non intrappolati. Questo mette in evidenza un fatto importante, e cioè che l'intrappolamento neutrino comporta un più alto grado di degenerazione della miscela.

Riportiamo il medesimo grafico per $T = 5$ MeV, in Figura 1.10 nel caso in cui approssimiamo il potenziale chimico direttamente con l'energia di Fermi. Naturalmente l'errore commesso è più grande. Facciamo questo perché nei calcoli successivi sarà più comodo usare la (1.4.58) e la (1.4.59) anziché le espressioni al second'ordine in ε del potenziale chimico, e questi risultati consentono di stimare l'errore commesso in questo modo.

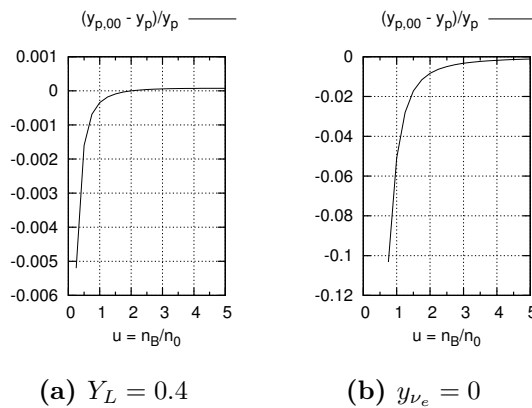


Figura 1.10. Confronto tra i due metodi di calcolo utilizzati per ricavare le concentrazioni e i potenziali chimici con barioni interagenti a $Y_L = 0.4$ (figura a) e $y_{\nu_e} = 0$ (figura b) a $T = 5$ MeV. Il pedice 00 in $y_{p,00}$ sta ad indicare che la percentuale protonica è stata ricavata approssimando il potenziale chimico con l'energia di Fermi (equazioni (1.4.58) e (1.4.59)).

Poiché l'errore commesso, come si vede dalla (1.4.60) e dalla (1.4.61) è quadratico in ε , e poiché a 5 MeV è al più del 10-20 per cento, ci aspettiamo di commettere al più un errore di ordine 10^{-3} nelle concentrazioni usando le energie di Fermi per stimare i potenziali chimici a temperature inferiori a 0.1 MeV.

Riportiamo quindi i dati di concentrazione relativi ad una miscela a 0 MeV in Figura 1.11.

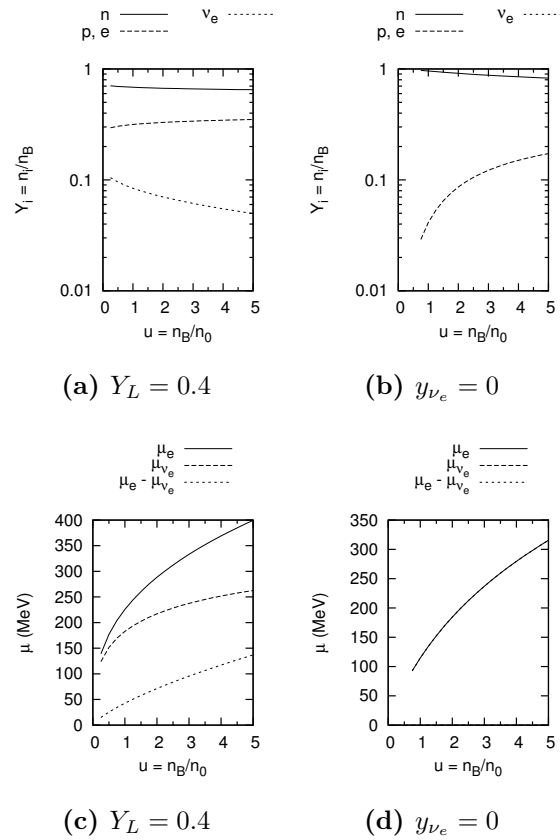


Figura 1.11. Composizione (a, b) e energie di Fermi (c, d) per barioni interagenti con potenziale di tipo Skyrme all'equilibrio β alla temperatura di 0 MeV.

Anche se per completezza riportiamo anche i risultati nell'ipotesi di neutrini intrappolati a $Y_L = 0.4$, il motivo per cui ci interessano le basse temperature, come detto, è che si applicano bene alla stella di neutroni depletta e raffreddata proprio in conseguenza dell'emissione dei neutrini.

1.4.4.2 Termodinamica del gas di Fermi

In approssimazione di degenerazione possiamo ricavare un'espressione analitica semplice anche per le quantità termodinamiche.

Dalla (1.3.8) si ha per i leptoni

$$\begin{aligned}
 p_{\text{leptone}} &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{s}{6\pi^2} \int_0^{\infty} dk \frac{k^3}{1 + \exp\left(\frac{k - \epsilon_{\text{leptone}}^F}{T}\right)} \\
 &= \frac{s}{6\pi^2} \int_0^{\epsilon_{\text{leptone}}^F} dk k^3 \\
 &= \frac{s \left(\epsilon_{\text{leptone}}^F\right)^4}{24\pi^2} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{6\pi^2}{s}\right)^{\frac{1}{3}} n_{\text{leptone}}^{\frac{4}{3}}.
 \end{aligned} \tag{1.4.62}$$

Un andamento di questo tipo è detto politropico e l'esponente $\gamma_{\text{leptone}} = \frac{4}{3}$ è detto indice adiabatico. La densità di energia interna, come si vede dalla (1.3.14), è data da

$$\epsilon_{\text{leptone}} = \frac{3}{4} \left(\frac{6\pi^2}{s}\right)^{\frac{1}{3}} n_{\text{leptone}}^{\frac{4}{3}}. \tag{1.4.63}$$

Per i barioni, analogamente, si ha dalla (1.3.9)

$$\begin{aligned}
 p_{\text{barione}} &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{s}{6\pi^2 m^*} \int_0^{\infty} dk \frac{k^4}{1 + \exp\left(\frac{\frac{k^2}{2m^*} + \tilde{U} - \epsilon_{\text{barione}}^F}{T}\right)} \\
 &= \frac{s}{6\pi^2 m^*} \int_0^{k_{\text{barione}}^F} dk k^4 \\
 &= \frac{s \left(k_{\text{barione}}^F\right)^5}{30\pi^2 m^*} \\
 &= \frac{s \left[2m^* \left(\epsilon_{\text{barione}}^F - \tilde{U}\right)\right]^{\frac{5}{2}}}{30\pi^2 m^*} \\
 &= \frac{1}{5m^*} \left(\frac{6\pi^2}{s}\right)^{\frac{2}{3}} n_{\text{barione}}^{\frac{5}{3}}.
 \end{aligned} \tag{1.4.64}$$

Anche la pressione barionica ha quindi un andamento politropico con indice adiabatico

$\gamma_{\text{barione}} = \frac{5}{3}$. La densità di energia interna, come si vede dalla (1.3.14), è data da

$$\epsilon_{\text{leptone}} = \frac{3}{10m^*} \left(\frac{6\pi^2}{s} \right)^{\frac{2}{3}} n_{\text{barione}}^{\frac{5}{3}} + \tilde{U} n_{\text{barione}}. \quad (1.4.65)$$

Presentiamo quindi i dati sulla pressione corrispondenti alle configurazioni della Figura 1.11.

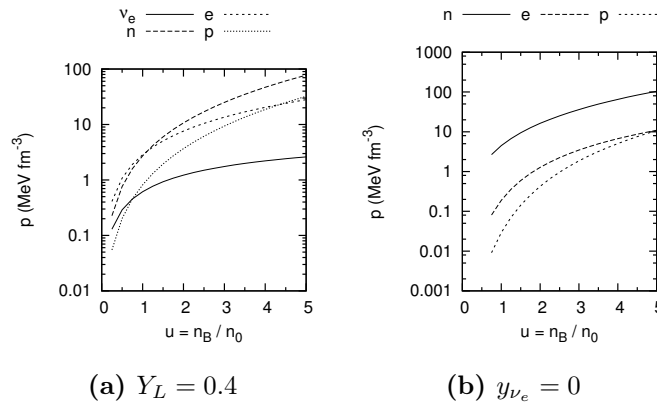


Figura 1.12. Pressione per barioni interagenti con potenziale di tipo Skyrme all'equilibrio β alla temperatura di 0 MeV.

Naturalmente è anche possibile valutare il contributo termico alla pressione confrontando la pressione totale con la pressione di degenerazione calcolata mediante le espressioni politropiche appena ricavate. Per fare questo abbiamo definito la pressione termica p_{termica} come

$$p_{\text{termica}} = p - p_{\text{degenerazione}}, \quad (1.4.66)$$

con $p_{\text{degenerazione}}$ la pressione allo zero assoluto. Riportiamo in Figura 1.13 i dati ottenuti nel caso di barioni interagenti per $Y_L = 0.4$ e $y_{\nu_e} = 0$.

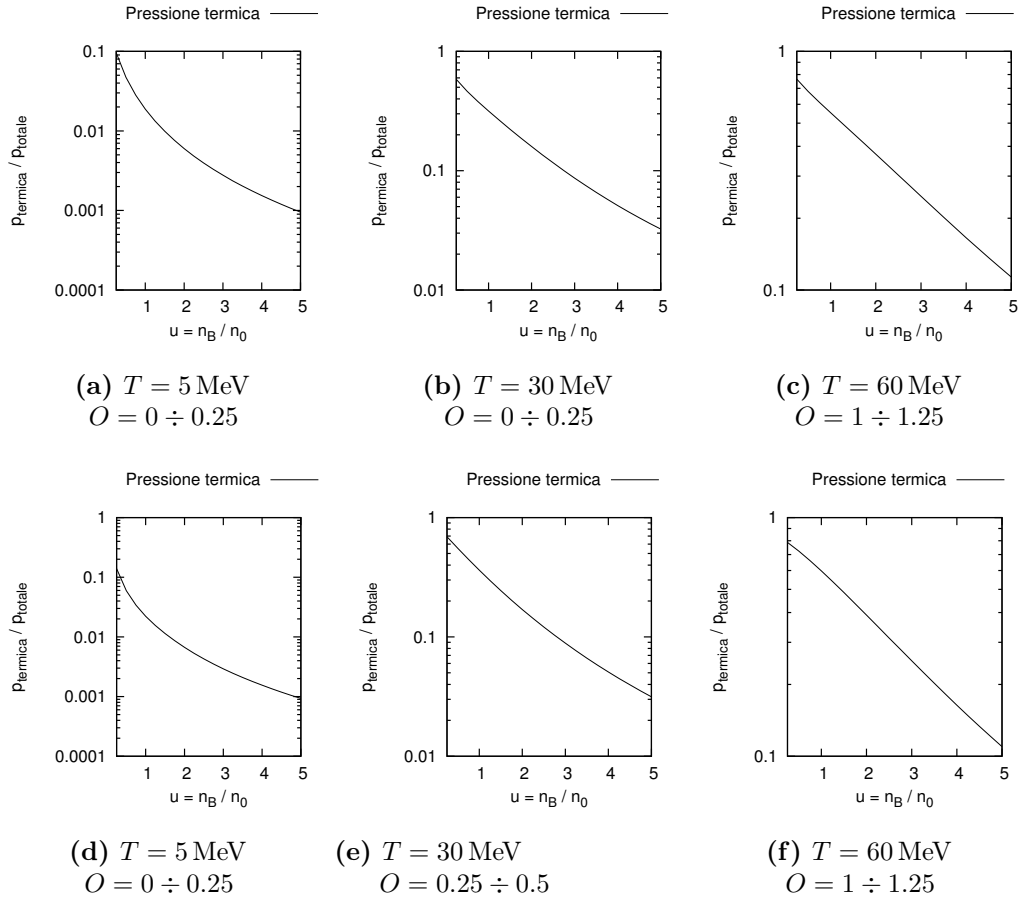


Figura 1.13. Contributo termico alla pressione totale della miscela con barioni interagenti alle varie temperature indicate per neutrini intrappolati con $Y_L = 0.4$ (figure a, b, c) e neutrini liberi con $y_{\nu_e} = 0$ (figure d, e, f). Riportiamo anche l'onset O (bin dell'asse u) nel quale la pressione termica diventa più importante della pressione di degenerazione.

Si vede chiaramente che alle basse temperature e alle alte densità, in cui la miscela è fortemente degenerata, la pressione termica è, come ci si aspetta, notevolmente inferiore rispetto alla pressione totale. È però molto importante alle basse densità per tutte le temperature considerate, diventando anche molto più importante della pressione di degenerazione per $T = 30 \text{ MeV}$ e $T = 60 \text{ MeV}$. Si dovrà quindi tener conto di ciò quando si esaminerà l'equazione di stato.

Capitolo 2

Opacità di neutrino

I risultati ottenuti nel precedente capitolo forniscono tutta l'informazione necessaria riguardo la distribuzione d'energia delle singole specie chimiche, nonché le singole concentrazioni. Questo consente di studiare, in funzione della densità, i processi di assorbimento e di diffusione del neutrino nella miscela considerata. In particolare la natura fermionica delle particelle, che si presenta con il principio di esclusione di Pauli, si manifesterà fortemente nel conteggio degli stati disponibili affinché si verifichi un determinato processo elettrodebole che coinvolga i neutrini.

2.1 Canale di assorbimento principale

Le interazioni elettrodeboli dei neutrini con la materia ordinaria sono distinte in processi di assorbimento e di diffusione a seconda che il numero originale di neutrini venga o meno ridotto dalla reazione. I processi di assorbimento avvengono principalmente mediante lo scambio di bosoni vettori carichi mentre i processi di diffusione possono procedere mediante lo scambio di bosoni carichi e neutri. In questo lavoro abbiamo deciso di concentrarci sul canale di assorbimento principale descritto dalla seguente reazione

$$\nu_l + n \rightarrow l + p. \quad (2.1.1)$$

2.1.1 Calcolo preliminare dell'ampiezza

Calcoliamo il modulo quadro dell'ampiezza di transizione invariante al second'ordine in $\frac{g_w^2}{m_W^2}$ della reazione (2.1.1). Facciamo l'assunzione che le energie coinvolte siano tali che il quadrimpulso scambiato q^2 sia molto minore della massa al quadrato m_W^2 del bosone W ($m_W = 91.19 \text{ GeV}/c^2$).

La parte di densità d'hamiltoniana d'interazione che dà contributo ad un tale processo è la seguente:

$$\mathcal{H}_I = \frac{g_w}{2\sqrt{2}} \left(\tilde{l}^\mu + C \tilde{j}_N^\mu \right) W_\mu + \text{h.c.} \quad (2.1.2)$$

essendo

$$C = \cos \theta_C \quad (2.1.3)$$

con $\theta_C \simeq 13.3^\circ$ l'angolo di Cabibbo,

$$\tilde{l}_\mu = \bar{\psi}_l \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} \quad (2.1.4)$$

la corrente leptonica,

$$\tilde{j}_N^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_n \quad (2.1.5)$$

la corrente nucleonica in cui

$$g_V = 1 \quad g_A = D + F = 1.23 \quad (2.1.6)$$

e

$$D = 0.756 \quad F = 0.477 \quad (2.1.7)$$

e infine $g_w \simeq 0.636$ la costante di accoppiamento debole a quandrimpulso scambiato nullo (che è pressocché la stessa nel range di valori considerati).

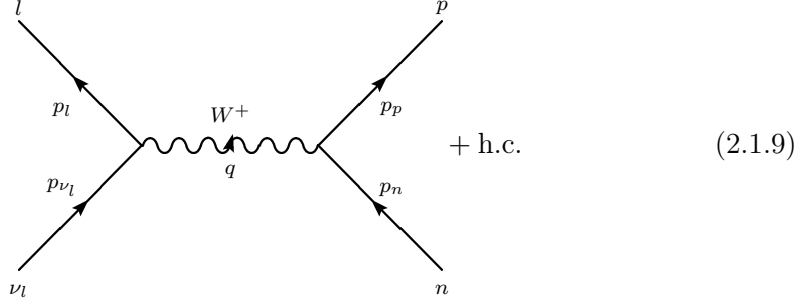
La matrice S è data da

$$\begin{aligned} S &= \lim_{T \rightarrow \infty} \text{T exp} \left[-i \int_{-T}^T dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}_I(x) \right] \\ &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{([-T, T] \times \mathbb{R}^3)^k} \text{T} \prod_{j=1}^k [d^4 x_j \mathcal{H}(x_j)] \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

in cui i campi si intendono espressi nello schema dell'interazione e T sta per operatore prodotto tempo ordinato.

Il contributo principale a $S - 1$ proviene dallo scambio di singolo bosone di gauge

W nel canale s descritto dal seguente diagramma di Feynman:



Questo diagramma corrisponde alla seguente approssimazione

$$\langle f | S - 1 | i \rangle \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \right)^2 C^2 \iint_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} d^4x d^4y \left\langle f \left| \left(\tilde{l}_\mu + \tilde{j}_\mu^N \right)_x i\tilde{D}_F^{\mu\nu}(x-y) \left(\tilde{l}_\nu + \tilde{j}_\nu^N \right)_y \right| i \right\rangle, \quad (2.1.10)$$

con

$$i\tilde{D}_F^{\mu\nu}(x) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_F^{\mu\nu}(k) \exp(ikx) \quad (2.1.11)$$

e

$$iD_F^{\mu\nu}(k) = \frac{g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu}{k^2 - m_W^2} \quad (2.1.12)$$

ed essendo

$$|i\rangle \equiv |\mathbf{p}_{\nu_l}, r_{\nu_l}; \mathbf{p}_n, r_n\rangle \quad |f\rangle \equiv |\mathbf{p}_l, r_l; \mathbf{p}_p, r_p\rangle, \quad (2.1.13)$$

con \mathbf{p} ed r ad indicare rispettivamente l'impulso e la polarizzazione delle particelle considerate. Sviluppando i campi in onde piane si ha

$$\begin{aligned} \langle f | S - 1 | i \rangle &\approx - \left(\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \right)^2 C^2 \iint_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} d^4x d^4y \sum_{s_{\nu_l}, s_n, s_l, s_p=1}^2 \\ &\int_{\mathbb{R}^{3 \times 4}} \frac{d^3\mathbf{k}_{\nu_l}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^3\mathbf{k}_n}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^3\mathbf{k}_l}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^3\mathbf{k}_p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ &\sqrt{\frac{m_{\nu_l}}{E_{\nu_l}(\mathbf{k}_{\nu_l})}} \sqrt{\frac{m_l}{E_l(\mathbf{k}_l)}} \sqrt{\frac{m_n}{E_n(\mathbf{k}_n)}} \sqrt{\frac{m_p}{E_p(\mathbf{k}_p)}} e^{ik(x-y)} e^{-i(k_{\nu_l}-k_l)x} e^{-i(k_n-k_p)y} \\ &l_\mu(\mathbf{k}_{\nu_l}, s_{\nu_l}; \mathbf{k}_l, s_l) iD_F^{\mu\nu}(k) j_\nu^N(\mathbf{k}_n, s_n; \mathbf{k}_p, s_p) \delta_{r_{\nu_l} s_{\nu_l}} \delta_{r_n s_n} \delta_{r_l s_l} \delta_{r_p s_p} \\ &\delta^{(3)}(\mathbf{k}_{\nu_l} - \mathbf{p}_{\nu_l}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_n - \mathbf{p}_n) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_l - \mathbf{p}_l) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_p - \mathbf{p}_p), \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

avendo introdotto le correnti nello spazio degli impulsi, tali che

$$l_\mu(\mathbf{k}_{\nu_l}, s_{\nu_l}; \mathbf{k}_l, s_l) = \bar{u}_l^{s_l}(\mathbf{k}_l) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_l}^{s_{\nu_l}}(\mathbf{k}_{\nu_l}) \quad (2.1.15)$$

$$j_N^\mu(\mathbf{k}_n, s_n; \mathbf{k}_p, s_p) = \bar{u}_p^{s_p}(\mathbf{k}_p) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) u_n^{s_n}(\mathbf{k}_n), \quad (2.1.16)$$

e avendo osservato che i termini in ll e $j_N j_N$ non contribuiscono e che quelli in $l j_N$ e $j_N l$ danno lo stesso contributo, il che ha consentito di sceglierne uno e semplificare il

fattore $\frac{1}{2}$. Si noti che i quattro quadrimpulsi k_{ν_l} , k_n , k_l e k_p sono sul guscio di massa così che

$$k_i^0 = E_i(\mathbf{k}_i) \equiv \sqrt{m_i^2 + |\mathbf{k}_i|^2} \quad (2.1.17)$$

Possiamo eseguire le somme sulle polarizzazioni e gli integrali in \mathbf{k}_{ν_l} , \mathbf{k}_n , \mathbf{k}_l e \mathbf{k}_p :

$$\begin{aligned} \langle f | S - 1 | i \rangle &\approx - \left(\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \right)^2 C^2 \iint_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} d^4x d^4y \\ &\int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sqrt{\frac{m_{\nu_l}}{(2\pi)^3 E_{\nu_l}(\mathbf{p}_{\nu_l})}} \sqrt{\frac{m_l}{(2\pi)^3 E_l(\mathbf{p}_l)}} \sqrt{\frac{m_n}{(2\pi)^3 E_n(\mathbf{p}_n)}} \sqrt{\frac{m_p}{(2\pi)^3 E_p(\mathbf{p}_p)}} \\ &\quad e^{-i(-k+p_{\nu_l}-p_l)x} e^{-i(k+p_n-p_p)y} \\ &l_\mu(\mathbf{p}_{\nu_l}, r_{\nu_l}; \mathbf{p}_l, r_l) iD_F^{\mu\nu}(k) j_\nu^N(\mathbf{p}_n, r_n; \mathbf{p}_p, r_p). \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Possiamo poi eseguire la doppia integrazione in x e y ottenendo

$$\begin{aligned} \langle f | S - 1 | i \rangle &\approx - \left(\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \right)^2 C^2 (2\pi)^8 \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ &\sqrt{\frac{m_{\nu_l}}{(2\pi)^3 E_{\nu_l}(\mathbf{p}_{\nu_l})}} \sqrt{\frac{m_l}{(2\pi)^3 E_l(\mathbf{p}_l)}} \sqrt{\frac{m_n}{(2\pi)^3 E_n(\mathbf{p}_n)}} \sqrt{\frac{m_p}{(2\pi)^3 E_p(\mathbf{p}_p)}} \\ &\quad \delta^{(4)}(-k + p_{\nu_l} - p_l) \delta^{(4)}(k + p_n - p_p) \\ &l_\mu(\mathbf{p}_{\nu_l}, r_{\nu_l}; \mathbf{p}_l, r_l) iD_F^{\mu\nu}(k) j_\nu^N(\mathbf{p}_n, r_n; \mathbf{p}_p, r_p) \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

e quindi integrare in k

$$\begin{aligned} \langle f | S - 1 | i \rangle &\approx - \left(\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \right)^2 C^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_l + P_p - P_{\nu_l} - P_n) \\ &\sqrt{\frac{m_{\nu_l}}{(2\pi)^3 E_{\nu_l}(\mathbf{p}_{\nu_l})}} \sqrt{\frac{m_l}{(2\pi)^3 E_l(\mathbf{p}_l)}} \sqrt{\frac{m_n}{(2\pi)^3 E_n(\mathbf{p}_n)}} \sqrt{\frac{m_p}{(2\pi)^3 E_p(\mathbf{p}_p)}} \\ &l_\mu(\mathbf{p}_{\nu_l}, r_{\nu_l}; \mathbf{p}_l, r_l) iD_F^{\mu\nu}(q) j_\nu^N(\mathbf{p}_n, r_n; \mathbf{p}_p, r_p) \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

con $q^\mu \equiv p_{\nu_l}^\mu - p_l^\mu$.

Se definiamo l'ampiezza invariante \mathcal{M} in modo tale che

$$\begin{aligned} \langle f | S - 1 | i \rangle &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_l + P_p - P_{\nu_l} - P_n) \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} \\ &\sqrt{\frac{m_{\nu_l}}{E_{\nu_l}}} \sqrt{\frac{m_l}{E_l}} \sqrt{\frac{m_n}{E_n}} \sqrt{\frac{m_p}{E_p}} \mathcal{M}(\mathbf{p}_{\nu_l}, r_{\nu_l}; \mathbf{p}_n, r_n; \mathbf{p}_l, r_l; \mathbf{p}_p, r_p) \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

allora

$$\mathcal{M} \approx - \left(\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \right)^2 C l_\mu iD_F^{\mu\nu}(q) j_\nu^N. \quad (2.1.22)$$

Dato che stiamo assumendo $q^2 \ll m_W^2$, il propagatore si approssima ad una costante:

$$iD_F^{\mu\nu}(q) \approx -\frac{g^{\mu\nu}}{m_W^2}. \quad (2.1.23)$$

Se consideriamo la relazione al prim'ordine tra la costante di Fermi $G_F \simeq 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ e l'accoppiamento g_w

$$\frac{g_w^2}{8m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}, \quad (2.1.24)$$

l'ampiezza invariante del processo risulta essere

$$\mathcal{M} \approx \frac{G_F C}{\sqrt{2}} l_\mu j_N^\mu. \quad (2.1.25)$$

Da qui in poi sciveremo = al posto di \approx per l'ampiezza \mathcal{M} sottintendendo che questa è un'approssimazione che tiene conto del diagramma di Feynman principale.

La quantità a cui siamo interessati è $|\mathcal{M}|^2$ con certe specifiche sulle polarizzazioni. Si ha

$$|\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{G_F C}{\sqrt{2}} \right)^2 l_\mu j_N^\mu (l_\nu j_N^\nu)^*. \quad (2.1.26)$$

È conveniente definire i tensori

$$L_{\mu\nu} \equiv l_\mu l_\nu^\dagger \quad J_N^{\mu\nu} \equiv j_N^\mu j_N^{\nu\dagger}, \quad (2.1.27)$$

così che

$$|\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{G_F C}{\sqrt{2}} \right)^2 L_{\mu\nu} J_N^{\mu\nu}, \quad (2.1.28)$$

infatti le correnti sono numeri quindi il complesso coniugato coincide con l'hermitiano coniugato.

2.1.2 Calcolo dei tensori mediati sulle polarizzazioni

Consideriamo il tensore del nucleone per primo, dato che quello del leptone è ricavabile come caso particolare di questo. Si ha, omettendo la dipendenza degli spinori dagli impulsi e dagli indici di polarizzazione,

$$J_{\mu\nu}^N = \bar{u}_p^\alpha \gamma_\mu^{\alpha\beta} (g_V - g_A \gamma_5)^{\beta\delta} u_n^\delta \bar{u}_n^\lambda \gamma_\nu^{\lambda\rho} (g_V - g_A \gamma_5)^{\rho\kappa} u_p^\kappa \quad (2.1.29)$$

in cui abbiamo esplicitato gli indici spinoriali per poter trattare con i numeri, che commutano. Osserviamo che possiamo portare l'ultimo fattore all'inizio della produttoria di modo da mettere in evidenza che stiamo trattando la traccia di un

prodotto di matrici e precisamente

$$J_N^{\mu\nu} = \text{tr} [u_p \bar{u}_p \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) u_n \bar{u}_n \gamma^\nu (g_V - g_A \gamma_5)]. \quad (2.1.30)$$

Osserviamo ora che, se vogliamo studiare processi in cui non siamo interessati all'elicità del protone dello stato finale, possiamo sommare sui suoi possibili valori, mentre faremo l'assunzione che il fascio di neutroni iniziali non sia polarizzato così che si debba eseguire una media sul valore del suo spin. In sostanza calcoliamo

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} = \frac{1}{2} \sum_{r_p, r_n=1}^2 J_N^{\mu\nu}. \quad (2.1.31)$$

Dalle proprietà generali degli spinori di base si ha che

$$\sum_{r=1}^2 u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad (2.1.32)$$

e quindi

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} \text{tr} [(\not{p}_p - m_p) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) (\not{p}_n - m_n) \gamma^\nu (g_V - g_A \gamma_5)]. \quad (2.1.33)$$

Consideriamo i vari termini che si ottengono in questo modo:

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p p_\beta^n g_V^2 \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu] \quad (2.1.34)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(2)} = - \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p p_\beta^n g_V g_A \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma_5] \quad (2.1.35)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(3)} = - \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p m_n g_V^2 \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu] \quad (2.1.36)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p m_n g_V g_A \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5] \quad (2.1.37)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(5)} = - \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p p_\beta^n g_V g_A \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\beta \gamma^\nu] \quad (2.1.38)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(6)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p p_\beta^n g_A^2 \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma_5] \quad (2.1.39)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(7)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p m_n g_V g_A \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu] \quad (2.1.40)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(8)} = - \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p m_n g_A^2 \text{tr} [\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5] \quad (2.1.41)$$

e altri 8 termini ottenuti sostituendo \not{p}_p con $-m_p$:

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(9)} = - \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} m_p p_\beta^n g_V^2 \text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu] \quad (2.1.42)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(10)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} m_p p_\beta^n g_V g_A \text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma_5] \quad (2.1.43)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(11)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} m_p m_n g_V^2 \text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \quad (2.1.44)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(12)} = - \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} m_p m_n g_V g_A \text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5] \quad (2.1.45)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(13)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} m_p p_\beta^n g_V g_A \text{tr} [\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\beta \gamma^\nu] \quad (2.1.46)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(14)} = - \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} m_p p_\beta^n g_A^2 \text{tr} [\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma_5] \quad (2.1.47)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(15)} = - \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} m_p m_n g_V g_A \text{tr} [\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu] \quad (2.1.48)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(16)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} m_p m_n g_A^2 \text{tr} [\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5]. \quad (2.1.49)$$

Dalle proprietà delle matrici γ vediamo che molti di questi contributi sono nulli:

$$\begin{aligned} \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(3)} &= \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(4)} = \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(7)} = \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(8)} = \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(9)} = \\ \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(10)} &= \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(12)} = \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(13)} = \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(14)} = \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(15)} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.50)$$

Gli unici contributi non nulli sono i seguenti:

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p p_\beta^n g_V^2 4 \left(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta} \right) \quad (2.1.51)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p p_\beta^n g_V g_A 4i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \quad (2.1.52)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(5)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p p_\beta^n g_V g_A 4i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \quad (2.1.53)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(6)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p p_\beta^n g_A^2 4 \left(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta} \right) \quad (2.1.54)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(11)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} m_p m_n g_V^2 4 g^{\mu\nu} \quad (2.1.55)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(16)} = - \frac{1}{2} \frac{1}{2m_p} \frac{1}{2m_n} m_p m_n g_A^2 4 g^{\mu\nu}. \quad (2.1.56)$$

Effettuando alcuni passaggi essi diventano

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(1)} = \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} g_V^2 (p_p^\mu p_n^\nu - p_p \cdot p_n g^{\mu\nu} + p_p^\nu p_n^\mu) \quad (2.1.57)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(2)} = \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p p_\beta^n g_V g_A i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \quad (2.1.58)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(5)} = \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} p_\alpha^p p_\beta^n g_V g_A i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \quad (2.1.59)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(6)} = \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} g_A^2 (p_p^\mu p_n^\nu - p_p \cdot p_n g^{\mu\nu} + p_p^\nu p_n^\mu) \quad (2.1.60)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(11)} = \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} m_p m_n g_V^2 g^{\mu\nu} \quad (2.1.61)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(16)} = - \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} m_p m_n g_A^2 g^{\mu\nu} \quad (2.1.62)$$

che possiamo accoppiare a due a due in maniera conveniente:

$$\begin{aligned} \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(1)} + \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(6)} &= \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} (g_V^2 + g_A^2) \\ &\quad \times (p_p^\mu p_n^\nu - p_p \cdot p_n g^{\mu\nu} + p_p^\nu p_n^\mu) \end{aligned} \quad (2.1.63)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(2)} + \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(5)} = \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} 2g_V g_A p_\alpha^p p_\beta^n i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \quad (2.1.64)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(11)} + \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(16)} = \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} (g_V^2 - g_A^2) m_p m_n g^{\mu\nu}. \quad (2.1.65)$$

2.1.2.1 Nucleoni

Possiamo adesso fare le approssimazioni del caso. Poiché i nucleoni sono non relativistici avremo

$$|\mathbf{p}_{n,p}| \ll m_{p,n}, \quad (2.1.66)$$

per cui quando sommiamo con lo stesso peso componenti spaziali e temporali dei due quadrimpulsi, il contributo spaziale è trascurabile. In sostanza trascuriamo termini di ordine $O(\varepsilon)$ con $\varepsilon \equiv \frac{|\mathbf{p}_{n,p}|}{m_{n,p}}$. Per cui con buona approssimazione

$$E_{n,p} \approx m_{n,p}. \quad (2.1.67)$$

Tenuto conto di ciò si ha

$$\begin{aligned} \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(1)} + \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(6)} &\approx \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} (g_V^2 + g_A^2) \\ &\quad \times (p_p^\mu p_n^\nu - m_p m_n g^{\mu\nu} + p_p^\nu p_n^\mu) \end{aligned} \quad (2.1.68)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(2)} + \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(5)} \approx \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} 2g_V g_A (p_k^p m_n - m_p p_k^n) i\epsilon^{0\mu\nu k} \quad (2.1.69)$$

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(11)} + \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(16)} \approx \frac{1}{m_p} \frac{1}{2m_n} (g_V^2 - g_A^2) m_p m_n g^{\mu\nu} \quad (2.1.70)$$

con $k = 1, 2, 3$. Si nota in particolare che abbiamo ottenuto una ϵ^{ijk} tridimensionale nel secondo gruppo di contributi.

2.1.2.2 Leptoni

Per ottenere il tensore leptonico è sufficiente fare le seguenti sostituzioni a $\langle J_{\mu\nu}^N \rangle_{\text{spin}}$:

$$\begin{aligned} n &\rightarrow \nu_l \\ p &\rightarrow l \\ g_V &\rightarrow 1 \\ g_A &\rightarrow 1 \end{aligned} \quad (2.1.71)$$

e moltiplicare per un fattore 2 che compensa quello proveniente dalla media sugli spin neutronici dato che il neutrino compare in un solo stato di elicità. Più precisamente vogliamo considerare uno stato iniziale che consta solamente di neutrini levogiri (nel limite ultrarelativistico tali sono i neutrini con elicità negativa $r_{\nu_l} = 2$). Osserviamo allora che possiamo sommare una stessa quantità di neutrini destrigiri (neutrini con elicità positiva $r_{\nu_l} = 1$ nel limite ultrarelativistico) senza modificare il risultato dato che nella traccia ottenuta nel calcolo di $L_{\mu\nu}$ compare la quantità

$$2P_L u^{r\nu_l} (1 - \gamma_5) u^{r\nu_l} = 2P_L u^{r\nu_l} \quad (2.1.72)$$

che per $r_{\nu_l} = 1$ è uguale a 0 a meno di termini di ordine $\frac{m}{E}$. Quindi

$$\langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(1)} + \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(6)} = 2 \frac{1}{m_l} \frac{1}{2m_{\nu_l}} 2 \left(p_\mu^l p_\nu^{\nu_l} - p_l \cdot p_{\nu_l} g_{\mu\nu} + p_\nu^l p_\mu^{\nu_l} \right) \quad (2.1.73)$$

$$\langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(2)} + \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(5)} = 2 \frac{1}{m_l} \frac{1}{2m_{\nu_l}} 2 p_l^\alpha p_{\nu_l}^\beta i\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.1.74)$$

In seguito prenderemo il limite $m_l, m_{\nu_l} \rightarrow 0$. Osserviamo che, ai fini del calcolo della sezione d'urto, il prodotto $\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}$ va moltiplicato con dei fattori cinematici. Questo comporta la cancellazione esatta di tutte le masse a denominatore

e in particolare di quella dei leptoni. Notiamo che la natura puntiforme delle due particelle ha comportato la scomparsa del contributo $\langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(11)} + \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}^{(16)}$.

2.1.3 Rate di transizione

Alla luce della considerazione sui fattori cinematici, conviene inoltre moltiplicare $\langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}$ per $2m_l m_{\nu_l}$ e $\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}$ per $2m_p m_n$. Si ha quindi

$$2m_p m_n \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \approx (g_V^2 + g_A^2) (p_p^\mu p_n^\nu + p_p^\nu p_n^\mu) - 2g_A^2 m_p m_n g^{\mu\nu} + 2g_V g_A (p_k^p m_n - m_p p_k^n) i\epsilon^{0\mu\nu k} \quad (2.1.75)$$

e

$$2m_l m_{\nu_l} \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} = 4 (p_\mu^l p_{\nu_l}^\nu + p_\nu^l p_\mu^{\nu_l}) - 4p_l \cdot p_{\nu_l} g_{\mu\nu} + 4p_l^\alpha p_{\nu_l}^\beta i\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.1.76)$$

Possiamo allora calcolare $4m_p m_n m_l m_{\nu_l} \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}$. Vediamo ora che il termine in $g_V g_A$ della corrente nucleonica dà un contributo trascurabile a questo prodotto perché viene moltiplicato per la stessa quantità per cui vengono moltiplicati termini quadratici nelle energie nucleoniche che dominano nella nostra approssimazione. In effetti quindi la corrente nucleonica è equivalente a

$$2m_p m_n \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \equiv (g_V^2 + g_A^2) (p_p^\mu p_n^\nu + p_p^\nu p_n^\mu) - 2g_A^2 m_p m_n g^{\mu\nu}. \quad (2.1.77)$$

Possiamo fare un ragionamento analogo confrontando le diverse componenti del tensore. Infatti esse andranno a comporre, una volta contratto $\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}$ con $\langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}$, una somma di termini dei quali potremmo trascurare quelli di ordine ε . Quindi vale la seguente ulteriore semplificazione

$$\langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \equiv (g_V^2 + g_A^2) \delta_0^\mu \delta_0^\nu - g_A^2 g^{\mu\nu}. \quad (2.1.78)$$

Abbiamo ottenuto in questo modo un tensore simmetrico così che di fatto anche la parte di $\langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}}$ in $\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}$ non contribuisce, essendo antisimmetrica negli stessi indici. Quindi

$$m_l m_{\nu_l} \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \equiv 2 (p_\mu^l p_{\nu_l}^\nu + p_\nu^l p_\mu^{\nu_l}) - 2p_l \cdot p_{\nu_l} g_{\mu\nu}. \quad (2.1.79)$$

Si ha dunque

$$m_l m_{\nu_l} \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} = \sum_{i=1}^4 \mathcal{A}_i \quad (2.1.80)$$

con

$$\mathcal{A}_1 = 2 (g_V^2 + g_A^2) \delta_0^\mu \delta_0^\nu \left(p_\mu^l p_\nu^{l'} + p_\nu^l p_\mu^{l'} \right) \quad (2.1.81)$$

$$\mathcal{A}_2 = - 2 (g_V^2 + g_A^2) \delta_0^\mu \delta_0^\nu p_l \cdot p_{l'} g_{\mu\nu} \quad (2.1.82)$$

$$\mathcal{A}_3 = - 2g_A^2 g^{\mu\nu} \left(p_\mu^l p_\nu^{l'} + p_\nu^l p_\mu^{l'} \right) \quad (2.1.83)$$

$$\mathcal{A}_4 = 2g_A^2 g^{\mu\nu} p_l \cdot p_{l'} g_{\mu\nu}, \quad (2.1.84)$$

ed effettuando pochi passaggi e usando le varie approssimazioni (tra cui il limite di massa nulla dei leptoni) si trova

$$\mathcal{A}_1 = 4 (g_V^2 + g_A^2) E_{\nu_l} E_l \quad (2.1.85)$$

$$\mathcal{A}_2 = - 2 (g_V^2 + g_A^2) E_{\nu_l} E_l (1 - \cos \theta_{l\nu_l}) \quad (2.1.86)$$

$$\mathcal{A}_3 = - 4g_A^2 E_{\nu_l} E_l (1 - \cos \theta_{l\nu_l}) \quad (2.1.87)$$

$$\mathcal{A}_4 = 8g_A^2 E_{\nu_l} E_l (1 - \cos \theta_{l\nu_l}). \quad (2.1.88)$$

Sommiamo quindi tutti i contributi così calcolati:

$$m_{\nu_l} m_l \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \approx 2E_{\nu_l} E_l \left[(g_V^2 + 3g_A^2) + (g_V^2 - g_A^2) \cos \theta_{l\nu_l} \right]. \quad (2.1.89)$$

Sostituendo i valori numerici di g_V e g_A si ha quindi

$$m_{\nu_l} m_l \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \approx 2E_{\nu_l} E_l [5.54 - 0.51 \cos \theta_{l\nu_l}]. \quad (2.1.90)$$

Possiamo quindi trascurare in certe condizioni il secondo termine, essendo

$$\frac{|0.51 \cos \theta_{l\nu_l}|}{5.54} \leq \frac{0.51}{5.54} \approx 0.09, \quad \forall \theta_{l\nu_l} \in [0, 2\pi), \quad (2.1.91)$$

e approssimare alla soluzione isotropa

$$m_{\nu_l} m_l \langle J_N^{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \langle L_{\mu\nu} \rangle_{\text{spin}} \approx 2 \cdot 5.54 E_l E_{\nu_l}. \quad (2.1.92)$$

In conclusione

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{spin}} \equiv \frac{1}{2} \sum_{r_n, r_p, r_l=1}^2 |\mathcal{M}|^2 \approx \frac{E_{\nu_l} E_l}{m_{\nu_l} m_l} G_F^2 C^2 (g_V^2 + 3g_A^2). \quad (2.1.93)$$

La rate di transizione W_{if} è data da

$$W_{if} \equiv \frac{m_{\nu_l} m_l m_n m_p}{E_{\nu_l} E_l E_n E_p} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{spin}} \approx G_F^2 C^2 (g_V^2 + 3g_A^2). \quad (2.1.94)$$

2.1.4 Sezione d'urto per fasci di particelle

Noto il modulo quadro dell'ampiezza di transizione invariante (sommato e mediato opportunamente sugli spin delle particelle), possiamo calcolare la sezione d'urto per il processo nel caso in cui un neutrino levogiro ultrarelativistico localizzato in un volume V collide su un neutrone approssimativamente fermo di polarizzazione casuale, localizzato nello stesso volume. Innanzitutto vediamo che la probabilità di osservare il leptone e il protone nel volumetto $d^3\mathbf{p}_l d^3\mathbf{p}_p$ intorno a $(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_p)$, essendo il neutrino e il neutrone nel volumetto $d^3\mathbf{p}_{\nu_l} d^3\mathbf{p}_n$ intorno a $(\mathbf{p}_{\nu_l}, \mathbf{p}_n)$, è

$$dP(\mathbf{p}_{\nu_e}, \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_p, \mathbf{p}_n) = \frac{1}{2} \sum_{r_{\nu_l}, r_n, r_l, r_p=1}^2 |\langle \mathbf{p}_l, r_l; \mathbf{p}_p, r_p | S-1 | \mathbf{p}_{\nu_l}, r_{\nu_l}; \mathbf{p}_n, r_n \rangle|^2 \times d^3\mathbf{p}_{\nu_l} d^3\mathbf{p}_n d^3\mathbf{p}_l d^3\mathbf{p}_p \quad (2.1.95)$$

ovvero

$$dP(\mathbf{p}_{\nu_e}, \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_p, \mathbf{p}_n) = \frac{1}{(2\pi)^4} [\delta^{(4)}(P_l + P_p - P_{\nu_l} - P_n)]^2 W_{if} \times d^3\mathbf{p}_{\nu_l} d^3\mathbf{p}_n d^3\mathbf{p}_l d^3\mathbf{p}_p. \quad (2.1.96)$$

Ora, nell'approssimazione di lungo tempo di transizione T e grande volume di normalizzazione dei pacchetti d'onda V , si ha

$$\left[\delta^{(4)}(P_l + P_p - P_{\nu_l} - P_n) \right]^2 \approx \frac{TV}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(P_l + P_p - P_{\nu_l} - P_n), \quad (2.1.97)$$

per cui

$$dP(\mathbf{p}_{\nu_e}, \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_p, \mathbf{p}_n) \approx \frac{TV}{(2\pi)^8} \delta^{(4)}(P_l + P_p - P_{\nu_l} - P_n) G_F^2 C^2 (g_V^2 + 3g_A^2) \times d^3\mathbf{p}_{\nu_l} d^3\mathbf{p}_n d^3\mathbf{p}_l d^3\mathbf{p}_p \quad (2.1.98)$$

Inoltre, per quanto detto sul neutrino e sul neutrone, si ha

$$d^3\mathbf{p}_{\nu_l} = \frac{(2\pi)^3}{V} \quad d^3\mathbf{p}_n = \frac{(2\pi)^3}{V}, \quad (2.1.99)$$

per cui

$$dP(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_p) \approx \frac{T}{(2\pi)^2 V} \delta^{(4)}(P_l + P_p - P_{\nu_l} - P_n) G_F^2 C^2 (g_V^2 + 3g_A^2) d^3\mathbf{p}_l d^3\mathbf{p}_p. \quad (2.1.100)$$

Poniamo adesso che dW_X sia la rate di eventi di questo tipo su un totale di W neutrini inviati nel tempo T su un bersaglio fisso di neutroni, e Σ il numero di neutroni per unità di superficie efficaci. Ora per quanto detto Σ è esattamente $\frac{1}{5}$

dove $S = \frac{V}{v_{\nu_l} T}$ è l'area efficace, dato che nel volume V abbiamo un neutrone. I neutroni sono approssimativamente fermi quindi queste definizioni hanno senso.

Definiamo la sezione d'urto differenziale $d\sigma(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_p)$ come

$$d\sigma(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_p) \equiv \frac{dW_X}{W\Sigma}. \quad (2.1.101)$$

Ora il rapporto tra dW_X e W è proprio $dP(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_p)$ per cui

$$d\sigma(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_p) \approx \frac{1}{(2\pi)^2 v_{\nu_l}} \delta^{(4)}(P_l + P_p - P_{\nu_l} - P_n) G_F^2 C^2 (g_V^2 + 3g_A^2) d^3\mathbf{p}_l d^3\mathbf{p}_p. \quad (2.1.102)$$

Potremmo essere interessati alla sezione d'urto differenziale relativa in particolare all'angolo solido di emissione del leptone. In tal caso dovremmo integrare sui moduli degli impulsi finali e sulla direzione del protone. Si ha quindi

$$\begin{aligned} d\sigma(\theta_l, \varphi_l) &\approx \frac{1}{(2\pi)^2 v_{\nu_l}} G_F^2 C^2 (g_V^2 + 3g_A^2) d\Omega_l \\ \int_0^\infty d|\mathbf{p}_l| |\mathbf{p}_l|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p}_p \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\nu_l} + \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_l - \mathbf{p}_p) \delta(E_{\nu_l} + m_n - E_l - m_p) \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^2 v_{\nu_l}} G_F^2 C^2 (g_V^2 + 3g_A^2) d\Omega_l \int_0^\infty dE_l E_l^2 \delta(E_{\nu_l} - E_l) \\ &\approx \frac{E_{\nu_l}^2}{(2\pi)^2} G_F^2 C^2 (g_V^2 + 3g_A^2) d\Omega_l, \end{aligned} \quad (2.1.103)$$

in cui si è usato $v_{\nu_l} \approx 1$. Come si vede questa sezione d'urto è isotropa, cioè non dipende dall'angolo di osservazione.

La sezione d'urto totale è invece data da

$$\sigma \approx \frac{E_{\nu_l}^2}{\pi} G_F^2 C^2 (g_V^2 + 3g_A^2). \quad (2.1.104)$$

2.1.5 Sezione d'urto nella miscela di gas

Per quanto riguarda la sezione d'urto nel caso dei neutrini presenti nella miscela di gas di interesse, naturalmente andranno considerate le distribuzioni non banali dei numeri quantici delle particelle.

Ora la reazione $\nu_e + n \rightarrow e + p$ con valori ben precisi dei numeri quantici di elettrone e protone può avvenire solamente se nella miscela non sono presenti elettroni e protoni con tali numeri quantici, altrimenti la transizione non può verificarsi a causa del principio di esclusione di Pauli. Inoltre, se fissiamo i numeri quantici del neutrino, a causa delle leggi di conservazione, anche quelli del neutrone saranno fissati quindi la reazione potrà avvenire solamente se un tale neutrone è presente nella miscela.

Se queste condizioni fossero automaticamente soddisfatte, come nel caso in cui non ci fossero protoni ed elettroni in partenza e ci fosse un neutrone con l'impulso desiderato e un preciso valore dello spin (anche se casuale), si avrebbe

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{V}(\mathbf{p}_{\nu_e}, \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_p, \mathbf{p}_n) &\approx V G_F^2 C^2 (g_V^2 + 3g_A^2) (2\pi)^4 \\ \delta^{(4)}(P_e + P_p - P_{\nu_e} - P_n) &\frac{d^3\mathbf{p}_{\nu_e}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (2.1.105)$$

Considerando invece una distribuzione degli impulsi delle varie particelle, si ha una certa probabilità che ciascuna delle precedenti condizioni sia soddisfatta per un impulso \mathbf{p}_i . Precisamente la probabilità che ci sia un neutrone di impulso \mathbf{p}_n , con un certo valore dello spin, è data da (prima di passare al limite termodinamico)

$$P_n(\mathbf{p}_n) = f_n(\mathbf{p}_n). \quad (2.1.106)$$

Mentre le probabilità che non ci siano elettroni e protoni di impulsi \mathbf{p}_e e \mathbf{p}_p , con valori precisi di elicità, sono rispettivamente

$$P_e(\mathbf{p}_e) = 1 - f_e(\mathbf{p}_e) \quad (2.1.107)$$

$$P_p(\mathbf{p}_p) = 1 - f_p(\mathbf{p}_p). \quad (2.1.108)$$

Quindi la sezione d'urto per un processo con valori ben precisi delle polarizzazioni e degli impulsi di tutte le particelle coinvolte sarebbe

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{V}(\mathbf{p}_e, r_e; \mathbf{p}_p, r_p; \mathbf{p}_n, r_n; \mathbf{p}_{\nu_e}, r_{\nu_e}) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_e + P_p - P_{\nu_e} - P_n) \\ W_{r_{\nu_e}, r_e, r_p, r_n} &[1 - f_e(\mathbf{p}_e)][1 - f_p(\mathbf{p}_p)] f_n(\mathbf{p}_n) \frac{d^3\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (2.1.109)$$

essendo $W_{r_{\nu_e}, r_e, r_p, r_n}$ la rate di transizione specifica. Se non siamo interessati alla polarizzazione delle particelle finali, come già detto, sommiamo sulle elicità di elettrone e protone. Inoltre, poiché abbiamo introdotto la distribuzione dei neutroni non dobbiamo mediare sulle polarizzazioni iniziali del neutrone ma bensì sommare. Volendo quindi utilizzare la W_{if} ricavata in precedenza, in cui la media sulle polarizzazioni del neutrone aveva portato ad introdurre un fattore $\frac{1}{2}$, occorre moltiplicare per 2 per compensare tale fattore. Si ha dunque

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{V}(\mathbf{p}_{\nu_e}, \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_p, \mathbf{p}_n) &= W_{if} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_e + P_p - P_{\nu_e} - P_n) \\ &2 [1 - f_e(\mathbf{p}_e)][1 - f_p(\mathbf{p}_p)] f_n(\mathbf{p}_n) \frac{d^3\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (2.1.110)$$

A questo punto possiamo valutare la sezione d'urto per unità di volume indipendentemente dalle proprietà di elettroni, protoni e neutroni, che corrisponde al

reciproco del libero cammino medio dei neutrini. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(E_{\nu_e})}{V} &= G_F^2 \cos^2 \theta_C (g_V^2 + 3g_A^2) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} [1 - f_e(\mathbf{p}_e)] 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_e + P_p - P_{\nu_e} - P_n) f_n(\mathbf{p}_n) [1 - f_p(\mathbf{p}_p)]. \end{aligned} \quad (2.1.111)$$

Per eseguire questo calcolo è necessario conoscere la forma dei potenziali chimici da cui dipendono le funzioni di distribuzione. Inoltre è necessario conoscere le densità delle singole specie chimiche coinvolte dato che i potenziali dipendono da esse.

2.2 Libero cammino medio del neutrino

Semplifichiamo la forma dell'integrale (2.1.111) selezionandone una parte integrabile analiticamente in molte situazioni d'interesse. Si ha

$$\frac{\sigma(E_{\nu_e})}{V} = W_{if} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} [1 - f_e(\mathbf{p}_e)] S(q_0, q), \quad (2.2.1)$$

essendo

$$S(q_0, q) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_e + P_p - P_{\nu_e} - P_n) f_n(\mathbf{p}_n) [1 - f_p(\mathbf{p}_p)] \quad (2.2.2)$$

il cosiddetto fattore di forma dinamico, con $q_0 \equiv E_{\nu_e} - E_e$ e $q \equiv |\mathbf{q}|$, essendo $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}_{\nu_e} - \mathbf{p}_e$. Infatti E_e e \mathbf{p}_e compaiono solo in queste combinazioni all'interno di S . Inoltre le varie energie compaiono solo nella forma $K_i = E_i - m_i$ così che è conveniente considerare questa anziché l'energia comprensiva del termine di massa. Effettuiamo subito un cambio di variabile nell'integrale in $d^3 \mathbf{p}_e$, passando alle coordinate cilindriche, e prendendo in particolare l'angolo zenitale dell'impulso dell'elettrone rispetto alla direzione di \mathbf{p}_{ν_e} . Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(K_{\nu_e})}{V} &= W_{if} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} [1 - f_e(\mathbf{p}_e)] S(q_0, q) \\ &= \frac{W_{if}}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta_e \int_0^\infty dp_e p_e^2 [1 - f_e(p_e)] S(q_0, q) \\ &= \frac{W_{if}}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta_e \int_0^\infty dK_e K_e^2 [1 - f_e(K_e)] S(q_0, q). \end{aligned}$$

Naturalmente fin qui q_0 e q sono funzioni di \mathbf{p}_e , o equivalentemente di φ_e , $\cos \theta_e$ e K_e (in realtà non dipendono da φ_e), ed f va di volta in volta intesa come la funzione che dato l'argomento restituisce il corrispondente valore di $f(\mathbf{p})$. Si ha

$$q_0 = K_{\nu_e} - K_e \quad (2.2.3)$$

$$q^2 = K_{\nu_e}^2 + K_e^2 - 2K_{\nu_e} K_e \cos \theta_e. \quad (2.2.4)$$

Lo jacobiano di (q_0, q^2) rispetto a $(K_e, \cos \theta_e)$ è quindi

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{dq^2}{dK_e} & -2K_{\nu_e}K_e \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

per cui

$$2q dq_0 dq = dq_0 dq^2 = 2K_{\nu_e}K_e dK_e d \cos \theta_e \quad (2.2.6)$$

e invertendo

$$K_e^2 dK_e d \cos \theta_e = q \frac{K_e}{K_{\nu_e}} dq_0 dq. \quad (2.2.7)$$

Ora K_e assume tutti i valori non negativi per cui q_0 va da $-\infty$ a K_{ν_e} che è non negativo. Invece, il massimo di q , e quindi di q^2 , si ha quando $\cos \theta_e = -1$, quindi $q_{\max}^2 = K_{\nu_e}^2 + K_e^2 + 2K_{\nu_e}K_e = (K_{\nu_e} + K_e)^2$ e $q_{\max} = K_{\nu_e} + K_e = 2K_{\nu_e} - q_0$. Il minimo invece si ha in corrispondenza di $\cos \theta_e = 1$, quindi $q_{\min}^2 = K_{\nu_e}^2 + K_e^2 - 2K_{\nu_e}K_e = (K_{\nu_e} - K_e)^2$ e $q_{\min} = |K_{\nu_e} - K_e| = |q_0|$. Quindi

$$\frac{\sigma(K_{\nu_e})}{V} = \frac{W_{if}}{(2\pi)^2 K_{\nu_e}} \int_{-\infty}^{K_{\nu_e}} dq_0 K_e [1 - f_e(K_e)] \int_{|q_0|}^{2K_{\nu_e} - q_0} dq q S(q_0, q). \quad (2.2.8)$$

Nel caso di nucleoni non interagenti, e per certi tipi di interazioni nucleoniche, l'integrale $S(q_0, q)$ si può calcolare analiticamente.

2.2.1 Nucleoni nel modello di potenziale di Skyrme

Nel modello di potenziale di Skyrme descritto in Sezione 1.2 si ha

$$K_i = \frac{\mathbf{p}_i^2}{2M_i^*} + U_i, \quad i = n, p \quad (2.2.9)$$

con M_i^* e U_i fortemente dipendenti dalla densità.

Allora possiamo innanzitutto integrare in $d^3\mathbf{p}_p$ grazie alla delta di Dirac sui 3-impulsi. Quindi

$$S(q_0, q) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p}_n \delta(K_n - K'_p + q_0) f_n(\mathbf{p}_n) [1 - f_p(\mathbf{p}'_p)], \quad (2.2.10)$$

essendo $\mathbf{p}'_p = \mathbf{p}_n + \mathbf{q}$, $K'_p \equiv \frac{(\mathbf{p}_n + \mathbf{q})^2}{2M_p^*} + U_p$. Passiamo anche qui in coordinate cilindriche:

$$S(q_0, q) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dp_n p_n^2 \delta(K_n - K'_p + q_0) f_n(p_n) [1 - f_p(K'_p)] \quad (2.2.11)$$

dove θ è preso rispetto alla direzione di \mathbf{q} e quindi rappresenta anche l'angolo tra \mathbf{p}_n e \mathbf{q} . In questo modo possiamo esprimere la delta di Dirac in funzione di $\cos\theta$. Si ha

$$\begin{aligned} K_n - K'_p + q_0 &= \frac{\mathbf{p}_n^2}{2M_n^*} + U_n - \frac{(\mathbf{p}_n + \mathbf{q})^2}{2M_p^*} - U_p + q_0 \\ &= \frac{-2p_n q \cos\theta + \chi p_n^2}{2M_p^*} + c \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

con

$$\chi \equiv 1 - \frac{M_p^*}{M_n^*} \quad (2.2.13)$$

e

$$c \equiv q_0 + U_n - U_p - \frac{q^2}{2M_p^*}. \quad (2.2.14)$$

Questa espressione si annulla in

$$\cos\theta = \overline{\cos\theta_0} \quad (2.2.15)$$

con

$$\cos\theta_0 = \frac{M_p^*}{p_n q} \left(c - \frac{\chi p_n^2}{2M_p^*} \right), \quad (2.2.16)$$

che ricade tra -1 e 1 solo per certi valori di p_n . In particolare imponendo

$$\frac{M_p^*}{p_n q} \left(c - \frac{\chi p_n^2}{2M_p^*} \right) \leq 1, \quad (2.2.17)$$

si trova che deve essere

$$p_+^2 \geq p_n^2 \geq p_-^2 \quad (2.2.18)$$

con

$$p_\pm^2 = \frac{2q^2}{\chi^2} \left[\left(1 + \frac{\chi M_p^* c}{q^2} \right) \pm \sqrt{1 + \frac{2\chi M_p^* c}{q^2}} \right]. \quad (2.2.19)$$

Ora, poiché

$$\left| \frac{d(K_n - K'_p + q_0)}{d\cos\theta} \right| = \frac{p_n q}{M_p^*}, \quad (2.2.20)$$

si ha

$$\delta(K_n - K'_p + q_0) = \frac{M_p^*}{p_n q} \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \Theta(p_n^2 - p_-^2) \Theta(p_+^2 - p_n^2), \quad (2.2.21)$$

o equivalentemente

$$\delta(K_n - K'_p + q_0) = \frac{M_p^*}{p_n q} \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \Theta(K_n - e_- - U_n) \Theta(e_+ - K_n + U_n), \quad (2.2.22)$$

con

$$e_{\pm} = \frac{p_{\pm}^2}{2M_n^*}. \quad (2.2.23)$$

Quindi sostituendo e integrando in $\cos \theta$ e φ si ha

$$\begin{aligned} S(q_0, q) &= \frac{M_p^*}{2\pi q} \int_{p_-^2}^{p_+^2} dp_n^2 f_n(p_n) [1 - f_p(K'_p)] \\ &= \frac{M_n^* M_p^*}{\pi q} \int_{e_- + U_2}^{e_+ + U_2} dK_n f_n(K_n) [1 - f_p(K'_p)], \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Per risolvere l'integrale residuo esplicitiamo le due funzioni di distribuzione

$$f_n(K_n) = \frac{1}{1 + \exp[\beta(K_n - \mu_n)]} \quad (2.2.25)$$

$$f_p(K'_p) = \frac{1}{1 + \exp[\beta(K'_p - \mu_p)]}, \quad (2.2.26)$$

quindi per prima cosa passiamo dalla variabile K_n a

$$x = \beta(K_n - \mu_n), \quad (2.2.27)$$

ottenendo

$$S(q_0, q) = \frac{M_n^* M_p^*}{\pi q \beta} \int_{x_-}^{x_+} dx f_n(x) [1 - f_p(x + z)], \quad (2.2.28)$$

con

$$x_{\pm} = \beta(e_{\pm} + U_n - \mu_n) \quad (2.2.29)$$

e z tale che

$$x + z = \beta(K'_p - \mu_p). \quad (2.2.30)$$

Dunque

$$\begin{aligned} z &= \beta (K'_p - K_n - \mu_p + \mu_n) \\ &= \beta (q_0 + \hat{\mu}), \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

perché il $\cos \theta$ va valutato in $\cos \theta_0$ di modo che, per costruzione, $K'_p - K_n = q_0$. Si è introdotto $\hat{\mu} \equiv \mu_n - \mu_p$. Ora

$$\begin{aligned} 1 - f(x) &= 1 - \frac{1}{1 + \exp(x)} \\ &= \frac{\exp(x)}{1 + \exp(x)} \\ &= \frac{1}{1 + \exp(-x)} \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

$$= f(-x), \quad (2.2.33)$$

quindi

$$\begin{aligned} S(q_0, q) &= \frac{M_n^* M_p^*}{\pi q \beta} \int_{x_-}^{x_+} dx f_n(x) f_p(-x - z) \\ &= \frac{M_n^* M_p^*}{\pi q \beta} \int_{x_-}^{x_+} dx \frac{1}{1 + \exp(x)} \frac{1}{1 + \exp(-x - z)} \\ &= \frac{M_n^* M_p^*}{\pi q \beta} \frac{1}{1 - \exp(-z)} \ln \frac{1 + \exp(x)}{1 + \exp(x + z)} \Big|_{x_+}^{x_-} \\ &= \frac{M_n^* M_p^*}{\pi q \beta} \frac{1}{1 - \exp(-z)} \left[\ln \frac{1 + \exp(x_-)}{1 + \exp(x_- + z)} - \ln \frac{1 + \exp(x_+)}{1 + \exp(x_+ + z)} \right] \\ &= \frac{M_n^* M_p^*}{\pi q \beta} \frac{\xi_- - \xi_+}{1 - \exp(-z)}, \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

essendo

$$\xi_{\pm} = \ln \frac{1 + \exp(x_{\pm})}{1 + \exp(x_{\pm} + z)} = \ln \frac{1 + \exp[\beta(e_{\pm} + U_n - \mu_n)]}{1 + \exp[\beta(e_{\pm} + U_n + q_0 - \mu_p)]}. \quad (2.2.35)$$

Infine si trova

$$\frac{\sigma(K_{\nu_e})}{V} = \frac{2W_{if} M_n^* M_p^* T}{(2\pi)^3 K_{\nu_e}} \int_{-\infty}^{K_{\nu_e}} dq_0 K_e [1 - f_e(K_e)] \frac{z}{1 - \exp(-z)} \int_{|q_0|}^{2K_{\nu_e} - q_0} dq \frac{\xi_- - \xi_+}{z}. \quad (2.2.36)$$

2.2.2 Approssimazione di alta degenerazione

Per certe temperature, come $T = 5 \text{ MeV}$, alle densità considerate, i risultati sulla composizione chimica mostrano che le varie temperature di Fermi sono al di sotto della temperatura della miscela. Questo comporta che le particelle che possono modificare il loro stato interagendo mediante la reazione studiata sono principalmente quelle che si trovano nei pressi delle superfici di Fermi delle rispettive specie chimiche. Quindi all'integrale della (2.1.111) contribuiranno principalmente quelle particelle che occupano stati con impulso compreso in un intorno di ordine T dal rispettivo impulso di Fermi p_F^i . Infatti in un gas quasi completamente degenere, la funzione di distribuzione si discosta dalla funzione a gradino $\Theta(\epsilon_F - E + m)$ solo in un intorno di ordine T centrato sull'energia di Fermi ϵ_F . Lontano da questo intorno si ha quindi

$$\begin{aligned} & [1 - f_e(E_e)] [1 - f_p(E_p)] f_n(E_n) \approx \\ & \approx [1 - \Theta(-E_e + m_e + \epsilon_F^e)] [1 - \Theta(-E_p + m_p + \epsilon_F^p)] \Theta(-E_n + m_n + \epsilon_F^n) = \\ & = \Theta(E_e - m_e - \epsilon_F^e) \Theta(E_p - m_p - \epsilon_F^p) \Theta(-E_n + m_n + \epsilon_F^n) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

In questa situazione il potenziale chimico è approssimativamente uguale all'energia di Fermi per cui le quantità $\frac{\mu_i}{T}$ sono esse stesse molto maggiori di 1. La situazione generica in cui si verifica questo è detta di alta degenerazione. In questa situazione la (2.2.36) si può calcolare analiticamente.

Esaminiamo innanzitutto l'integrale in q che chiamiamo I_q :

$$I_q = \int_{|q_0|}^{2K_{\nu_e} - q_0} dq \frac{\xi_- - \xi_+}{z}. \quad (2.2.38)$$

Ora, per $z = 0$ anche $\xi_{\pm} = 0$ e $zI_q = 0$. Invece per $z \neq 0$ conviene considerare separatamente i due termini $\frac{\xi_{\pm}}{z}$ e poi confrontare i limiti perché, come si vede, sono separatamente finiti. Definiamo

$$E_{\pm} \equiv e_{\pm} + U_n. \quad (2.2.39)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\mu_i/T \rightarrow \infty} \frac{\xi_{\pm}}{z} &= \lim_{\beta\mu_i \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1 + \exp[\beta(E_{\pm} - \mu_n)]}{1 + \exp[\beta(E_{\pm} + q_0 - \mu_p)]}}{\beta(q_0 + \mu_n - \mu_p)} \\ &= \lim_{\beta\mu_i \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta(q_0 + \mu_n - \mu_p)} \\ &\quad \times \begin{cases} \ln \frac{1}{\exp[-\beta(E_{\pm} - \mu_n)] + \exp[\beta(q_0 + \mu_n - \mu_p)]} & E_{\pm} > \mu_n \\ \ln \frac{1}{1 + \exp[\beta(E_{\pm} + q_0 - \mu_p)]} & E_{\pm} < \mu_n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

Il caso $E_{\pm} = \mu_n$ rappresenta un insieme di misura nulla, quindi possiamo ignorarlo. Consideriamo $\mu_n > \mu_p$, che dai dati sui potenziali chimici risulta essere la situazione che ci interessa. Per $E_{\pm} > \mu_n$ si ha

$$\lim_{\beta\mu_i \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{\exp[-\beta(E_{\pm} - \mu_n)] + \exp[\beta(q_0 + \mu_n - \mu_p)]}}{\beta(q_0 + \mu_n - \mu_p)} = -1. \quad (2.2.41)$$

Per $E_{\pm} < \mu_n$, poiché

$$E_{\pm} + q_0 - \mu_p < q_0 + \mu_n - \mu_p, \quad (2.2.42)$$

si ha

$$\beta(E_{\pm} + q_0 - \mu_p) \ll \beta(q_0 + \mu_n - \mu_p) \quad (2.2.43)$$

quindi

$$\left| \lim_{\beta\mu_i \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{1 + \exp[\beta(E_{\pm} + q_0 - \mu_p)]}}{\beta(q_0 + \mu_n - \mu_p)} \right| \ll \left| \lim_{\beta\mu_i \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{1 + \exp[\beta(q_0 + \mu_n - \mu_p)]}}{\beta(q_0 + \mu_n - \mu_p)} \right| = 1. \quad (2.2.44)$$

Dunque

$$\lim_{\mu_i/T \rightarrow \infty} \frac{\xi_{\pm}}{z} = \Theta(\mu_n - e_{\pm} - U_n) - 1 \quad (2.2.45)$$

e

$$\lim_{\mu_i/T \rightarrow \infty} \frac{\xi_{-} - \xi_{+}}{z} = \Theta(\mu_n - e_{-} - U_n) - \Theta(\mu_n - e_{+} - U_n). \quad (2.2.46)$$

Questa funzione è equivalente a $\Theta[q - (p_{n,F} - p_{p,F})]$. Infatti, poiché gli esponenziali che compaiono nella q_0 -integrazione costituiscono, per quanto detto, una funzione altamente piccata in $q_0 = -\hat{\mu}$, e poiché stiamo assumendo che i potenziali chimici siano approssimativamente uguali alle energie di Fermi, si possono fare le seguenti approssimazioni

$$\mu_n \simeq \epsilon_F^n \simeq \frac{p_{n,F}^2}{2M_n^*} + U_n \quad (2.2.47)$$

e

$$q_0 \simeq \mu_p - \mu_n \simeq \frac{p_{p,F}^2}{2M_p^*} - \frac{p_{n,F}^2}{2M_n^*} + U_p - U_n \quad (2.2.48)$$

da cui

$$c \simeq \frac{p_{p,F}^2 + (\chi - 1)p_{n,F}^2 - q^2}{2M_p^*} \quad (2.2.49)$$

e

$$\begin{aligned} p_{\pm} &= \frac{2}{\chi^2} \left[(q^2 + \chi M_p^* c) \pm q \sqrt{q^2 + 2\chi M_p^* c} \right] \\ &\simeq \frac{q^2}{\chi} \left(\frac{2}{\chi} - 1 \right) + \frac{p_{p,F}^2}{\chi} + \frac{(\chi - 1)}{\chi} p_{n,F}^2 \\ &\pm \frac{2q}{\chi} \sqrt{q^2 \frac{(1 - \chi)}{\chi^2} + \frac{p_{p,F}^2}{\chi} + \frac{(\chi - 1)}{\chi} p_{n,F}^2}. \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

Quindi

$$\mu_n \geq e_- + U_n \quad (2.2.51)$$

è equivalente a

$$p_{n,F}^2 \geq p_-^2 \quad (2.2.52)$$

ovvero

$$2q \sqrt{q^2 \frac{(1 - \chi)}{\chi^2} + \frac{p_{p,F}^2}{\chi} + \frac{(\chi - 1)}{\chi} p_{n,F}^2} \geq q^2 \left(\frac{2}{\chi} - 1 \right) + p_{p,F}^2 - p_{n,F}^2 \quad (2.2.53)$$

e quadrando si ottiene

$$q^4 + p_{p,F}^4 + p_{n,F}^4 - 2q^2 p_{p,F}^2 - 2p_{p,F}^2 p_{n,F}^2 + 2q^2 p_{n,F}^2 \leq 4q^2 p_{n,F}^2. \quad (2.2.54)$$

Raccogliendo i termini a primo membro in un quadrato perfetto ed estraendo la radice si ottiene

$$q^2 + p_{n,F}^2 - p_{p,F}^2 \leq 2qp_{n,F}. \quad (2.2.55)$$

quindi

$$(q - p_{n,F})^2 \leq p_{p,F}^2. \quad (2.2.56)$$

Per cui

$$\begin{cases} q \leq p_{p,F} - p_{n,F} & q \geq p_{n,F} \\ q \geq p_{n,F} - p_{p,F} & q < p_{n,F} \end{cases} \quad (2.2.57)$$

Ripetendo il calcolo per $\mu_n \geq e_+ + U_n$ si trova

$$\begin{cases} q \geq p_{p,F} - p_{n,F} & q \geq p_{n,F} \\ q \leq p_{n,F} - p_{p,F} & q < p_{n,F} \end{cases}. \quad (2.2.58)$$

Ora se $\mu_n > e_+ \geq e_-$ entrambe le Θ valgono 1 e quindi $I_q = 0$. Se $\mu_n < e_- \leq e_+$ entrambe le Θ valgono 0 e quindi nuovamente $I_q = 0$. Invece per $e_- \leq \mu_n \leq e_+$ la prima Θ vale 1 e la seconda 0, quindi l'integrando vale 1. Questa condizione, per quanto abbiamo visto, corrisponde a

$$q \geq p_{n,F} - p_{p,F}. \quad (2.2.59)$$

Dunque

$$I_q \simeq \int_{|\hat{\mu}|}^{2K_{\nu_e} + \hat{\mu}} dq \Theta [q - (p_{n,F} - p_{p,F})]. \quad (2.2.60)$$

Allora se

$$\hat{\mu} > p_{n,F} - p_{p,F} > 0 \quad (2.2.61)$$

l'integrando è uguale a 1 su tutto l'intervallo la cui lunghezza è $2K_{\nu_e}$, altrimenti bisogna tagliare l'intervallo di integrazione. L'estremo inferiore diventa $p_{n,F} - p_{p,F}$ a meno che questo non sia maggiore di $2K_{\nu_e} + \hat{\mu}$. Quindi

$$I_q \simeq \begin{cases} 2K_{\nu_e} \Theta (\hat{\mu} - p_{n,F} + p_{p,F}) & \hat{\mu} > p_{n,F} - p_{p,F} \\ (2K_{\nu_e} + \hat{\mu} - p_{n,F} + p_{p,F}) \Theta (2K_{\nu_e} + \hat{\mu} - p_{n,F} + p_{p,F}) & \hat{\mu} \leq p_{n,F} - p_{p,F} \end{cases}. \quad (2.2.62)$$

Il risultato è così indipendente da q_0 . Quindi l'integrale in q_0 può essere calcolato considerando solo il fattore integrando residuo. Inoltre, grazie all'effetto del blocco di Pauli della degenerazione elettronica, la componente elettronica della distribuzione rende esponenzialmente trascurabili i contributi provenienti da alti valori di q_0 così che si possa estendere l'integrazione a tutta la retta reale. Per lo stesso motivo si può approssimare il $K_e = K_{\nu_e} - q_0$ a numeratore con $K_{\nu_e} + \hat{\mu}$. Si ha

$$\int_{-\infty}^{K_{\nu_e}} dq_0 K_e [1 - f_e(K_e)] \frac{z}{1 - \exp(-z)} \approx \frac{K_{\nu_e} + \hat{\mu}}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{z}{1 - \exp(-z)} \frac{1}{1 + \exp(z + \eta)} \quad (2.2.63)$$

con

$$\eta \equiv \beta (\mu_e + \mu_p - \mu_n - K_{\nu_e}) = \beta (\mu_{\nu_e} - K_{\nu_e}). \quad (2.2.64)$$

L'ultimo integrale è dato da

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{z}{1 - \exp(-z)} \frac{1}{1 + \exp(z + \eta)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2 + \eta^2}{1 + \exp(\eta)} \right] \quad (2.2.65)$$

per cui la forma analitica completa della sezione d'urto nel caso di barioni altamente degeneri è

$$\frac{\sigma(K_{\nu_e})}{V} \approx \frac{W_{if} M_n^* M_p^* T^2 (K_{\nu_e} + \hat{\mu})}{4\pi^3} \left[\frac{\pi^2 + \eta^2}{1 + \exp(\eta)} \right] \Xi \quad (2.2.66)$$

con

$$\begin{aligned} \Xi = & \Theta(p_{e,F} + p_{p,F} - p_{\nu_e,F} - p_{n,F}) \\ & + \frac{p_{e,F} + p_{p,F} + p_{\nu_e,F} - p_{n,F}}{2K_{\nu_e}} \Theta(p_{\nu_e,F} - |p_{e,F} + p_{p,F} - p_{n,F}|). \end{aligned} \quad (2.2.67)$$

2.2.3 Barioni non interagenti

La situazione in cui i barioni sono non interagenti è ricavabile da quella di interazione con potenziale di tipo Skyrme come caso particolare ponendo

$$M_i^* = M \quad (2.2.68)$$

$$U_i = 0 \quad (2.2.69)$$

essendo M la massa comune dei nucleoni (trascuriamo alle energie considerate la differenza di massa tra protoni e neutroni). Occorre fare attenzione al valore delle precedenti quantità quando si considera questo limite.

Si ha innanzitutto

$$\chi = 0 \quad (2.2.70)$$

$$c = q_0 - \frac{q^2}{2M} \quad (2.2.71)$$

quindi poiché

$$\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + O(\varepsilon^3) \quad (2.2.72)$$

per $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \sqrt{1 + \frac{2\chi M c}{q^2}} = \lim_{\chi \rightarrow 0} 1 + \frac{\chi M c}{q^2} - \frac{\chi^2 M^2 c^2}{2q^4} \quad (2.2.73)$$

Per cui

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} p_+^2 = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{4q^2}{\chi^2} = \infty \quad (2.2.74)$$

mentre

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} p_-^2 = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{M^2 c^2}{q^2} = \frac{M^2}{q^2} \left(q_0 - \frac{q^2}{2M} \right)^2. \quad (2.2.75)$$

Allora

$$e_+ = \infty \quad (2.2.76)$$

$$e_- = \frac{M}{2q^2} \left(q_0 - \frac{q^2}{2M} \right)^2 \quad (2.2.77)$$

e

$$x_+ = \infty \quad (2.2.78)$$

$$x_- = \beta (e_- - \mu_n). \quad (2.2.79)$$

Si possono quindi calcolare ξ_{\pm} nel limite di barioni non interagenti osservando che

$$\lim_{x_+ \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + \exp(x_+)}{1 + \exp(x_+ + z)} = \lim_{x_+ \rightarrow \infty} \ln \frac{\exp(x_+)}{\exp(x_+ + z)} = -z. \quad (2.2.80)$$

La (2.2.36) diventa quindi

$$\frac{\sigma(K_{\nu_e})}{V} = \frac{2W_{if}M^2T}{(2\pi)^3 K_{\nu_e}} \int_{-\infty}^{K_{\nu_e}} dq_0 K_e [1 - f_e(K_e)] \frac{z}{1 - \exp(-z)} \int_{|q_0|}^{2K_{\nu_e} - q_0} dq \left(1 + \frac{\xi_-}{z} \right). \quad (2.2.81)$$

2.2.4 Risultati

Come fatto per le concentrazioni e i potenziali chimici, riportiamo qui i dati ottenuti per il libero cammino medio del neutrino nelle diverse configurazioni considerate.

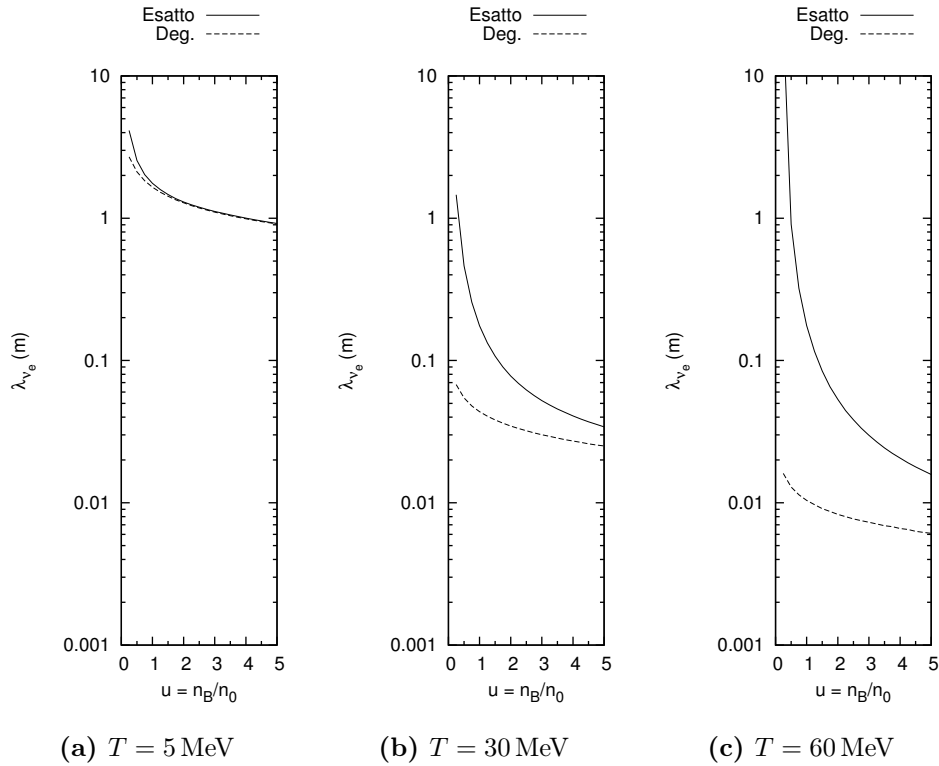


Figura 2.1. Libero cammino medio del neutrino con un'energia pari al potenziale chimico μ_{ν_e} per barioni non interagenti con $Y_L = 0.4$ alle concentrazioni e potenziali chimici di Figura 1.1. La linea tratteggiata indica i valori ricavati in approssimazione di degenerazione. La linea continua è stata invece ottenuta con integrazione Monte Carlo selezionando energie dell'elettrone distanti fino a 20 volte la temperatura dal potenziale chimico μ_e .

Come si osserva dai grafici, l'approssimazione di degenerazione produce valori del libero cammino medio del neutrino notevolmente sottostimati, anche di diversi ordini di grandezza, che naturalmente, come nel caso delle concentrazioni ricavate mediante l'approssimazione di basse temperature dei potenziali chimici, è tanto peggiore quanto maggiore è il rapporto tra la temperatura della miscela e la temperatura di Fermi delle specie chimiche, e quindi quanto minore è la densità (a parità di temperatura) e quanto maggiore la temperatura della miscela (a parità di densità). In generale comunque il libero cammino medio diminuisce con la densità perché naturalmente

una maggior concentrazione di neutroni comporta una maggior probabilità che il neutrino interagisca.

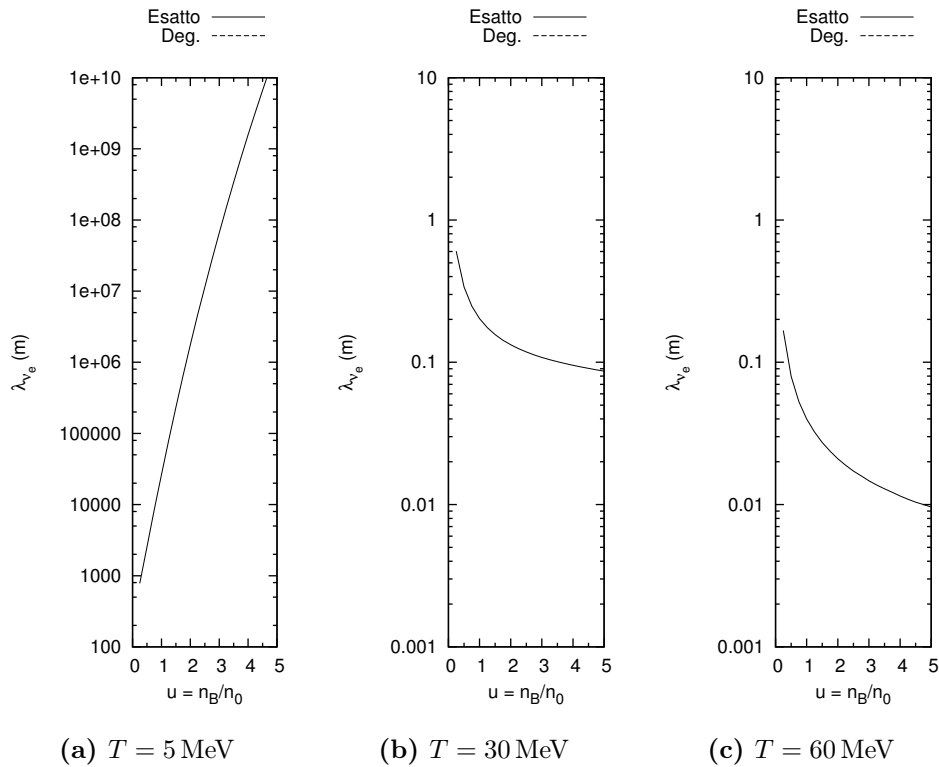


Figura 2.2. Libero cammino medio del neutrino con un'energia pari a $3T$ per barioni non interagenti con $y_{\nu_e} = 0$ alle concentrazioni e potenziali chimici di Figura 1.2. La linea tratteggiata indica i valori ricavati in approssimazione di degenerazione. La linea continua è stata invece ottenuta con integrazione Monte Carlo selezionando energie dell'elettrone distanti fino a 20 volte la temperatura dal potenziale chimico μ_e .

Se i neutrini non trasportano numero leptonico netto l'approssimazione di alta degenerazione fornisce un valore infinito del libero cammino medio e quindi non è riportata nel grafico. La Figura 2.2 mostra in questo caso una forte dipendenza dalla temperatura dell'assorbimento neutrino. In particolare tra i 5 MeV e i 30 MeV cambia completamente l'andamento in funzione della densità del libero cammino medio, che cresce quasi esponenzialmente per $T = 5 \text{ MeV}$ mentre è decrescente per le temperature più alte. Ancora una volta questo è dovuto alla forte degenerazione della miscela a causa della quale gli stati quantici disponibili per effettuare la transizione del neutrino sono sempre di meno al crescere della densità. È degno di nota inoltre che per $T = 5 \text{ MeV}$ il libero cammino medio diventa più grande dei 10 km (ordine di grandezza del raggio di una stella di neutroni) già da $n_B = n_0$.

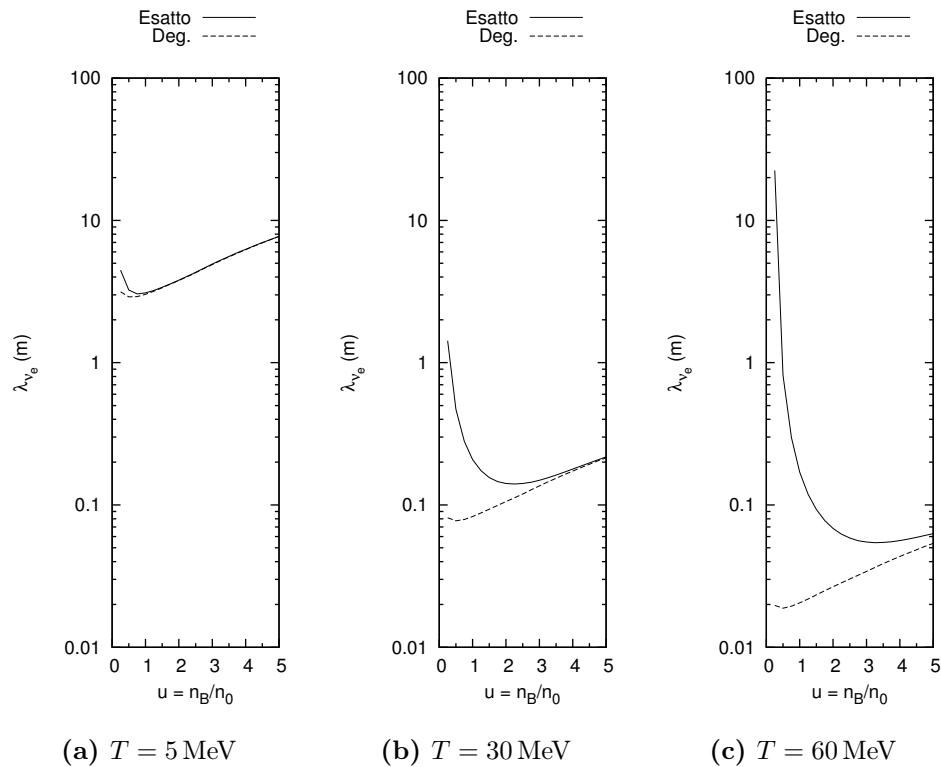


Figura 2.3. Libero cammino medio del neutrino con un'energia pari al potenziale chimico μ_{ν_e} per barioni interagenti con $Y_L = 0.4$ alle concentrazioni e potenziali chimici di Figura 1.3. La linea tratteggiata indica i valori ricavati in approssimazione di degenerazione. La linea continua è stata invece ottenuta con integrazione Monte Carlo selezionando energie dell'elettrone distanti fino a 20 volte la temperatura dal potenziale chimico μ_e . $Y_L = 0.4$

L'interazione forte tra i barioni comporta un'evidente aumento del libero cammino medio ad alti valori di densità, a causa della dipendenza quadratica della sezione d'urto dalle masse efficaci dei nucleoni, che, come si vede in Figura 1.7 decrescono notevolmente con la densità. Questo effetto è solo leggermente compensato dal potenziale di Skyrme costante negativo che comporta un aumento del potenziale chimico efficace. Inoltre bisogna considerare la possibilità che il controintuitivo aumento del libero cammino medio ad alti valori di densità possa essere dovuto in parte all'approssimazione di barioni non relativistici.

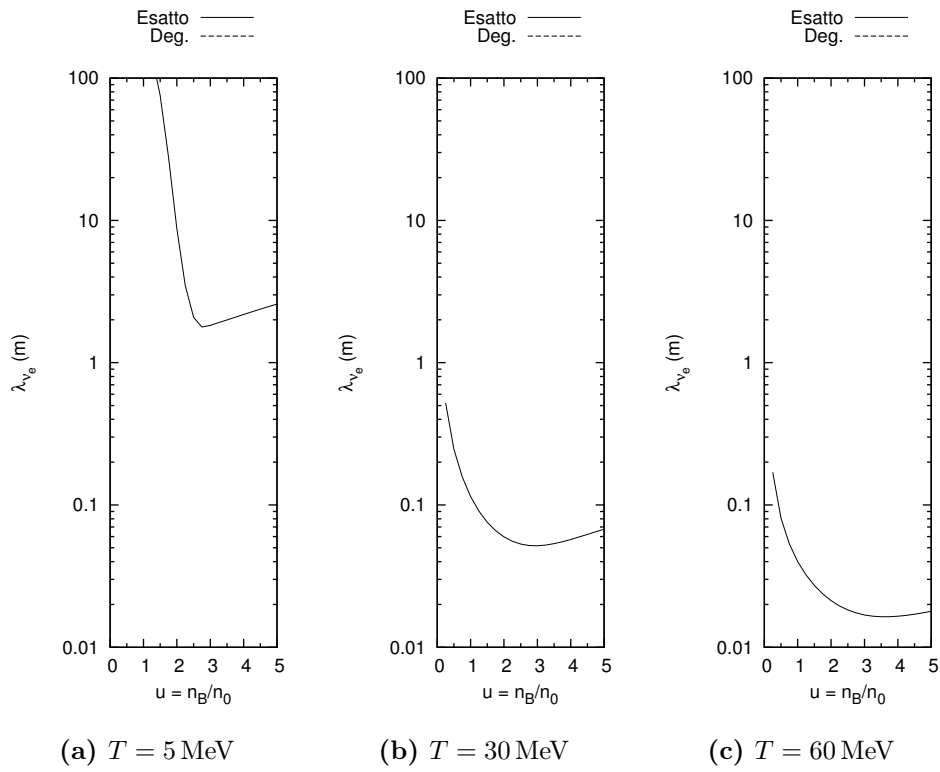


Figura 2.4. Libero cammino medio del neutrino con un'energia pari a $3T$ per barioni non interagenti con $y_{\nu_e} = 0$ alle concentrazioni e potenziali chimici di Figura 1.4. La linea tratteggiata indica i valori ricavati in approssimazione di degenerazione. La linea continua è stata invece ottenuta con integrazione Monte Carlo selezionando energie dell'elettrone distanti fino a 20 volte la temperatura dal potenziale chimico μ_e .

Capitolo 3

Stella di neutroni

L'evoluzione termonucleare di una stella con massa iniziale compresa tra circa $4 M_{\odot}$ e $20 - 30 M_{\odot}$ è differente da quella di stelle meno massive. Le densità centrali sono infatti tali da consentire la fusione esoterma di elementi più pesanti di carbonio e ossigeno, passando per diverse fasi di collasso e stabilizzazione corrispondenti all'esaurimento dei vari elementi (fase di sequenza principale), fino alla produzione di un nucleo di ferro ^{56}Fe . Poiché questo è il più pesante elemento ottenibile mediante reazioni di fusione nucleare esoterme da elementi più leggeri, non vi sono reazioni termonucleari di fusione del ferro che possano contrastare un ulteriore collasso gravitazionale. Quest'ultimo procede quindi fin quando la materia, ormai ionizzata, comincia a manifestare la sua natura degenera.

Nonostante l'abbondante emissione di neutrini che caratterizza gli strati esterni del nucleo in questa fase, la massa residua di questo tipo di stelle supera il limite di Chandrasakhar, così che anche la pressione di degenerazione del gas di elettroni (più precisamente il suo gradiente) è insufficiente a stabilizzare il corpo dando origine ad una nana bianca.

A questo punto le temperature sono così alte che i nuclei, mediante fotodisintegrazione, si separano in particelle alfa secondo la reazione



e sempre più protoni, mediante cattura elettronica, vengono convertiti in neutroni rilasciando un flusso di neutrini secondo la reazione



La stella si stabilizza solo quando la pressione di degenerazione neutronica diventa sufficientemente elevata da arrestare il collasso gravitazionale. Questo avviene con

una violenta onda di shock che eietta nello spazio, in una spettacolare esplosione nota come supernova, la maggior parte del materiale esterno al nucleo. L'oggetto così formatosi prende appunto il nome di protostella di neutroni.

Le densità raggiunte in questo processo dalla materia stellare sono così elevate che non è più valida l'approssimazione minkowskiana per descrivere lo spaziotempo nei pressi della stella, e in particolare per ricavare la struttura stellare all'equilibrio. Infatti la gravità superficiale è dell'ordine di $\frac{G_N M}{c^2 R} \sim 10^{-1}$, essendo M ed R rispettivamente massa e raggio della stella, e G_N la costante di gravitazione universale.

La temperatura iniziale della protostella di neutroni è sufficientemente elevata da comportare l'intrappolamento dei neutrini nel nucleo su tempi dinamici di evoluzione della struttura. Per comprendere quindi la fase di deleptonizzazione che va dalla protostella di neutroni calda e ricca di neutrini alla stella di neutroni finale priva di neutrini, diventa fondamentale conoscere la rate di emissione dei neutrini. Questa a sua volta richiede il calcolo del libero cammino medio, che è appunto l'obbiettivo principale di questa tesi.

In questo capitolo ricaviamo preliminarmente la struttura di una protostella di neutroni non rotante costituita da neutroni, protoni, elettroni e neutrini all'equilibrio β , utilizzando i dati sull'equazione di stato del Capitolo 1 nelle equazioni Tolman–Oppenheimer–Volkoff, quindi vi applichiamo i risultati del libero cammino medio del neutrino ottenuti nel Capitolo 2.

Useremo la notazione di Einstein per i tensori con una segnatura $(-1, 1, 1, 1)$, per la metrica e presenteremo le equazioni utilizzando il sistema di unità di misura geometrizzate ($c = G_N = 1$).

3.1 Struttura stellare

3.1.1 Equazione di stato politropica

Dai risultati ottenuti nel Capitolo 1 possiamo ricavare l'andamento della densità di energia totale relativistica (dove per relativistica si intende che include la densità di massa) in funzione della pressione. L'andamento è mostrato in Figura 3.1. Un risultato notevole è che la forma varia leggermente al variare della temperatura, nel range di valori considerati. Questa è una conseguenza diretta dell'alto grado di degenerazione delle componenti della miscela alle temperature studiate.

Si osserva invece che l'intrappolamento neutrino determina un leggero aumento della pressione a parità di densità di energia.

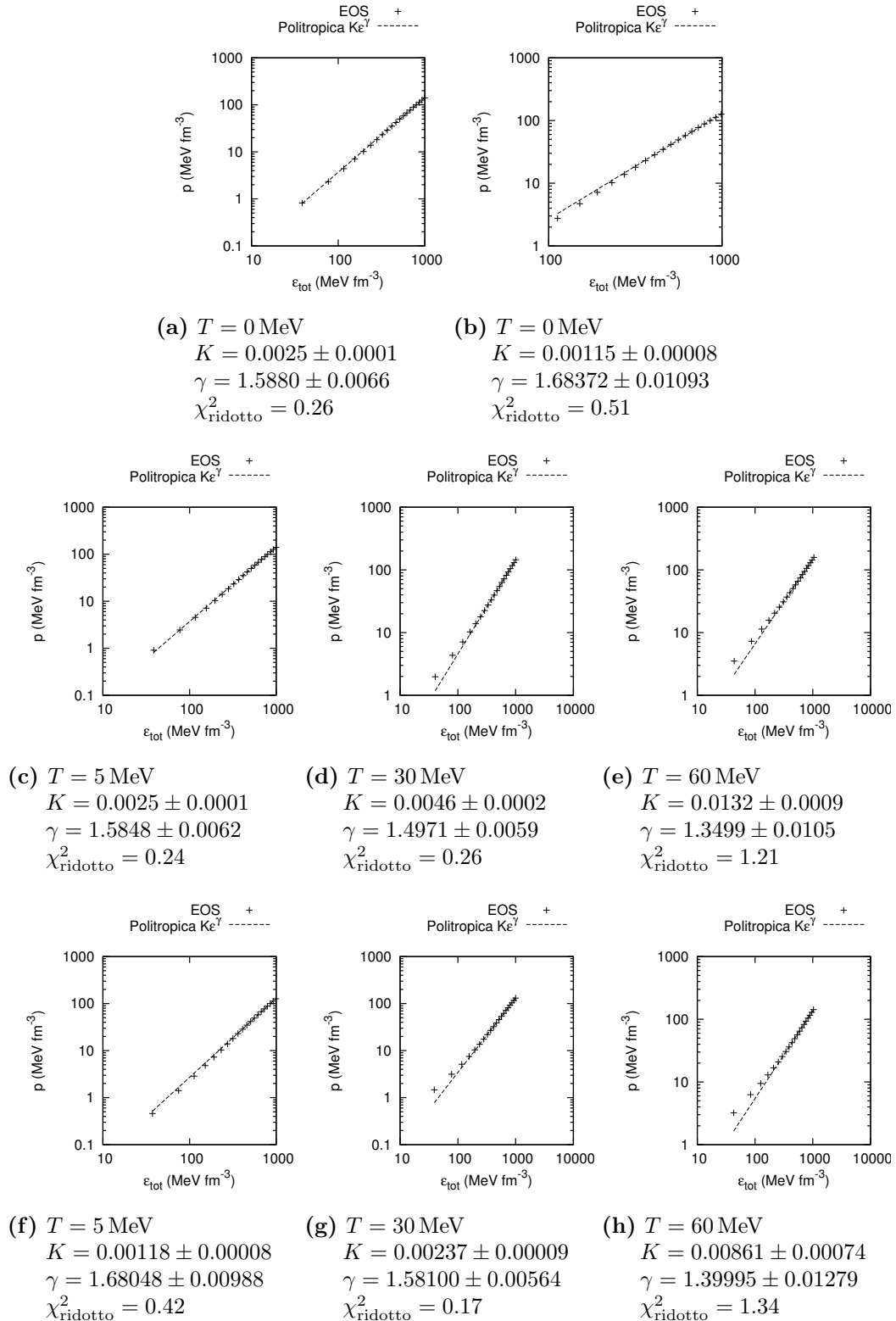


Figura 3.1. Pressione in funzione della densità di energia relativistica per barioni interagenti con $Y_L = 0.4$ (figure a, c, d, e) e con $y_{\nu_e} = 0$ (figure b, f, g, h) alle quattro diverse temperature considerate. L'andamento tratteggiato è il fit di politropica effettuato sui dati espressi in $\frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$, quindi le K sono espresse in $\left[\frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}\right]^{1-\gamma}$. Viene riportato anche il valore del χ^2 ridotto.

Si è deciso di ricavare da questi dati una forma analitica dell'equazione di stato. Poiché è noto che per un gas di Fermi non interagente, relativistico e non, l'equazione di stato, in approssimazione di degenerazione, è politropica, è questo l'andamento che abbiamo deciso di usare per approssimare l'equazione di stato effettiva. L'andamento politropico, descritto dalla relazione

$$p(\epsilon) = K\epsilon^\gamma, \quad (3.1.1)$$

con γ detto indice adiabatico, permette inoltre una risoluzione numerica particolarmente semplice delle equazioni della struttura stellare.

Naturalmente, pur essendo quasi completamente degenere la miscela studiata, non è detto che l'andamento politropico sia adeguato perché le diverse componenti della miscela possiedono, singolarmente, un'equazione di stato differente. Ad esempio i leptoni sono ultrarelativistici (indice adiabatico $\gamma = \frac{4}{3}$ in regime degenere) mentre i nucleoni sono non relativistici (indice adiabatico $\gamma = \frac{5}{3}$ in regime degenere e in assenza di interazioni). Inoltre i nucleoni sono fortemente interagenti.

Il motivo principale, però, per cui l'equazione di stato effettiva si discosta dall'andamento politropico è che stiamo ignorando quegli effetti dinamici dovuti alle correlazioni le cui informazioni, nell'approssimazione di campo medio per l'interazione dei barioni, vengono perdute e che, come già detto in 1.3.1, comportano una sottostima della pressione. Attribuiamo a questi motivi i valori non ideali di χ^2 ridotto ottenuti dal fit.

Inoltre il comportamento della miscela potrebbe cambiare sensibilmente alle basse densità proprio in conseguenza di effetti termici non trascurabili che deviano dalla situazione di alta degenerazione, caratteristica invece delle alte densità. Quindi i risultati ottenuti, i cui parametri sono riportati in Figura 3.1, sono ragionevolmente validi soltanto fintanto che vengano applicati alle densità di energia relativistica che ricadono nel range in cui è stato eseguito il fit politropico. Come vedremo, otterremo dati sulle stelle di neutroni stabili più pesanti, corrispondenti a questi valori dei parametri politropici, che non sono compatibili con questo range di densità di energia e che quindi vanno presi come puramente indicativi.

3.1.2 Equazioni della struttura stellare

La conoscenza di un'espressione analitica dell'equazione di stato della miscela considerata in spaziotempo piatto consente, mediante il principio di covarianza generale, di studiare il comportamento della materia anche in regime general-relativistico, quale è quello necessario alla descrizione di un corpo compatto come una stella di neutroni,

purché la curvatura dello spazio-tempo sia trascurabile rispetto alla lunghezza scala tipica delle interazioni forti tra i nucleoni.

3.1.2.1 LICF

Il collegamento, mediante il principio di covarianza generale, tra la descrizione newtoniana e quella general-relativistica, avverrà mediante la definizione di un particolare sistema di riferimento detto LICF (Local Inertial Comoving Frame). Sostanzialmente, preso come riferimento un elemento generico di fluido, si costruisce, ad un certo istante di tempo t_{LIF} , un sistema di riferimento che è localmente inerziale (LIF: Local Inertial Frame) all'evento spaziotemporale $(t_{\text{LIF}}, \mathbf{x}_{\text{LIF}})$, con \mathbf{x}_{LIF} le coordinate spaziali di un punto rappresentativo dell'elemento di fluido. In un tale sistema di riferimento la metrica è localmente piatta, cioè

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) = \eta_{\mu\nu}(x^\alpha) + O(|x^\alpha - x_{\text{LIF}}^\alpha|^2), \quad (3.1.2)$$

con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ la metrica minkowskiana. E' sempre possibile costruire un tale riferimento per il principio di equivalenza. Una volta costruito un LIF è possibile, mediante un'opportuna trasformazione di Poincaré¹, costruire un LICF in cui la velocità del fluido, descritta da un campo vettoriale $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, è nulla in $(t_{\text{LIF}}, \mathbf{x}_{\text{LIF}})$, da cui l'attributo comobile che sta ad indicare che il sistema di riferimento si muove insieme all'elemento di fluido, che è a riposo rispetto ad esso.

3.1.2.2 Tensore energia impulso

La descrizione della materia in regime general-relativistico avverrà tramite l'uso di un tensore energia-impulso. Riteniamo opportuno utilizzare l'approssimazione di fluido perfetto in cui ignoriamo la viscosità (effetti di superficie) e gli scambi di calore tra elementi di fluido contigui.

Il campo tensore energia-impulso \mathbf{T} che compare nelle equazioni di Einstein che descrivono la struttura spazio-temporale è un tensore simmetrico di rango 2 le cui componenti sono identificate secondo le seguenti prescrizioni:

- T^{00} è la densità di energia relativistica;
- T^{0i} , con $i = 1, 2, 3$, è l'energia che attraversa, nell'unità di tempo, l'unità di superficie ortogonale alla direzione x^i ;
- T^{ij} , con $i, j = 1, 2, 3$, è l'ammontare dell' i -esima componente dell'impulso che scorre, nell'unità di tempo, attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione x^j .

¹Una tale trasformazione manda un LIF in un LIF.

Per un fluido perfetto si ha allora

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Se consideriamo un elemento di fluido e costruiamo, ad un certo istante di tempo, un LICF relativo ad esso, il campo quadrivettoriale di velocità u , tale che

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} \quad (3.1.4)$$

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad (3.1.5)$$

con τ il tempo proprio dell'elemento di fluido, e x^i le sue coordinate spaziali intese come funzioni di τ , assume i valori

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (3.1.6)$$

Quindi il tensore energia-impulso in un dato punto dello spazio-tempo è dato, nel LICF relativo all'elemento di fluido localizzato in quel punto, da

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}. \quad (3.1.7)$$

Usando la (3.1.2) si ha

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (3.1.8)$$

Poiché questa è un'equazione tensoriale è valida in ogni sistema di riferimento. Questa è quindi la forma generale del tensore energia impulso di un fluido perfetto in cui ϵ e p sono valutate, come detto, per un fluido a riposo e in assenza di gravità.

3.1.2.3 Equazioni di campo di Einstein

Per ricavare la metrica, e quindi la struttura dello spazio tempo e la distribuzione di energia e impulso nello stesso, facciamo ricorso alle equazioni di campo di Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.1.9)$$

essendo $G_{\mu\nu}$ le componenti del tensore di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R} \quad (3.1.10)$$

con $R_{\mu\nu}$ il tensore di Ricci e \mathcal{R} la curvatura scalare.

Per un oggetto a simmetria sferica e non rotante, come la stella di neutroni ideale che vogliamo studiare, la metrica può essere espressa nella seguente forma generale:

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.1.11)$$

Ora, l'unica componente non nulla del campo quadrivettoriale di velocità che descrive il moto del fluido è in tale caso

$$u^0 = e^{-\nu} \quad u_0 = -e^\nu \quad (3.1.12)$$

come possiamo ricavare dallo scalare

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1, \quad (3.1.13)$$

dato che stiamo assumendo che il fluido sia a riposo. Quindi le componenti non nulle del tensore energia impulso sono

$$T_{00} = \epsilon e^{2\nu} \quad (3.1.14)$$

$$T_{rr} = p e^{2\lambda} \quad (3.1.15)$$

$$T_{\theta\theta} = r^2 p \quad (3.1.16)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta} \quad (3.1.17)$$

o equivalentemente

$$T^{00} = \epsilon e^{-2\nu} \quad (3.1.18)$$

$$T_{rr} = p e^{-2\lambda} \quad (3.1.19)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{p}{r^2} \quad (3.1.20)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sin^2 \theta} T^{\theta\theta}. \quad (3.1.21)$$

Il tensore energia impulso soddisfa per definizione la seguente legge di conservazione

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (3.1.22)$$

Questa non è indipendente dalla (3.1.9), in quanto può essere da questa ricavata usando le identità di Bianchi per il tensore di Riemann. Conviene però considerarla esplicitamente per semplificare i calcoli.

Una forma alternativa della (3.1.22) è la seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu T^{\nu\lambda} = 0, \quad (3.1.23)$$

essendo g il determinante della metrica e $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu$ i simboli di Christoffel.

I simboli di Christoffel non nulli sono i seguenti

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^r &= e^{2(\nu-\lambda)} \nu_{,r} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -e^{-2\lambda} r \\ \Gamma_{0r}^0 &= \nu_{,r} & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \Gamma_{rr}^r &= \lambda_{,r} & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -e^{-2\lambda} r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r} & \sqrt{-g} &= r^2 e^{\nu+\lambda} \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

L'unica equazione non triviale delle (3.1.23) è quella che si ottiene per $\mu = r$, che diventa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{-g} T^{rr}) + \Gamma_{00}^r T^{00} + \Gamma_{rr}^r T^{rr} + \Gamma_{\theta\theta}^r T^{\theta\theta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r T^{\varphi\varphi} \\ &= \frac{e^{-(\nu+\lambda)}}{r^2} \left[r^2 e^{(\nu+\lambda)} p e^{-2\lambda} \right]_{,r} + e^{2(\nu-\lambda)} \nu_{,r} \epsilon e^{-2\nu} + e^{-2\lambda} \lambda_{,r} p - 2 \frac{e^{-2\lambda} p}{r} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

ovvero

$$\nu_{,r} = -\frac{p_{,r}}{\epsilon + p}. \quad (3.1.26)$$

Le componenti 00 , rr e $\theta\theta$ delle equazioni di Einstein sono allora rispettivamente

$$\frac{1}{r^2} e^{2\nu} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - e^{-2\lambda} \right) \right] = 8\pi \epsilon e^{2\nu} \quad (3.1.27)$$

$$-\frac{1}{r^2} e^{2\lambda} \left(1 - e^{-2\lambda} \right) + \frac{2}{r} \nu_{,r} = 8\pi p e^{2\lambda} \quad (3.1.28)$$

$$r^2 e^{-2\lambda} \left(\nu_{,r,r} \nu_{,r}^2 + \frac{\nu_{,r}}{r} - \nu_{,r} \lambda_{,r} - \frac{\lambda_{,r}}{r} \right) = 8\pi r^2 p. \quad (3.1.29)$$

Se definiamo

$$m(r) \equiv \frac{1}{2} r \left(1 - e^{-2\lambda} \right), \quad (3.1.30)$$

la (3.1.27) diventa

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \epsilon, \quad (3.1.31)$$

mentre la (3.1.28) può essere riscritta come

$$\nu_{,r}(r) = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]}. \quad (3.1.32)$$

3.1.2.4 Equazioni Tolman–Oppenheimer–Volkoff

La struttura stellare è quindi descritta dal seguente sistema di equazioni, dette equazioni TOV (Tolman–Oppenheimer–Volkoff):

$$\begin{cases} p(\epsilon) = K\epsilon^\gamma \\ \frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \epsilon \\ \frac{dp}{dr}(r) = -\frac{(\epsilon+p)[m(r)+4\pi r^3 p]}{r[r-2m(r)]}. \end{cases} \quad (3.1.33)$$

La terza in particolare si ricava sostituendo la (3.1.26) nella (3.1.32).

Per risolvere questo sistema occorre imporre opportune condizioni al contorno. Osserviamo in particolare che deve essere $m(r=0) = 0$. Infatti, consideriamo una piccola sfera di raggio x nel nostro spaziotempo a simmetria sferica, centrata nell'origine. La circonferenza sarà $c = 2\pi x$ e il raggio proprio

$$r = \int_0^x dr' e^{\lambda(r')} \simeq e^{\lambda(x)} x. \quad (3.1.34)$$

Il rapporto tra i due sarà quindi

$$\frac{c}{r} \simeq 2\pi e^{-\lambda(x)}. \quad (3.1.35)$$

Poiché lo spaziotempo è localmente piatto, per una sfera infinitesima, come quella che stiamo considerando, questo rapporto deve valere 2π . Questo comporta che

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\lambda(x)} = 1. \quad (3.1.36)$$

Poiché

$$e^{2\lambda(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \quad (3.1.37)$$

si ha

$$m(r) = o(r) \quad (3.1.38)$$

per $r \rightarrow 0$.

Un'ulteriore condizione al contorno proviene dal valore che assegniamo alla densità di energia nell'origine

$$\epsilon(r=0) = \epsilon_0. \quad (3.1.39)$$

Una volta trovate m , p ed ϵ per integrazione numerica delle equazioni TOV, si possono ricavare $e^{2\lambda}$ mediante la (3.1.37), e ν mediante integrazione della (3.1.26):

$$\nu(r) = \nu_0 - \int_0^r dr' \frac{p,r}{\epsilon + p}. \quad (3.1.40)$$

Resta quindi un'ultima condizione da imporre. Questa proviene dal confronto tra la soluzione delle equazioni di campo all'interno della stella di neutroni e quella nello spazio vuoto esterno.

3.1.2.5 Esterno della stella

All'esterno della stella, per definizione, deve essere

$$p = \epsilon = 0 \quad (3.1.41)$$

e le equazioni di Einstein devono ridursi, quando $r = R$, con R il raggio della stella, a quelle per uno spaziotempo statico, vuoto e sfericamente simmetrico la cui unica soluzione è, per il teorema di Birkhoff, la metrica di Schwarzschild. La metrica di Schwarzschild all'esterno della stella è data da

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.1.42)$$

per una qualche costante M , quindi imponendo questa condizione si trova

$$e^{2\nu(R)} = e^{2\nu_0} e^{-2 \int_0^R dr \frac{p,r}{\epsilon+p}} = 1 - \frac{2M(R)}{R} \quad (3.1.43)$$

con

$$M(R) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \epsilon(r), \quad (3.1.44)$$

da cui

$$e^{2\nu_0(R)} = \frac{1 - \frac{2M(R)}{R}}{e^{-2 \int_0^R dr \frac{p,r}{\epsilon+p}}}. \quad (3.1.45)$$

Massa totale La massa totale, che tiene conto dell'energia gravitazionale così come delle energia a riposo e il potenziale di interazione forte tra le particelle, è ottenuta mediante integrazione sul volume della stella, della densità di energia relativistica ϵ , tenendo conto però del fatto che il differenziale corretto è il volume proprio di ogni

elementino. E' quindi data da

$$\begin{aligned}
 M_{\text{tot}} &= \int_V d^3V_{\text{proprio}} \epsilon(\mathbf{r}) \\
 &= \int_V d^3V \sqrt{g^{(3)}} \epsilon(\mathbf{r}) \\
 &= \int_0^R dr \frac{4\pi \epsilon(r) r^2}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}
 \end{aligned} \tag{3.1.46}$$

con $g^{(3)}$ il determinante della metrica spaziale.

3.1.2.6 Generalizzazione dell'equazione di Lane-Emden

Per risolvere le equazioni TOV conviene riscriverle in una forma più comoda. Introduciamo l'indice politropico n e la funzione Θ tali che

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n} \tag{3.1.47}$$

$$\epsilon(r) = \epsilon_0 \Theta^n(r) \tag{3.1.48}$$

per cui anche

$$p(r) = p_0 \Theta^{n+1}(r) \tag{3.1.49}$$

con

$$p_0 \equiv K \epsilon_0^{1+\frac{1}{n}} \tag{3.1.50}$$

la pressione centrale.

In questo modo possiamo riscrivere le (3.1.33) nella forma

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr}(r) = 4\pi \epsilon_0 r^2 \Theta^n(r) \\ \frac{d\Theta}{dr}(r) = - \left[\frac{\epsilon_0 + p_0 \Theta(r)}{p_0(n+1)} \right] \frac{m(r) + 4\pi r^3 p_0 \Theta^{n+1}(r)}{r[r - 2m(r)]} \end{cases} \tag{3.1.51}$$

e introducendo il parametro adimensionale

$$\alpha_0 \equiv \frac{\epsilon_0}{p_0} \tag{3.1.52}$$

queste equazioni diventano

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr}(r) = 4\pi \epsilon_0 r^2 \Theta^n(r) \\ \frac{d\Theta}{dr}(r) = - \left[\frac{\alpha_0 + \Theta(r)}{n+1} \right] \frac{m(r) + 4\pi r^3 \frac{\epsilon_0}{\alpha_0} \Theta^{n+1}(r)}{r[r - 2m(r)]}. \end{cases} \tag{3.1.53}$$

Usiamo la quantità $\sqrt{\epsilon_0}$ per riscaldare la coordinata radiale. Introduciamo cioè le variabili adimensionali

$$\xi = \sqrt{\epsilon_0} r \quad \mathcal{M} = \sqrt{\epsilon_0} m. \quad (3.1.54)$$

Riscriviamo le precedenti equazioni in termini di queste:

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{M}}{d\xi}(\xi) = 4\pi\xi^2\Theta^n(\xi) \\ \frac{d\Theta}{d\xi}(\xi) = -\left[\frac{\alpha_0 + \Theta(\xi)}{n+1}\right] \frac{\mathcal{M}(\xi) + 4\pi\xi^3 \frac{1}{\alpha_0} \Theta^{n+1}(\xi)}{\xi[\xi - 2\mathcal{M}(\xi)]}. \end{cases} \quad (3.1.55)$$

L'equazione di Lane-Emden si ottiene quando si considera il limite newtoniano di queste equazioni e si sostituisce la prima nella seconda equazione moltiplicata per ξ^2 e derivata rispetto a ξ . Procedendo analogamente in regime general-relativistico si otterrebbe una sua generalizzazione molto più complicata. E' quindi più conveniente operare sul precedente sistema che su questa generalizzazione.

Ora dalla (3.1.48) si ha evidentemente

$$\Theta(0) = 1. \quad (3.1.56)$$

Per ricavare la seconda condizione ai valori iniziali osserviamo che, dalla seconda delle (3.1.33) si ha

$$m(r) \simeq \frac{4}{3}\pi r^3 \epsilon_0 + O(r^4) \quad (3.1.57)$$

per $r \rightarrow 0$, quindi dalla seconda

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dp}{dr}(r) = -(\epsilon_0 + p_0) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \epsilon_0 + 4\pi r^3 p_0}{r^2} = 0. \quad (3.1.58)$$

Allora, poiché dalla (3.1.49) si ha

$$\frac{dp}{dr}(r) = (n+1)p_0\Theta^n(r) \frac{d\Theta}{dr}(r) \quad (3.1.59)$$

si ha

$$\frac{d\Theta}{d\xi}(\xi=0) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{d\Theta}{dr}(r=0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{dp}{dr}(r)}{(n+1)p_0\Theta^n(r)} = 0. \quad (3.1.60)$$

Le condizioni ai valori iniziali

$$\begin{cases} \Theta(0) = 1 & \mathcal{M}(0) = 0 \\ \frac{d\Theta}{d\xi}(0) = 0 & \frac{d\mathcal{M}}{d\xi}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.61)$$

non sono adeguate per avviare il calcolo numerico. Infatti $\xi = 0$ è un punto singolare

e l'integrazione non riesce a fare il primo passo. Per integrare numericamente questo sistema dobbiamo quindi espandere in serie di Taylor le funzioni Θ e \mathcal{M} vicino all'origine, diciamo in un valore ξ_{start} di ξ piccolo ma finito, e trovare un'approssimazione di Θ e \mathcal{M} in ξ_{start} il piú accurata possibile da usare come condizione iniziale per il calcolo numerico. Sfruttiamo le (3.1.61) per sviluppare intorno a $\xi = 0$. Si può dimostrare che solo i coefficienti pari dell'espansione di Θ e solo quelli dispari dell'espansione di \mathcal{M} sono non nulli, per cui si ha

$$\Theta(\xi) \simeq 1 + \Theta_2 \xi^2 + \Theta_4 \xi^4 + O(\xi^6) \quad (3.1.62)$$

$$\mathcal{M}(\xi) \simeq \mathcal{M}_3 \xi^3 + \mathcal{M}_5 \xi^5 + O(\xi^7). \quad (3.1.63)$$

Sostituendo nelle (3.1.55) si trova

$$\begin{cases} 3\mathcal{M}_3 \xi^2 + 5\mathcal{M}_5 \xi^4 = 4\pi \xi^2 + 4\pi n \Theta_2 \xi^4 \\ 2\Theta_2 \xi + 4\Theta_4 \xi^3 = -\frac{1}{n+1} \left\{ \left(\mathcal{M}_3 + \frac{4\pi}{\alpha_0} \right) [(1 + \alpha_0) \xi + \Theta_2 \xi^3] \right\} \end{cases} \quad (3.1.64)$$

e uguagliando i coefficienti delle stesse potenze di ξ si trova

$$\mathcal{M}_3 = \frac{4\pi}{3}, \quad \Theta_2 = -2\pi \frac{(1 + \alpha_0)(3 + \alpha_0)}{3\alpha_0(n + 1)} \quad (3.1.65)$$

$$\mathcal{M}_5 = \frac{4\pi n \Theta_2}{5}, \quad \Theta_4 = -\frac{\Theta_2}{2(n + 1)} \left(\mathcal{M}_3 + \frac{4\pi}{\alpha_0} \right). \quad (3.1.66)$$

Con queste condizioni iniziali possiamo integrare numericamente le (3.1.55) e trovare il valore ξ_1 di ξ per cui si annulla $\Theta(\xi)$ e quindi la pressione. Esso corrisponderà alla superficie della stella di neutroni. Sia $\Theta'_1 \equiv \frac{d\Theta}{d\xi}(\xi_1)$. Dalla seconda delle (3.1.55) troviamo

$$\Theta'_1 = \left(\frac{\alpha_0}{n + 1} \right) \frac{\mathcal{M}(\xi_1)}{\xi_1 [\xi_1 - 2\mathcal{M}(\xi_1)]} \quad (3.1.67)$$

e quindi

$$\mathcal{M}(\xi_1) = \frac{(n + 1) \xi_1^2 |\Theta'_1|}{\alpha_0 + 2\xi_1(n + 1) |\Theta'_1|}. \quad (3.1.68)$$

Questa quantità rappresenta, a meno del fattore $\sqrt{\epsilon_0}$, la massa della stella meno l'energia di legame gravitazionale.

Una volta nota Θ si possono calcolare la pressione e la densità all'interno della stella, la funzione \mathcal{M} :

$$\mathcal{M}(\xi) = 4\pi\epsilon_0 \int_0^\xi d\xi' \xi'^2 \Theta^n(\xi') \quad (3.1.69)$$

e la funzione metrica

$$e^{2\lambda(\xi)} = \frac{1}{1 - \frac{2\mathcal{M}(\xi)}{\xi}}. \quad (3.1.70)$$

La restante funzione $e^{2\nu}$ si calcola dalla (3.1.40) che ora diventa

$$\nu(\xi) = - \int_0^\xi d\xi' \frac{p, \xi'}{\epsilon + p} + \nu_0 = - \int_0^\xi d\xi' \frac{(n+1) \frac{d\Theta}{d\xi'}}{\alpha_0 + \Theta} + \nu_0 = \ln \left[\frac{\alpha_0 + 1}{\alpha_0 + \Theta(\xi)} \right]^{n+1} + \nu_0. \quad (3.1.71)$$

Sulla superficie della stella, come abbiamo visto, deve essere

$$e^{2\nu_0} \left[\frac{\alpha_0 + 1}{\alpha_0 + \Theta(\xi_1)} \right]^{2(n+1)} = 1 - \frac{2\mathcal{M}(\xi_1)}{\xi_1} \quad (3.1.72)$$

e quindi, usando la (3.1.68),

$$e^{2\nu_0} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 1} \right)^{2(n+1)} \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 2\xi_1(n+1)|\Theta'_1|}, \quad (3.1.73)$$

cioè

$$e^{2\nu(\xi)} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 1} \right)^{2(n+1)} \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 2\xi_1(n+1)|\Theta'_1|} \left[\frac{\alpha_0 + 1}{\alpha_0 + \Theta(\xi)} \right]^{2(n+1)}. \quad (3.1.74)$$

3.1.3 Risultati numerici

3.1.3.1 Proprietà generale delle stelle politropiche

Utilizzando quindi i valori dei parametri ottenuti in 3.1.1, abbiamo ricavato la struttura della stella di neutroni stabile che, nelle 6 situazioni considerate in Figura 3.1, possiede il più alto valore della massa totale, inclusa l'energia di legame gravitazionale. Chiameremo questa configurazione «stella limite».

La ricerca di questo valore ha fatto uso di una procedura iterativa che producesse, di volta in volta, un valore di prova sempre più alto per la massa della stella. Veniva quindi ricercato il corrispondente valore della densità di energia relativistica centrale della stella che corrispondesse a quel valore della massa totale. Quando la procedura restituiva un valore non positivo della densità centrale il ciclo veniva interrotto e il valore di prova della massa veniva assunto come valore limite della massa della stella stabile.

In Figura 3.2 riportiamo, a titolo di esempio, l'andamento, in funzione della coordinata radiale in cui è espressa la metrica, della massa del guscio sferico racchiuso e della funzione m . La massa totale è maggiore di m perché racchiude anche l'energia di legame gravitazionale ed è quella descritta dalla (3.1.46).

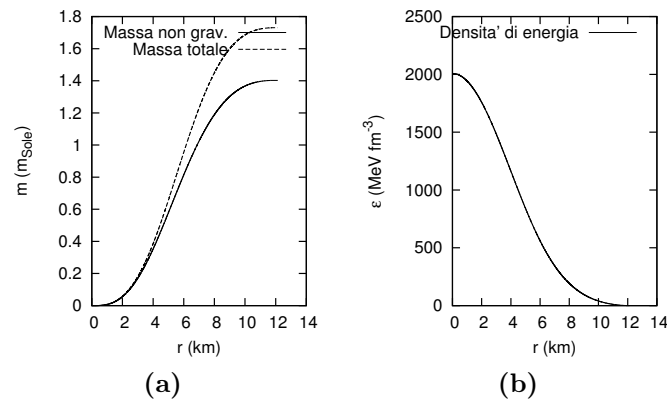


Figura 3.2. Andamento della massa non gravitazionale e della massa totale (complessiva dell'energia gravitazionale) del guscio sferico interno (figura a) e della densità di energia in funzione della distanza dal centro della stella di neutroni stabile con la massa più elevata per la politropica specifica ricavata in Figura 3.1 per $T = 5$ MeV con neutrini intrappolati a $Y_L = 0.4$ (barioni interagenti).

In Figura 3.3 è invece mostrato l'andamento delle proprietà globali della stella politropica, quali massa e raggio, in funzione della densità di energia centrale ϵ_0 .

L'andamento a 5 MeV è indistinto da quello a 0 MeV per l'alto grado di degenerazione. Si osserva una generale diminuzione della densità di energia centrale all'aumentare della temperatura nonché un aumento della massa. Questa tende ovviamente a 0 al diminuire della densità al di sotto del valore corrispondente alla massa massima. Si osserva invece una tendenza della massa a concentrarsi, dopo il punto di massimo, intorno a circa 1.5 masse solari per tutte le temperature considerate. Questo andamento comune è da attribuire ancora una volta al fatto che a densità centrali così elevate corrispondono valori di densità elevati in una sempre maggior porzione della stella, secondo un andamento come quello di Figura 3.2, e quindi un comportamento degenerare sempre più esteso nel volume stellare, con conseguente scomparsa della dipendenza delle proprietà globali dalla temperatura.

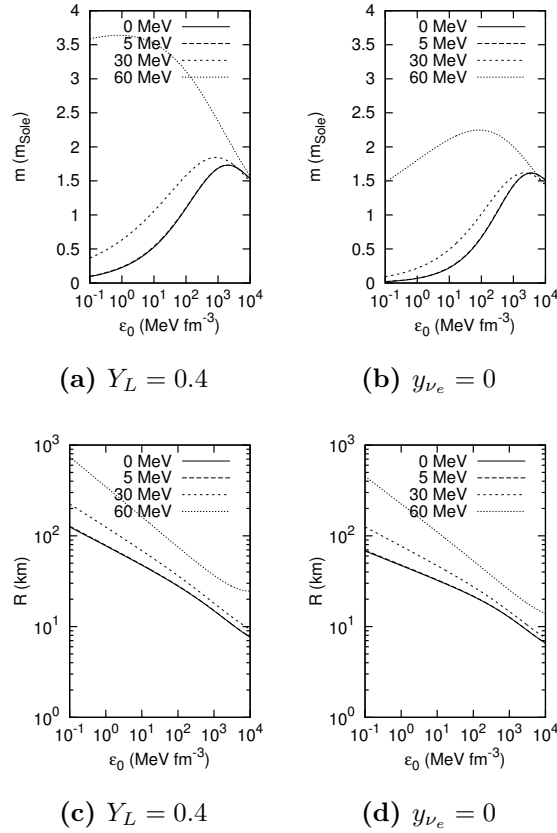


Figura 3.3. Massa (figure a,b) e raggio (figure c,d) della stella di neutroni, con equazione di stato politropica corrispondente alla Figura 3.1, in funzione della densità d'energia relativistica centrale ϵ_0 . Sono stati utilizzati 20 valori di ϵ_0 compresi tra 0.1 e 10000 $\frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$ con spaziatura esponenzialmente crescente.

In Tabella 3.1 mostriamo invece i valori della stella limite per tutte le configurazioni considerate.

Tabella 3.1. Proprietà della stella limite ottenute utilizzando le equazioni di stato politropiche mostrate in Figura 3.1 (barioni interagenti).

Configurazione	Massa (M_{\odot})	Raggio (km)	Densità centrale ($\frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$)
$Y_L = 0.4$ $T = 0$ MeV	1.73	12.1	2000
$Y_L = 0.4$ $T = 5$ MeV	1.73	12.2	2000
$Y_L = 0.4$ $T = 30$ MeV	1.84	19.0	860
$Y_L = 0.4$ $T = 60$ MeV	3.64	369	0.836
$y_{\nu_e} = 0$ $T = 0$ MeV	1.62	8.73	3580
$y_{\nu_e} = 0$ $T = 5$ MeV	1.62	8.79	3530
$y_{\nu_e} = 0$ $T = 30$ MeV	1.62	11.5	2220
$y_{\nu_e} = 0$ $T = 60$ MeV	2.25	55.7	85.6

Si osserva un generale aumento della massa e del raggio della stella limite all'aumentare della temperatura. Questo è particolarmente evidente nel caso della stella limite a 60 MeV con neutrini intrappolati.

Inversamente al raggio si ha invece un evidente diminuzione della densità di energia centrale. Diversi di questi valori della densità d'energia relativistica centrale sono inoltre fuori dal range delle densità esaminate nel Capitolo 1. Questo significa che i valori ricavati per i parametri del fit politropico dell'equazione di stato non necessariamente sono validi in questa regione di densità come spiegato in 3.1.1.

Per completezza mostriamo in Figura 3.4 il diagramma massa-raggio ottenuto per le diverse configurazioni. L'asse del raggio è in scala logaritmica per rendere meglio il confronto tra l'andamento a 60 MeV e gli altri tre.

I risultati così ottenuti possono essere confrontati, ad esempio, con quelli riportati in [3]. In particolare le stelle di neutroni ricavate con il presente modello risultano relativamente meno compatte, lungo tutto il profilo mostrato. Questo è probabilmente da ricondurre ai soliti effetti dinamici di correlazione che l'approssimazione di campo medio ignora provocando una sottostima della pressione, che corrisponde evidentemente ad una minor capacità di controbilanciare l'attrazione gravitazionale, e quindi una minor massa sostenibile.

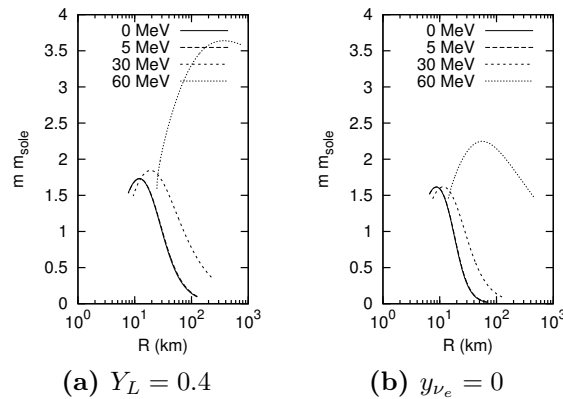


Figura 3.4. Diagramma massa-raggio per il range di densità di energia centrale ϵ_0 usato in Figura 3.3.

3.1.3.2 Confronto con la densità barionica

Utilizzando i dati del Capitolo 1 possiamo mostrare le caratteristiche delle stelle di neutroni che possiedono certi valori della densità barionica centrale. Semplicemente fissata la densità barionica usiamo il valore di densità d'energia relativistica

corrispondente come densità centrale ϵ_0 della stella e ricaviamo la massa e il raggio corrispondente.

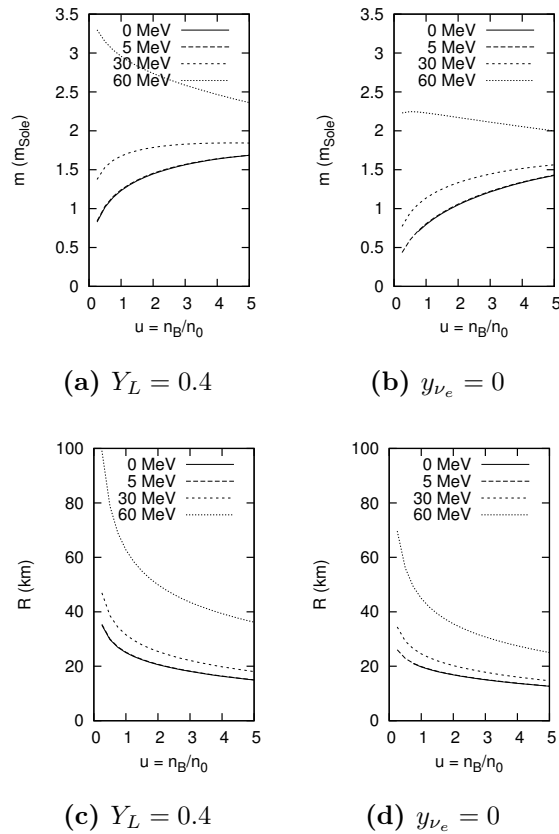


Figura 3.5. Massa (figure a,b) e raggio (figure c,d) della stella di neutroni, con equazione di stato politropica corrispondente alla Figura 3.1, in funzione della densità barionica centrale.

Come si vede la curva a 5 MeV è praticamente indistinguibile da quella a 0 MeV.

Questo tipo di grafici ci consente di evidenziare un fatto cui già abbiamo accennato e cioè che nella maggior parte dei casi la stella massima è al di fuori del range di densità barioniche centrali considerato, come si vede confrontando i dati in Tabella 3.1 con la Figura 3.5. Questo, come già detto, implica che vadano considerati come indicativi certi dati sulle stelle limite, un calcolo più esatto dei quali richiederebbe lo studio della materia nucleare a più alti o più bassi valori di densità.

3.2 Stella standard

3.2.1 Proprietà della stella standard

Per poter confrontare i risultati ottenuti sulla struttura stellare con le proprietà della materia ad alta densità individuate nel Capitolo 1 abbiamo scelto di considerare, per le varie configurazioni, una stella con valore fisso della densità d'energia relativistica centrale pari a $\epsilon_0 = 1000 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$, che corrisponde più o meno al massimo valore di densità di energia relativistica incontrato alle densità barioniche considerate.

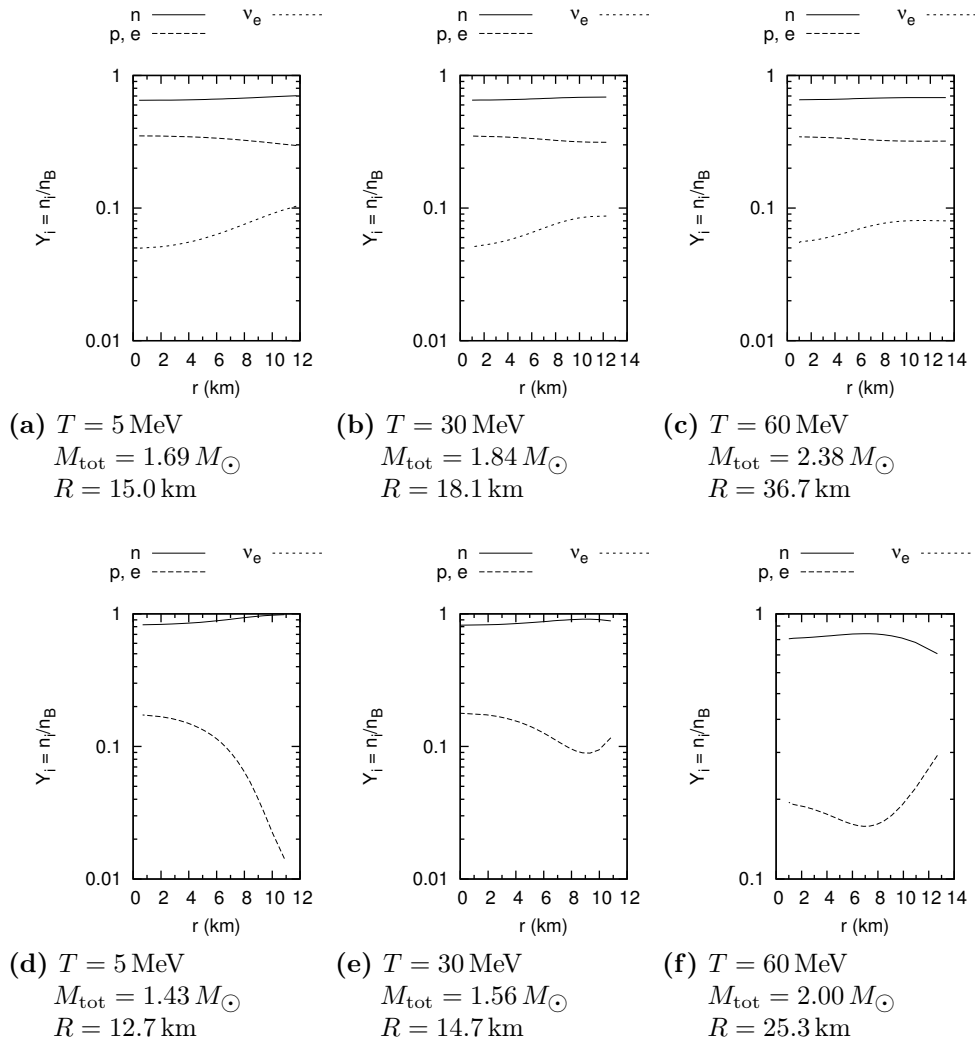


Figura 3.6. Composizione chimica della stella di neutroni standard ($\epsilon_0 = 1000 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$) per barioni interagenti con potenziale di tipo Skyrme all'equilibrio β con $Y_L = 0.4$ (figure a, b, c) e $y_{\nu_e} = 0$ (figure d, e, f). Sono riportati anche i valori della massa e del raggio della stella standard.

In sostanza abbiamo individuato le densità barioniche corrispondenti a dati valori della coordinata radiale r e riportato i grafici principali del Capitolo 1 in funzione di r anziché di n_B . Per le concentrazioni delle varie specie chimiche abbiamo ottenuto i risultati mostrati in Figura 3.6, che sostanzialmente rispecchiano quelli del Capitolo 1 con la sostituzione della densità barionica con la coordinata r . Infatti la densità barionica è quella che dà il contributo principale alla densità di energia relativistica che, come visto, è una funzione monotona decrescente di r .

Come si vede, soprattutto per le stelle più calde, non viene comperto tutto il volume della stella nei grafici. Questo è dovuto al fatto che le zone esterne corrispondono a valori di densità barionica al di sotto di $0.25 n_0$, quindi al di fuori del range di densità considerate nei calcoli del Capitolo 1. Considerato però che appunto la materia è concentrata in questo guscio più interno questi dati sono comunque significativi.

Riproponiamo ugualmente i grafici relativi ai parametri di interazione forte dei barioni quali la massa di Landau (Figura 3.7) e il potenziale di Skyrme costante di singola particella (Figura 3.8).

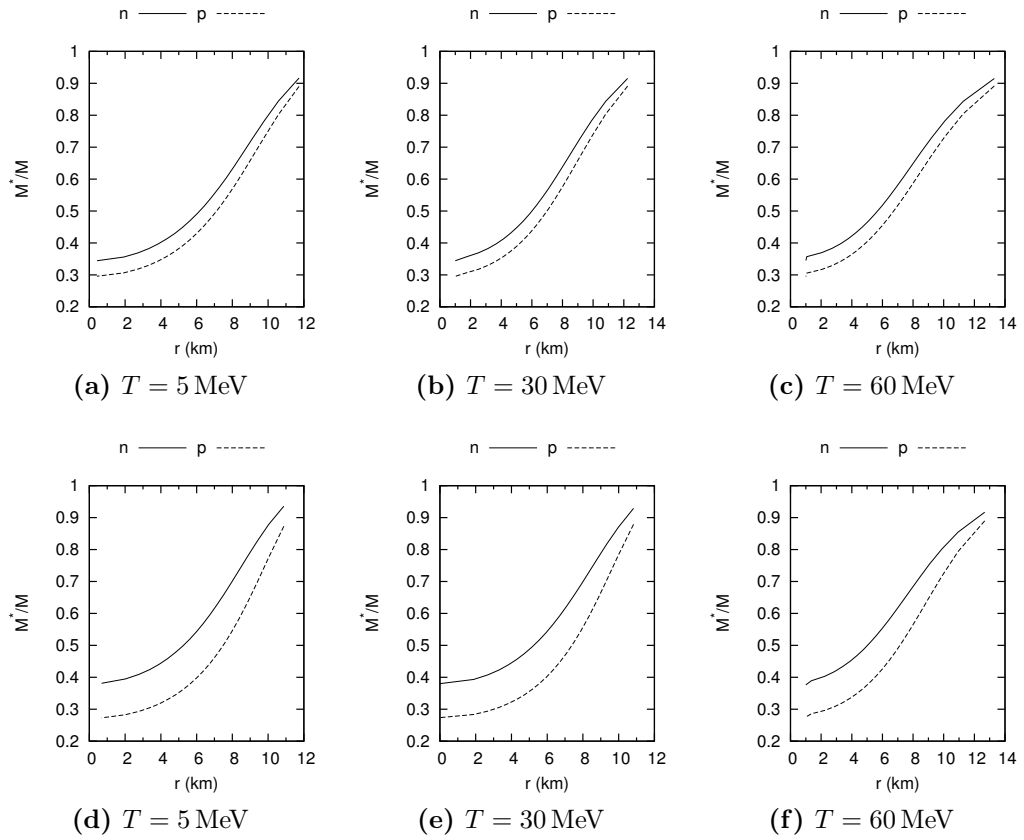


Figura 3.7. Masse di Landau della stella di neutroni standard ($\epsilon_0 = 1000 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$) per barioni interagenti con potenziale di tipo Skyrme all'equilibrio β con $Y_L = 0.4$ (figure a, b, c) e $y_{\nu_e} = 0$ (figure d, e, f) .

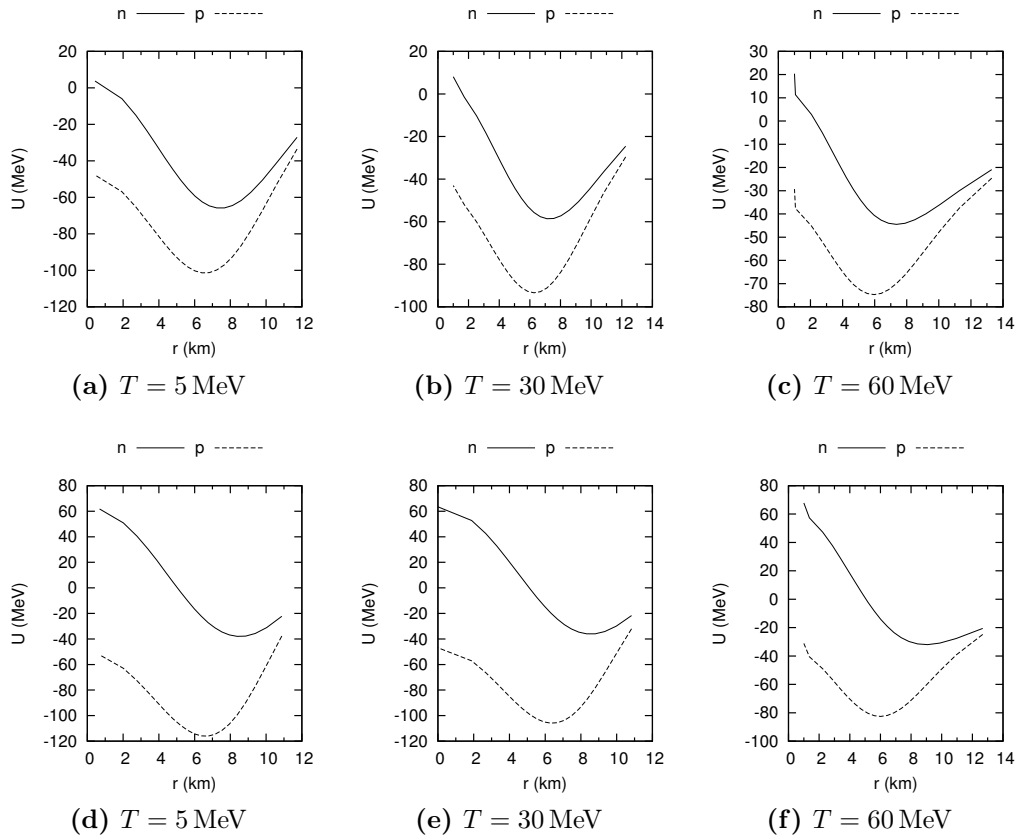


Figure 3.8. Potenziale costante di singola particella della stella di neutroni standard ($\epsilon_0 = 1000 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$) per barioni interagenti con potenziale di tipo Skyrme all'equilibrio β con $Y_L = 0.4$ (figure a, b, c) e $y_{\nu_e} = 0$ (figure d, e, f) .

Abbiamo omesso di riportare i dati a 0 MeV perché, come mostrato nelle sezioni precedenti, questa configurazione è pressoché identica, per quanto riguarda la struttura stellare, alla stella degenera.

3.2.2 Neutrini nella stella standard

Infine presentiamo, in Figura 3.9 l'andamento del libero cammino medio del neutrino in funzione della coordinata r . Questi dati possono essere usati per valutare la rate di emissione dei neutrini, quindi studiare il raffreddamento della stella e la corrispondente evoluzione e stabilizzazione, in particolare il passaggio dal regime di protostella di neutroni a quello di stella di neutroni propriamente detta.

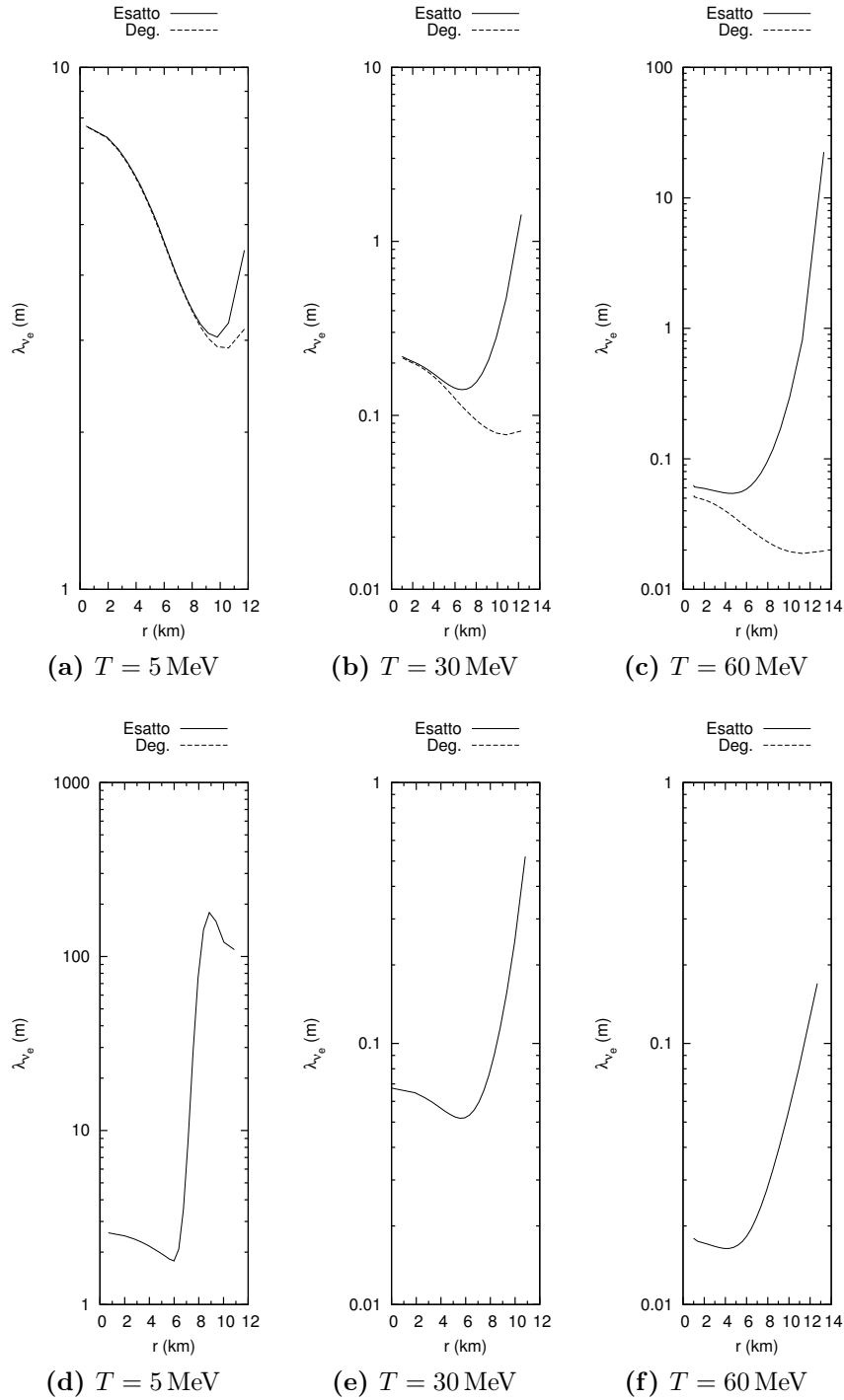


Figura 3.9. Libero cammino medio del neutrino nella stella di neutroni standard ($\epsilon_0 = 1000 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$) per barioni interagenti con potenziale di tipo Skyrme all'equilibrio β con $Y_L = 0.4$ (figure a, b, c) e $y_{\nu_e} = 0$ (figure d, e, f) .

Come si vede in generale il libero cammino medio è di gran lunga inferiore rispetto al raggio della stella, o piuttosto alla distanza dalla superficie stellare.

Conclusioni

In questo lavoro abbiamo costruito uno schema per il calcolo delle grandezze rilevanti al problema dell'opacità di neutrino nelle protostelle di neutroni che abbiamo mostrato essere consistente con i risultati ottenuti in altri lavori (come [9, 11]) utilizzando un modello semplificato per descrivere le interazioni forti tra barioni, considerando una sola sorgente di opacità, quale il canale di assorbimento principale, e ignorando la comparsa di altre specie chimiche più esotiche come gli iperoni e i muoni, che pure contribuiscono in maniera non trascurabile, nel determinare la struttura stellare ad alta densità.

Lo schema così costruito è predisposto in maniera tale da essere facilmente applicabile a situazioni più complesse in cui si fa a meno delle precedenti semplificazioni. In particolare ci si ripropone, a seguito di questo lavoro, di esaminare i dati che si otterrebbero utilizzando un modello dinamico più realistico (come quello utilizzato in [3]).

I dati prodotti da questo schema, presentati nella forma che compare ad esempio in 3.2.2, possono essere utilizzati per valutare la rate di emissione dei neutrini elettronici e la conseguente evoluzione della struttura stellare. Si dovrebbe verificare, a posteriori, che questa rate è compatibile con l'assunzione, fatta all'inizio del nostro lavoro, che l'equilibrio venga raggiunto in tempi molto più brevi di quelli caratteristici dell'evoluzione della protostella di neutroni.

Il calcolo dovrebbe essere eseguito utilizzando l'equazione delle geodetiche per particelle a massa nulla nello spaziotempo generato dalla stella, cioè

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} e^{-2\lambda(r)} = E e^{-2[\lambda(r)+\nu(r)]}, \quad (3.2.1)$$

con E e L costanti di integrazione che vanno calcolate a partire dall'energia e dal momento angolare del neutrino in spaziotempo piatto alle densità barioniche corrispondenti al valore r della coordinata radiale. Si può pensare allora di selezionare in maniera casuale un certo numero, statisticamente significativo, di neutrini all'interno della stella (metodo MonteCarlo), secondo le distribuzioni opportune specificate dalle concentrazioni ottenute nel Capitolo 1 e mostrate in funzione di r nel Capitolo 3.

Tenendo quindi conto del valore del libero cammino medio in funzione dei valori della coordinata radiale del neutrino (il cui andamento è appunto mostrato in Figura 3.9), che stabilisce la probabilità che il neutrino non venga assorbito in un tratto infinitesimo di geodetica all'interno della materia stellare, verificare se esso riesce o meno ad abbandonare la stella in un intervallo di tempo sufficientemente grande. La rate cercata si potrebbe allora stimare come il numero di neutrini che riescono a sfuggire alla stella di neutroni nell'unità di tempo.

Appendice A

Potenziale medio di singola particella

Riportiamo qui il calcolo del potenziale medio di singola particella U_α a partire dalla componente di interazione della densità di energia del modello SL2 usato in [11] (espressione (1.2.3)).

Per eseguire il calcolo occorre tener presente che u e x sono entrambi funzionali delle distribuzioni e che si ha

$$\frac{\delta u}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} = \frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} \frac{2}{n_0} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (f_n + f_p) = \frac{2}{(2\pi)^3 n_0} \quad (\text{A.0.1})$$

e

$$\frac{\delta n_p}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} = \frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} 2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f_p = \frac{2\delta_{\alpha p}}{(2\pi)^3} \quad (\text{A.0.2})$$

quindi

$$\frac{\delta x}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} = \frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} \left(\frac{n_p}{n_0 u} \right) = \frac{1}{n_0} \frac{u \frac{\delta n_p}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} - n_p \frac{\delta u}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})}}{u^2} \quad (\text{A.0.3})$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^3 n_0} \frac{u \delta_{\alpha p} - \frac{n_p}{n_0}}{u^2} = \frac{2}{(2\pi)^3 n_0} \frac{\delta_{\alpha p} - x}{u}. \quad (\text{A.0.4})$$

Allora per il primo termine si ha

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} A n_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^2 \\
&= -4A n_0 \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) (1 - 2x) u^2 \frac{\delta x}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} \\
&+ 2A n_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) (1 - 2x)^2 \right] u \frac{\delta u}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} \\
&= -\frac{8A}{(2\pi)^3} \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) (1 - 2x) u (\delta_{\alpha p} - x) \\
&\quad + \frac{4A}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) (1 - 2x)^2 \right] u \\
&= \frac{2A}{(2\pi)^3} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) (1 - 2x) (-2\delta_{\alpha p} + 1) \right] u. \tag{A.0.5}
\end{aligned}$$

Per il secondo si ha

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} B n_0 \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^{\sigma+1} \\
&= -4B n_0 \left(-\frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x) u^{\sigma+1} \frac{\delta x}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} \\
&+ (\sigma + 1) B n_0 \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^\sigma \frac{\delta u}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} \\
&= -\frac{8B}{(2\pi)^3} \left(-\frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x) u^\sigma (\delta_{\alpha p} - x) \\
&\quad + \frac{2(\sigma+1)B}{(2\pi)^3} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^\sigma \\
&= \frac{2B}{(2\pi)^3} \left[(\sigma + 1) + (2\delta_{\alpha p} - 1) \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} (\sigma - 1) \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^\sigma. \tag{A.0.6}
\end{aligned}$$

In entrambi la $\delta_{\alpha p}$ compare solo nella combinazione $2\delta_{\alpha p} - 1$ che vale 1 per i protoni e -1 per i neutroni. Quindi attribuendo il segno superiore ai neutroni e quello inferiore ai protoni si ha

$$\text{primo termine} = \frac{2A}{(2\pi)^3} \left[1 \mp \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) (1 - 2x) \right] u \tag{A.0.7}$$

$$\begin{aligned}
\text{secondo termine} &= \frac{2B}{(2\pi)^3} \left[(\sigma + 1) \mp \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} (\sigma - 1) \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) (1 - 2x)^2 \right] u^\sigma. \tag{A.0.8}
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) (f_n + f_p) = \frac{2}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}, \Lambda_i) \quad (\text{A.0.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) f_n (1-x) &= \frac{2}{(2\pi)^3} (1 - \delta_{\alpha p}) g(\mathbf{k}, \Lambda_i) (1-x) \quad (\text{A.0.10}) \\ &- \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{\delta_{\alpha p} - x}{n_0 u} 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) f_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) f_p x &= \frac{2}{(2\pi)^3} \delta_{\alpha p} g(\mathbf{k}, \Lambda_i) x \quad (\text{A.0.11}) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{\delta_{\alpha p} - x}{n_0 u} 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) f_p. \end{aligned}$$

In particolare sommando le ultime due si ha

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) [f_n (1-x) + f_p x] &= \frac{2}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}, \Lambda_i) (1-x - \delta_{\alpha p} + 2\delta_{\alpha p} x) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{\delta_{\alpha p} - x}{n_0 u} 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) (f_p - f_n). \quad (\text{A.0.12}) \end{aligned}$$

Allora la derivata della sommatoria in \mathcal{V} escluso il fattore u , che chiameremo momentaneamente Σ , è data da

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Sigma}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{2}{5} \sum_{i=1,2} [(2C_i + 4Z_i) + (C_i - 8Z_i) (1-x - \delta_{\alpha p} + 2\delta_{\alpha p} x)] g(\mathbf{k}, \Lambda_i) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{2}{5} \sum_{i=1,2} (C_i - 8Z_i) \frac{\delta_{\alpha p} - x}{n_0 u} 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) (f_p - f_n). \quad (\text{A.0.13}) \end{aligned}$$

L'ultimo termine di U è dato da

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} (u\Sigma) &= \Sigma \frac{\delta u}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} + u \frac{\delta \Sigma}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{n_0} \frac{2}{5} \sum_{i=1,2} \left\{ (2C_i + 4Z_i) 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) (f_n + f_p) \right. \\ &\quad \left. + (C_i - 8Z_i) 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) [f_n (1-x) + f_p x] \right\} \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{2}{5} u \sum_{i=1,2} [(2C_i + 4Z_i) + (C_i - 8Z_i) (1-x - \delta_{\alpha p} + 2\delta_{\alpha p} x)] g(\mathbf{k}, \Lambda_i) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{2}{5} \sum_{i=1,2} (C_i - 8Z_i) \frac{\delta_{\alpha p} - x}{n_0} 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) (f_p - f_n) \quad (\text{A.0.14}) \end{aligned}$$

che può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f_\alpha(\mathbf{k})} (u\Sigma) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{n_0} \frac{2}{5} \sum_{i=1,2} \left\{ (2C_i + 4Z_i) 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) f_\alpha \right. \\ &\quad \left. + (3C_i - 4Z_i) 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}', \Lambda_i) f_\alpha \right\} \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{5} u \sum_{i=1,2} [5C_i \pm (C_i - 8Z_i) (1-2x)] g(\mathbf{k}, \Lambda_i). \quad (\text{A.0.15}) \end{aligned}$$

con $\alpha' \neq \alpha$. Sommando i vari termini si ottiene la (1.2.9).

Appendice B

Potenziale chimico a basse temperature

Per conoscere la forma dei potenziali chimici a basse temperature partiamo dalla relazione generale

$$n = \frac{s}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{1}{1 + \exp \left[\beta \left(\sqrt{m^2 + |\mathbf{k}|^2} - m \right) \right]} z^{-1}(\beta). \quad (\text{B.0.1})$$

Passiamo a coordinate sferiche nell'integrale:

$$n = \frac{s}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{1 + \exp \left[\beta \left(\sqrt{m^2 + k^2} - m \right) \right]} z^{-1}(\beta), \quad (\text{B.0.2})$$

quindi definiamo la nuova variabile di integrazione adimensionale

$$x \equiv \beta \left(\sqrt{m^2 + k^2} - m \right), \quad (\text{B.0.3})$$

così che

$$n = \frac{s}{2\pi^2} I(\beta) \quad (\text{B.0.4})$$

con

$$I(\beta) \equiv \frac{1}{\beta^3} \int_0^\infty dx \frac{(x + \beta m) \sqrt{(x + \beta m)^2 - \beta^2 m^2}}{[1 + \exp(x) z^{-1}(\beta)]}. \quad (\text{B.0.5})$$

Integriamo per parti nel modo seguente

$$\begin{aligned}
I(\beta) &= \frac{1}{3\beta^3} \left[\frac{(x + \beta m)^2 - \beta^2 m^2}{[1 + \exp(x) z^{-1}(\beta)]} \right]_{0}^{\infty} \\
&+ \frac{1}{3\beta^3} \int_0^{\infty} dx \left[(x + \beta m)^2 - \beta^2 m^2 \right]^{\frac{3}{2}} \frac{\exp(x) z^{-1}(\beta)}{[1 + \exp(x) z^{-1}(\beta)]^2} \\
&= \frac{1}{3\beta^3} \int_0^{\infty} dx \left[(x + \beta m)^2 - \beta^2 m^2 \right]^{\frac{3}{2}} \frac{\exp(x) z^{-1}(\beta)}{[1 + \exp(x) z^{-1}(\beta)]^2}. \quad (\text{B.0.6})
\end{aligned}$$

Sia ora α tale che

$$z = \exp(\alpha). \quad (\text{B.0.7})$$

Allora

$$\begin{aligned}
I(\beta) &= \frac{1}{3\beta^3} \int_0^{\infty} dx \left[(x + \beta m)^2 - \beta^2 m^2 \right]^{\frac{3}{2}} \frac{\exp[x - \alpha(\beta)]}{\{1 + \exp[x - \alpha(\beta)]\}^2} \\
&= \frac{1}{3\beta^3} \int_{-\alpha(\beta)}^{\infty} dx \left\{ [x + \beta m + \alpha(\beta)]^2 - \beta^2 m^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \frac{\exp(x)}{[1 + \exp(x)]^2}. \quad (\text{B.0.8})
\end{aligned}$$

Ora μ è una quantità sempre finita e siamo interessati al limite di basse temperature che corrisponde a $\beta \rightarrow \infty$. In questo limite $z \rightarrow \infty$ e $\alpha \rightarrow \infty$ per cui consideriamo

$$I(\beta) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \left[m + \mu(\beta) + \frac{x}{\beta} \right]^2 - m^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \frac{\exp(x)}{[1 + \exp(x)]^2} + O[z^{-1}(\beta)]. \quad (\text{B.0.9})$$

Riscriviamo, con un'opportuna ridefinizione delle funzioni, l'espressione precedente in termini di

$$I(T) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ [m + \mu(\varepsilon) + x T_F \varepsilon]^2 - m^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \frac{\exp(x)}{[1 + \exp(x)]^2} + O[z^{-1}(\varepsilon)] \quad (\text{B.0.10})$$

quindi sviluppiamo il potenziale chimico in serie all'ordine ε^2 :

$$\mu(T) = \epsilon_F + \mu^{(1)}\varepsilon + \mu^{(2)}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (\text{B.0.11})$$

Sostituendo si ha

$$I(T) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ [(m + \epsilon_F) + (\mu^{(1)} + x\epsilon_F) \epsilon + \mu^{(2)} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)]^2 - m^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \frac{\exp(x)}{[1 + \exp(x)]^2} + O\left(e^{-\frac{1}{\epsilon}}\right). \quad (\text{B.0.12})$$

Sia $M \equiv m + \epsilon_F$. Allora

$$I(T) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ M^2 - m^2 + 2M(\mu^{(1)} + x\epsilon_F) \epsilon + [2M\mu^{(2)} + (\mu^{(1)} + x\epsilon_F)^2] \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \right\}^{\frac{3}{2}} \frac{\exp(x)}{[1 + \exp(x)]^2} + O\left(e^{-\frac{1}{\epsilon}}\right) \quad (\text{B.0.13})$$

Chiamiamo inoltre $H \equiv \sqrt{M^2 - m^2}$. Ora, per $\epsilon \rightarrow 0$ si ha

$$(1 + a\epsilon + b\epsilon^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3a}{2}\epsilon + \frac{3}{2} \left(\frac{a^2}{4} + b \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad (\text{B.0.14})$$

per cui sviluppando si ha

$$I(T) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{H^3}{3} + MH(\mu^{(1)} + x\epsilon_F) \epsilon + \frac{(M^2 + H^2)(\mu^{(1)} + x\epsilon_F)^2 + 2MH^2\mu^{(2)}}{2H} \epsilon^2 \right] \frac{\exp(x)}{[1 + \exp(x)]^2} + O(\epsilon^3). \quad (\text{B.0.15})$$

Raccogliendo le varie potenze di x si ha

$$I(T) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [a(\epsilon) + b(\epsilon)x + c(\epsilon)x^2] \frac{\exp(x)}{[1 + \exp(x)]^2} + O(\epsilon^3), \quad (\text{B.0.16})$$

con

$$a(\epsilon) = \frac{H^3}{3} + MH\mu^{(1)}\epsilon + \frac{(M^2 + H^2)(\mu^{(1)})^2 + 2MH^2\mu^{(2)}}{2H} \epsilon^2 \quad (\text{B.0.17})$$

$$b(\epsilon) = MH\epsilon_F\epsilon + \frac{(M^2 + H^2)\mu^{(1)}\epsilon_F}{H} \epsilon^2 \quad (\text{B.0.18})$$

$$c(\epsilon) = \frac{(M^2 + H^2)\epsilon_F^2}{2H} \epsilon^2. \quad (\text{B.0.19})$$

Ora

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp(x)}{[1 + \exp(x)]^2} = 1 \quad (\text{B.0.20})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \exp(x)}{[1 + \exp(x)]^2} = 0 \quad (\text{B.0.21})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 \exp(x)}{[1 + \exp(x)]^2} = \frac{\pi^2}{3}. \quad (\text{B.0.22})$$

Quindi

$$\frac{2\pi^2 n}{s} = a(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{3} c(\varepsilon) + O(\varepsilon^3) \quad (\text{B.0.23})$$

ovvero

$$h^3 = H^3 + 3MH\mu^{(1)}\varepsilon + 3 \frac{(M^2 + H^2) \left[(\mu^{(1)})^2 + \frac{\pi^2 \epsilon_F^2}{3} \right] + 2MH^2\mu^{(2)}}{2H} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (\text{B.0.24})$$

con

$$h \equiv \left(\frac{6\pi^2 n}{s} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{B.0.25})$$

Confrontando dunque i termini omologhi nelle potenze di ε si trova

$$H = h \quad (\text{B.0.26})$$

$$\mu^{(1)} = 0 \quad (\text{B.0.27})$$

$$\mu^{(2)} = -\pi^2 \frac{2h^2 + m^2}{6h^2 \sqrt{h^2 + m^2}} \epsilon_F^2. \quad (\text{B.0.28})$$

Bibliografia

- [1] BALBERG, S. AND SHAPIRO, S. L. The Properties of Matter in White Dwarfs and Neutron Stars. *ArXiv Astrophysics e-prints*, (2000). [arXiv:astro-ph/0004317](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0004317).
- [2] BARONE, L. *Programmazione scientifica. Linguaggio C, algoritmi e modelli nella scienza*. Pearson (2006). ISBN 9788871922423.
- [3] CAMELIO, G., LOVATO, A., GUALTIERI, L., BENHAR, O., PONS, J. A., AND FERRARI, V. Evolution of a proto-neutron star with a nuclear many-body equation of state: Neutrino luminosity and gravitational wave frequencies. *prd*, **96** (2017), 043015. [arXiv:1704.01923](https://arxiv.org/abs/1704.01923), [doi:10.1103/PhysRevD.96.043015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.043015).
- [4] HUANG, K. *Statistical mechanics*. Wiley (1987). ISBN 9780471815181.
- [5] LOVATO, A., BENHAR, O., GANDOLFI, S., AND LOSA, C. Neutral-current interactions of low-energy neutrinos in dense neutron matter. *Phys. Rev. C*, **89** (2014), 025804. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.89.025804>, [doi:10.1103/PhysRevC.89.025804](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.89.025804).
- [6] MANDL, F. AND SHAW, G. *Quantum Field Theory*. A Wiley-Interscience publication. John Wiley & Sons (2010). ISBN 9780471496830.
- [7] PATRÌ, S. *Fondamenti di meccanica quantistica relativistica*. Nuova Cultura (2013). ISBN 9788868122140.
- [8] PESKIN, M. E. AND SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA (1995). ISBN 9780201503975, 0201503972. Available from: <http://www.slac.stanford.edu/~mpeskin/QFT.html>.
- [9] PRAKASH, M., BOMBACI, I., PRAKASH, M., ELLIS, P. J., LATTIMER, J. M., AND KNORREN, R. Composition and structure of protoneutron stars. *Phys. Rept.*, **280** (1997), 1. [arXiv:nuc1-th/9603042](https://arxiv.org/abs/nuc1-th/9603042), [doi:10.1016/S0370-1573\(96\)00023-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(96)00023-3).

- [10] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in Fortran 90 (2Nd Ed.): The Art of Parallel Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA (1996). ISBN 0-521-57439-0.
- [11] REDDY, S., PRAKASH, M., AND LATTIMER, J. M. Neutrino interactions in hot and dense matter. *Phys. Rev. D*, **58** (1998), 013009. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.013009>, doi: 10.1103/PhysRevD.58.013009.
- [12] RZADKOWSKI, G. AND LEPKOWSKI, S. A generalization of the euler-maclaurin summation formula: An application to numerical computation of the fermi-dirac integrals. *J. Sci. Comput.*, **35** (2008), 63. Available from: <https://doi.org/10.1007/s10915-007-9175-3>, doi:10.1007/s10915-007-9175-3.
- [13] SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. Series in physics. Cambridge University Press (1985). ISBN 9780521277037.
- [14] TEUKOLSKY, S. A. AND SHAPIRO, S. L. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars : the physics of compact objects*. Wiley (1983). ISBN 9780471873167.
- [15] WIRINGA, R. B., STOKS, V. G. J., AND SCHIAVILLA, R. Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking. *prc*, **51** (1995), 38. [arXiv: nuc1-th/9408016](https://arxiv.org/abs/nuc1-th/9408016), doi:10.1103/PhysRevC.51.38.