

Università degli studi di Roma la “ Sapienza ”



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2010-2011

Tesi di Laurea specialistica

Trasporto dei neutrini nel core delle stelle di neutroni

Relatore

Dott. Omar Benhar Noccioli

Candidato

Andrea Loreti
Matricola:1041664

Indice

Introduzione	III
1 Stelle di neutroni e materia nucleare	1
1.1 Introduzione alle stelle di neutroni	1
1.2 Forze nucleari	7
1.3 Il sistema a due nucleoni	11
1.4 Materia nucleare	14
1.5 Espansione in cluster e potenziale effettivo	17
2 Interazione dei neutrini con la materia di neutroni	21
2.1 Scattering neutrino su neutroni non relativistici	21
2.2 Teoria della risposta lineare	31
2.2.1 Temperatura nulla	31
2.2.2 Temperatura diversa da zero.	33
2.3 Teorema fluttuazione e dissipazione	34
3 Teoria dei liquidi normali di Fermi	39
3.1 Introduzione alle quasi particelle	40
3.2 Energia di quasiparticella	43
3.3 Equazione cinetica per le quasi particelle	47
3.4 Eccitazioni nei liquidi di Fermi	49
3.5 Landau damping e stabilità del suono nullo	53
3.6 Risposta materia neutronica	55
4 Risposta della materia neutronica	59
4.1 Parametri di Landau, risposta del liquido di Fermi	59
4.2 Cammino libero medio $T=0$	67
4.3 Cammino libero medio $T \neq 0$	73
Conclusioni	75
A Funzioni di Landau	77

Introduzione

Nell'universo esistono scenari dove è possibile ritrovare condizioni fisiche molto lontane da quelle raggiungibili nei laboratori terrestri. Sicuramente, tra gli oggetti più affascinanti dove queste condizioni sono riscontrate, troviamo le stelle.

Negli ultimi decenni dello scorso secolo e ancora nelle ricerche attuali, grandi sforzi si stanno compiendo per riuscire a spiegare alcuni processi non ancora risolti completamente, che riguardano la fisica e la formazione di un tipo particolare di stella, la stella di neutroni.

L'esistenza di oggetti astrofisici compatti costituiti da neutroni, fu predetta nel 1932 da Landau e nel 1934 Baade e Zwicky, individuarono nei residui di supernove, esplosioni di stelle con masse $M > 8M_{\odot}$,¹ l'origine delle stelle di neutroni. Una prima evidenza sperimentale si ebbe alla fine degli anni '60 ad opera di Bell e Hewish, che la individuarono come sorgente di onde radio pulsanti, dette Pulsar.

Le stelle di neutroni sono tra gli oggetti più densi dell'universo, la loro massa $\simeq 1.35M_{\odot}$ [?] è racchiusa in un raggio di $10 - 20km$. Ciò permette di raggiungere densità enormi che possono superare, nella regione centrale, 5-10 volte la densità al centro dei nuclei atomici, $n_o = 0.16fm^{-3}$. Inoltre, in una stella di neutroni sono presenti campi magnetici molto intensi, che possono arrivare a intensità di $10^{13}Gauss$.

Il limite superiore per la massa di queste stelle, limite di Chandrasekhar, che si ottiene imponendo l'equilibrio tra la forza gravitazionale che spinge la stella al collasso e la pressione esercitata dai fermioni a causa del principio di esclusione di Pauli, $\simeq 0.8 M_{\odot}$, risulta essere molto minore di quello ricavato dalle misure sperimentali, $\simeq 1.35M_{\odot}$. Questa è una chiara evidenza che, oltre la pressione di degenerazione dei fermioni, debba essere considerata una pressione d'origine dinamica, dovuta alle interazioni tra i neutroni.

A livello microscopico la descrizione della fisica di una stella di neutroni è molto complessa. Questo per via della difficoltà insite nella trattazione teorica delle forze fondamentali, presenti nella materia nucleare ad elevate densità.

¹ M_{\odot} è la massa solare, $1,99 \times 10^{30}Kg$

La conoscenza incompleta delle forze effettive tra i nucleoni, è uno dei maggiori fattori di incertezza. Diversi modelli sono stati proposti, e da essi si ricavano diverse equazioni di stato tra le quali non è possibile discriminare totalmente.

Il mio lavoro di tesi ha avuto per oggetto lo studio del trasporto dei neutrini nella materia neutronica. L'obiettivo è quello di calcolare il cammino libero medio del neutrino, al variare della densità della materia che attraversa, per diversi valori della sua energia iniziale, tenendo conto delle interazioni che sussistono tra i neutroni.

I processi a corrente neutra debole tra neutrini e neutroni, sono di fondamentale importanza per il rilascio d'energia nel mezzo stellare. A questo, sono legati i primi istanti di vita di una stella di neutroni e l'esplosione che l'origina.

Si pensa infatti che l'elemento critico [?] nelle simulazioni dell'esplosioni di supernove, finora tutte con esito negativo, sia legato alle semplificazioni adottate nella risoluzione dell'equazione del trasporto dei neutrini e al calcolo delle loro sezioni d'urto e, quindi dell'energia rilasciata all'interno della stella.

La tesi si articola in quattro capitoli.

Il primo è dedicato ad un'introduzione alle stelle di neutroni, in cui vengono spiegati i passaggi più importanti che conducono ad una comprensione basilare della fisica di un tale oggetto e i collegamenti con una trattazione microscopica della materia che le compone.

Nel secondo capitolo è riportato il calcolo della sezione d'urto di diffusione di un neutrino, di qualsiasi generazione (e, μ, τ), con i costituenti della materia neutronica. Questo processo è molto importante, perchè rappresenta una delle fonti principali d'opacità del mezzo stellare.

Come metteremo in luce, la sezione d'urto è nota una volta che si conoscano i fattori di forma della materia, legati alla risposta del sistema ad una sonda esterna tramite il teorema di fluttuazione e dissipazione, di cui daremo una dimostrazione.

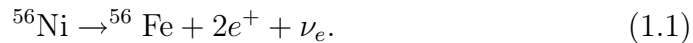
Per quanto riguarda lo studio delle proprietà della materia neutronica, come i fattori di forma, si è utilizzata la teoria di Landau dei liquidi normali di Fermi, che discuteremo nel terzo capitolo. Verrà mostrato come ricavare la risposta del liquido ad una sonda esterna utilizzando pochi parametri, detti parametri di Landau. L'ultimo capitolo è dedicato alla presentazione dei risultati numerici, che comprendono i parametri di Landau, i fattori di forma relativi alle fluttuazioni di densità e densità di spin ed il cammino libero medio del neutrino nella materia neutronica in un ampio intervallo di densità e temperatura.

Capitolo 1

Stelle di neutroni e materia nucleare

1.1 Introduzione alle stelle di neutroni

La vita di una stella di neutroni[?][?] si compone di varie fasi. Il primo passo è il collasso gravitazionale di stelle molto massive $M > 8M_{\odot}$ che sono in grado di innescare, all'interno del loro core, la nucleosintesi che porta alla costituzione del ferro, tramite la reazione

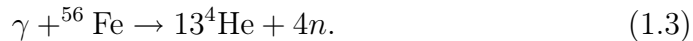


I neutrini emessi dalla precedente reazione non hanno apprezzabili interazioni con la materia circostante e fuori escono dal core della stella sottraendogli energia.

A tale perdita energetica contribuiscono altri processi, come la cattura elettronica



e la fotodisintegrazione del ferro ad opera di fotoni, con la reazione endotermica



La combinazione di questi effetti porta ad un collasso molto veloce, meno di un secondo, a seguito del quale la densità del core aumenta, fino a raggiungere un limite massimo, dato dalla densità nucleare $n_o = 0.16 \text{fm}^{-3}$. Superato questo valore, si crea un'onda d'urto che parte dalle regioni centrali e si propaga verso l'esterno.

Tale onda d'urto non è però in grado di espellere il manto esterno, in quanto dissipa energia disintegrando i nuclei del ferro ed espellendo neutrini.

Queste perdite d'energia fanno arrestare l'onda ad una distanza di circa $200Km$ dal centro, mentre le dimensioni del core sono $\cong 20Km$.

In questa prima fase di vita, la stella è composta da neutroni, protoni, neutrini di tutte le generazioni ed elettroni. Inoltre è possibile la formazione di muoni μ , se il potenziale chimico degli elettroni μ_e superasse la massa del muone che è $\simeq 105Mev$. A densità molto elevate, esiste la possibilità che nella materia si trovino anche altre particelle, come i mesoni π ($m_{\pi} \simeq 139Mev$) e K ($m_K \simeq 493Mev$) ed i barioni Σ ($m_{\Sigma} \simeq 1197Mev$). Tuttavia queste particelle nascono a densità ed energie molto alte, che cadono fuori dal range di nostro interesse. Infatti la nostra trattazione riguarderà scale d'energia, alle quali i neutroni e protoni possono essere studiati come particelle non relativistiche.

Nel secondo in cui avviene il collasso, gran parte dell'energia di legame gravitazionale, $E_g \sim 10^{53}erg$, viene emessa sotto forma di neutrini[?] dal manto esterno. Nel core invece, i neutrini rimangono intrappolati e formano un gas degenero con un potenziale chimico $\mu_{\nu} \neq 0$. Tale gas si miscela con i nucleoni e gli altri leptoni per raggiungere l'equilibrio rispetto i processi deboli. Questo è uno scenario più unico che raro; non si conoscono infatti altri sistemi in cui un gas di neutrini si trovi in equilibrio con la materia circostante.

Tra i processi che maggiormente contribuiscono all'opacità della materia sono quelli a corrente neutra debole

$$\begin{aligned} \nu_i + n &\rightarrow \nu_i + n, \\ \nu_i + p &\rightarrow \nu_i + p, \end{aligned} \tag{1.4}$$

e quelli a corrente carica debole

$$\begin{aligned} \nu_e + n &\rightarrow e^- + p, \\ \bar{\nu}_e + p &\rightarrow e^+ + n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

I processi (1.5), sono chiamati processi URCA diretti. Considerando il momento del neutrino $p_{\nu} \sim kT/c \ll p_i$, abbiamo che la condizione necessaria affinché si conservi il momento è $p_{f_p} + p_{f_e} > p_{f_n}$. Ricordando che $n_i \propto p_{f_i}^3$, (n_i densità dell'i-esima specie: p,n,e) e che per la neutralità della carica $n_p = n_e$, si ha una soglia di $x \geq 1/9$, per i processi URCA diretti. Tale valore di x non è raggiunto a densità vicine n_o , ma si possono avere comunque dei processi mediati da corrente carica, se consideriamo un terzo nucleone, che rende possibile la conservazione dell'impulso. In quest'ultimo caso si parla di processi URCA modificati, che sono

$$\begin{aligned} (n, p) + p + e^- &\rightarrow (n, p) + n + \nu_e, \\ (n, p) + n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \end{aligned} \tag{1.6}$$

I processi URCA diretti, tornano ad essere importanti a densità nucleari, nel caso in cui nella materia sono presenti anche muoni[?]. Infatti considerando anche i muoni, oltre agli elettroni, nel bilancio della carica protonica: $n_p = n_\mu + n_e$, si ha l'effetto di abbassare la densità critica alla quale possono avvenire i processi URCA diretti.

Lo studio della sezione d'urto[?],[?] di processi a corrente carica e neutra all'interno del core di una proto neutro stella, a temperature comprese nell'intervallo $(5 - 40)MeV$ e frazioni leptoniche $Y_l = Y_e + Y_{\nu_e} = 0.4$ dove

$$\begin{aligned} Y_e &= \frac{n_{e^-} - n_{e^+}}{n_B}, \\ Y_{\nu_e} &= \frac{n_{\nu_e} - n_{\bar{\nu}_e}}{n_B}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

dimostra come il cammino libero medio del neutrino, sia effettivamente più piccolo del raggio del nucleo stellare.

Di seguito ai primi istanti in cui i neutrini sono intrappolati all'interno del core, segue la fase detta di Kelvin-Helmholtz che dura circa $10s$, in cui i neutrini riescono ad uscire dal nucleo. Il nucleo è ancora opaco per i neutrini, perciò essi lo attraversano non tanto come flusso libero quanto come radiazione diffusa.

I meccanismi che sono alla base dell'esplosione non sono ancora del tutto chiari. Quello che si pensa che avvenga[?] è che essa si generi a causa dell'energia rilasciata dai neutrini nell'attraversare la stella. Quest'energia si deposita per la maggior parte sotto il manto respinto dal core, riuscendo ad innescare nuovamente la spinta necessaria ad espellerlo, creando così l'esplosione di supernova. Tale convinzione è supportata da diverse osservazioni, come ad esempio quella della supernova 1987A, la quale ha confermato la presenza di un flusso di neutrini e la scala di tempi di una decina di secondi. Quando il libero cammino medio dei neutrini, raggiunge le dimensioni tipiche del raggi, in media ci vogliono $\cong 50s$, la stella diviene trasparente al loro passaggio.

Durante le sue fasi, possiamo dire che la stella si pone in equilibrio rispetto i processi β e β inverso



Lo stato fondamentale della materia in equilibrio β , si trova minimizzando l'energia, con il vincolo della neutralità di carica elettrica $n_p = n_e$ e la conservazione del numero barionico $n_B = n_p + n_n$.

Definiamo il funzionale

$$F(n_p, n_n, n_e) = \epsilon(n_p, n_n, n_e) + \lambda_B(n_B - n_p - n_n) + \lambda_Q(n_e - n_p), \quad (1.9)$$

dove λ_B e λ_Q sono i moltiplicatori di Lagrange e $\epsilon(n_p, n_n, n_e)$ è l'energia per nucleone. La condizione di minimo si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial n_p} = \frac{\partial F}{\partial n_n} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial n_e} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_B} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_Q} = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ricordando la definizione di potenziale chimico:

$$\mu_i = \left(\frac{\partial E}{\partial N_i} \right)_{V, N_{j \neq i}} = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n_i} \right)_{V, N_{j \neq i}}, \quad (1.11)$$

si ottiene

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e. \quad (1.12)$$

Quest'ultima è però valida solo nel caso in cui il potenziale chimico del neutrino elettronico sia zero; se volessimo considerare un gas di neutrini in equilibrio con le altre specie, dovremmo tener conto della frazione di leptoni $\nu_e, \bar{\nu}_e$ presenti. In questo caso possiamo scrivere per il potenziale chimico del neutrino μ_ν la seguente relazione

$$\mu_{\nu_e} = (3\pi^2 n_B Y_{\nu_e})^{1/3}, \quad (1.13)$$

e l'equilibrio β allora sarà espresso dalla

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e - \mu_{\nu_e}. \quad (1.14)$$

Nel caso di neutrini intrappolati, il numero leptonico all'interno del core è diverso da zero[?]. La presenza degli elettroni mantiene alta la concentrazione di protoni, ($n_p = n_e$). Man mano il core si raffredda e che i neutrini fuggono via, il numero leptonico diminuisce ($Y_l \rightarrow 0$) e la concentrazione di protoni si abbassa. La stella va incontro ad una neutronizzazione[?]. Ritornando al caso di neutrini liberi, definiamo x la frazione di protoni nella materia nucleare

$$x = \frac{n_p}{n_p + n_n} = \frac{n_p}{n_B}. \quad (1.15)$$

La sistematica delle energie dei nuclei atomici suggerisce di scrivere l'energia $\epsilon(n_B, x)$ nella forma

$$\epsilon(n_B, x) = K_f(n_B, x) + \epsilon(n_B, 1/2) + (1 - 2x)^2 V_\star, \quad (1.16)$$

dove

$$V_\star = [\epsilon(n_B, 0) - \epsilon(n_B, 1/2)], \quad (1.17)$$

e

$$K_f(n_B, x) = xK_f^p(n_B, x) + (1-x)K_f^n(n_B, x), \quad (1.18)$$

è l'energia cinetica in assenza d'interazione, con

$$\begin{aligned} K_f^p(n_B, x) &= \frac{3}{5} \frac{1}{2m} (3\pi^2 x n_B)^{2/3}, \\ K_f^n(n_B, x) &= \frac{3}{5} \frac{1}{2m} (3\pi^2 (1-x) n_B)^{2/3}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le quantità $\epsilon(n_B, 1/2)$ e $\epsilon(n_B, 0)$ sono l'energie per nucleone corrispondenti alla materia nucleare simmetrica, cioè con uguale percentuale di protoni e neutroni e a quella neutronica. Utilizzando le (1.16), (1.11) nella (1.12) giungiamo alla relazione

$$\mu_n - \mu_p = \frac{1}{2m} (3\pi^2 n_B)^{2/3} \left[(1-x)^{2/3} - x^{2/3} \right] + 4(1-2x)V_\star, \quad (1.20)$$

nella quale, per elettroni relativistici degeneri, possiamo porre

$$\mu_e = \sqrt{m_e^2 + k_f^2} \approx (3\pi^2 n_B x)^{1/3}, \quad (1.21)$$

dove, per la condizione di neutralità di carica della materia, abbiamo preso $x_e = x$. Uguagliando le formule (1.20) e (1.21), possiamo trovare la frazione protonica in funzione della densità, $x(n_B)$ che comporta l'equilibrio β e l'energia $\epsilon(n_B, x)$, una volta che siano note l'energie per la materia neutronica e simmetrica; queste dipendono dal tipo di hamiltoniane scelte, per schematizzare le interazioni tra i nucleoni, di cui discuteremo nel prossimo paragrafo. Ad esempio, considerando un potenziale a due corpi, del tipo

$$v_{ij} = \sum_{p=0}^{14} [v_l(r_{ij})^p + v_I^p(r_{ij}) + v_s^p(r_{ij})] O_{ij}^p, \quad (1.22)$$

dove i pedici v_l, v_I, v_s , sono funzioni relative ai potenziali a lunga, intermedia e corta distanza tra i nucleoni $i - j$, mentre i quattordici operatori O_{ij} , sono rappresentati da

$$(1, \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j, S_{ij}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, L^2, (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})^2, L^2(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j)) \otimes (1, \boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j), \quad (1.23)$$

si hanno i risultati riportati in Fig.(1.1) e Fig.(1.2) per la densità d'energia e la frazione di protoni, in funzione della densità barionica n_B .

Sono stati riportati in figura, anche i risultati relativi ad una materia con presenza di muoni oltre di elettroni.

Dai grafici risulta che, la presenza dei muoni non alteri di molto l'energia ϵ ,

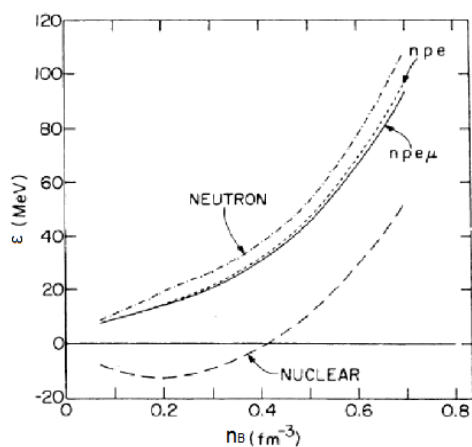


Figura 1.1: Energia per nucleone[?], per la materia nucleare, neutronica e in equilibrio β nel caso in cui siano presenti solo elettroni o elettroni e muoni

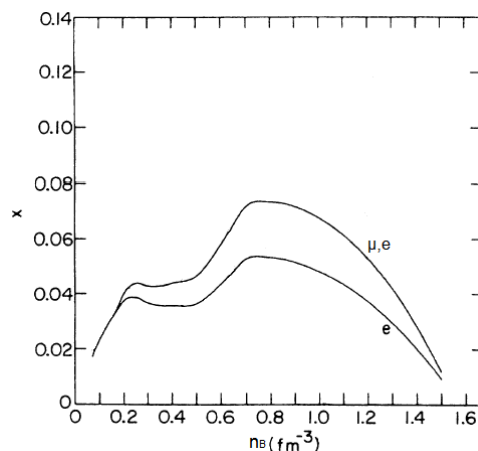


Figura 1.2: Concentrazione x dei protoni i funzione della densità[?], con elettroni e muoni (curva superiore) e con soli elettroni (curva inferiore), per la materia β stabile

la frazione dei protoni decresca sino ad annullarsi, per valori della densità che superano n_o . L'energia della materia β stabile è molto vicina a quella della materia neutronica. Il core della stella diventa perciò sempre più ricco di neutroni ed in progressiva perdita di protoni, con l'aumentare della densità.

La determinazione dell'equazione di stato per la materia a densità nucleare ed oltre, è resa difficile sia dalla complessità delle interazioni che sussistono tra i nucleoni che dalle approssimazioni che si usano per studiarle nell'ambito della teoria a molti corpi. Alcuni vincoli sull'equazioni di stato, possono essere imposti da considerazioni svolte sulle forze nucleari che agiscono nella materia, come vedremo nel prossimo paragrafo.

Un'utile approssimazione è quella di considerare i nucleoni come particelle non relativistiche, cioè utilizzando il limite non relativistico $p_f/m_n \ll c$, dove $m_n = 1.67 \times 10^{-24}g$ è la massa del nucleone, $c \cong 300000km/s$ è la velocità della luce e p_f è l'impulso di Fermi per i nucleoni. La validità di tale ipotesi può essere verificata facilmente utilizzando la relazione tra impulso e densità per particelle fermioniche

$$p_f = (3\pi^2)^{1/3} n^{1/3} \hbar, \quad (1.24)$$

dove \hbar è la costante di Planck, circa $1,054 \times 10^{-27} erg \cdot s$. In base alla (1.24) abbiamo un limite superiore per la densità, entro il quale l'ipotesi risulta

consistente

$$n \ll \frac{(m_n c)^3}{(3\pi)^2 \hbar^3} \approx 10^{39} \text{ cm}^{-3}, \quad (1.25)$$

quindi per densità molto ρ minori di 10^{15} g/cm^3 .

1.2 Forze nucleari

Lo studio delle proprietà osservate dei nuclei atomici consente di dedurre particolari caratteristiche del potenziale nucleone-nucleone (NN).

- La proprietà di saturazione della densità nucleare, Fig(1.3), cioè il fatto che la densità all'interno dei nuclei atomici sia costante e indipendente dal numero di massa A , ci dice che non è possibile che due nucleoni si trovino più vicini di una certa distanza r_c , cioè la forza nucleare ha un core repulsivo. In termini di potenziale v ciò implica che

$$v(\mathbf{r}) > 0 \quad r < r_c, \quad (1.26)$$

- L'energia di legame per nucleone $B(A, Z)^1$, cioè l'energia necessaria per sottrarre un nucleone dal nucleo, è definita come la differenza tra la somma delle masse dei nucleoni costituenti e la massa del nucleo, divisa per A

$$\frac{B(A, Z)}{A} = \frac{1}{A} [Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z)]. \quad (1.27)$$

La dipendenza dell'energia di legame da A, Z , è ben descritta dalla formula semiempirica delle masse, Fig.(4.5)

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A (A - 2Z)^2 + \lambda a_p \frac{1}{A + 1/2}. \quad (1.28)$$

I primi due termini sono chiamati rispettivamente termini di volume e di superficie, essi tengono conto del contributo delle interazioni forti che hanno luogo nel volume e sulla superficie. Il terzo termine descrive la repulsione elettrostatica tra i protoni, mentre il quarto è un termine di simmetria, che si annulla per nuclei con $Z = A/2$. Esso riflette il fatto che i nuclei con piccole disparità tra A e Z sono più favoriti energeticamente. Infine, l'ultimo termine tiene conto del fatto che, i nuclei

¹ Z rappresenta il numero atomico, ossia il numero di protoni del nucleo

pari-pari ($A-Z$ pari, Z pari) siano più stabili di quelli pari-dispari e dispari-dispari. Spegnendo il termine coulombiano, trascurando quello proporzionale a λ , considerando la materia simmetrica, cioè $Z = A/2$, si ha che per grandi A rimane solo il termine di volume, il cui valore è costante e circa uguale a 16Mev . Le proprietà empiriche della materia simmetrica all'equilibrio, sono quindi

$$n = n_o = 0.16\text{fm}^{-3}, \quad \epsilon_o = \frac{E(n_o)}{A} \cong 16\text{Mev}. \quad (1.29)$$

Intorno al punto d'equilibrio ϵ_o possiamo compiere uno sviluppo di Taylor

$$\epsilon(n) \cong \epsilon_o + \frac{1}{2} \frac{K}{9} \frac{(n - n_o)^2}{n_o^2}, \quad (1.30)$$

dove K è la compressibilità, definita come

$$K = 9n_o^2 \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial n^2} \right)_{n=n_o} = 9 \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{n=n_o}, \quad (1.31)$$

e P è la pressione.

Tramite misure su nuclei pesanti, sono stati ottenuti valori di K compresi tra 200 e 300 MeV. Un'equazione di stato realistica deve quindi predire valori di K compresi in questo range.

Va inoltre notato che, il fatto che l'energia di legame per nucleone, rimanga all'incirca costante per $A > 20$, implica che la forza abbia un range finito

$$v(\mathbf{r}) = 0 \quad r > r_o. \quad (1.32)$$

- Gli spettri dei nuclei con stesso numero di massa A , ma con numeri atomici che differiscono dell'unità, ad esempio ${}^7_{15}\text{N}(A = 15, Z = 7)$ ${}^8_{15}\text{O}(A = 15, Z = 8)$ sono molto simili. Ad esempio, hanno gli stessi valori per i livelli energetici degli stati con stessa parità e momento angolare, a meno di piccole correzioni elettromagnetiche. Questo prova che protone e neutrone hanno le stesse interazioni, quindi la forza nucleare è indipendente dalla carica elettrica.

La simmetria di carica è una manifestazione di una proprietà più generale delle della interazioni NN, la simmetria rispetto le trasformazioni nello spazio dello spin isotopico, o isospin.

Il neutrone ed il protone, una volta trascurata la loro differenza di massa

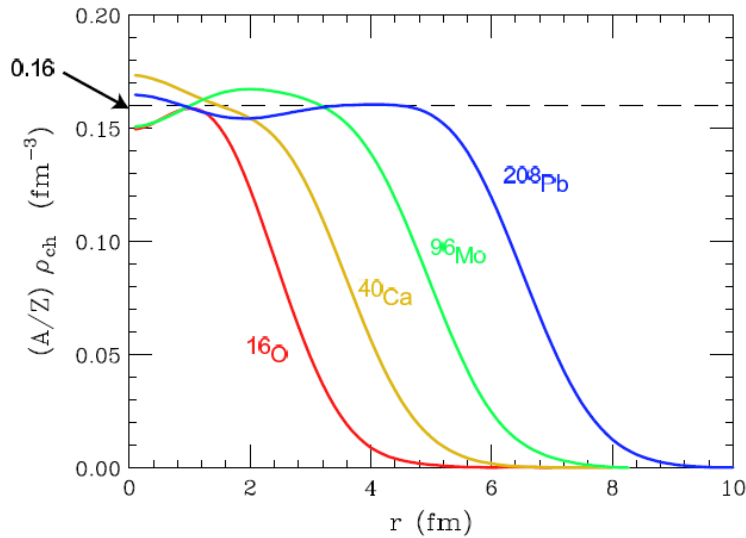


Figura 1.3: Saturazione della densità nucleare, misurata tramite scattering elastico di elettroni su nuclei

che equivale ad una parte su mille, possono essere considerate come la stessa particella, il nucleone N , in due stati diversi di isospin. Il nucleone può essere descritto da un vettore nello spazio dell'isospin

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

dove p e n sono i quadri-spinori che descrivono il protone ed il neutrone e da una densità di lagrangiana

$$l_D = \bar{N} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N) N, \quad (1.34)$$

invariante per trasformazioni globali di fase

$$U = e^{i\alpha_i \tau_i}, \quad (1.35)$$

dove le matrici τ sono quelle di Pauli, agenti sul nucleone (1.33). Il doppietto N nello spazio I , corrisponde alla proiezione $+1/2$ e $-1/2$ dell'isospin, rispettivamente per il protone ed in neutrone. Gli stati di due nucleoni, $|T, T_3\rangle$, possono essere classificati specificando l'isospin totale, T , e la sua terza componente T_3 :

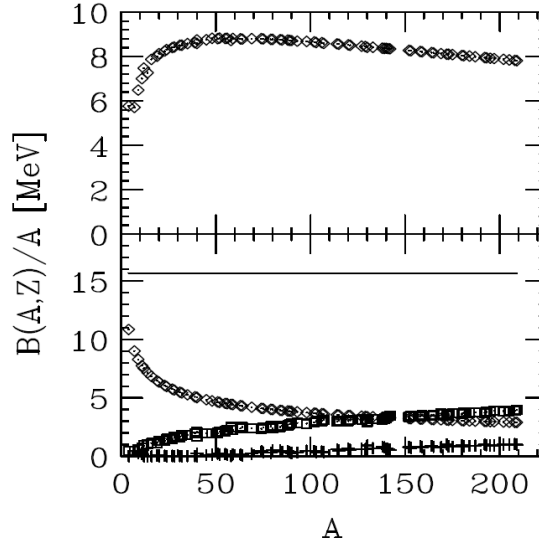


Figura 1.4: Nella parte superiore è mostrata la dipendenza dell'energia di legame per nucleone da A , per i nuclei stabili. Nella parte inferiore si ha: linea continua per il contributo di volume, rombi quadrati e croci rispettivamente per termini di superficie, coulombiano, e di simmetria

$$\begin{aligned}
 |1, 1\rangle &= |pp\rangle, \\
 |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|np\rangle + |pn\rangle), \\
 |1, -1\rangle &= |nn\rangle, \\
 |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|np\rangle - |pn\rangle).
 \end{aligned}
 \tag{1.36}$$

L'invarianza della dinamica nucleare sotto le trasformazioni (1.35) implica che l'interazione tra nucleoni dipende solo da T e non dal valore della sua terza componente.

La forza nucleare inoltre mostra una dipendenza dallo spin totale S . Questo si deduce dallo studio del deuterio, unico stato legato di due nucleoni. Il deuterio è infatti formato da un protone ed un neutrone, con valori di spin ed isospin totali $S = 1$, $T = 0$.

Non esistono stati legati di singoletto, ad esempio uno stato legato di due neutroni. Infatti l'energia minima si ha per $S = 1$, mentre due neutroni che occupano lo stesso stato d'energia possono avere solamente spin totale nullo. Tutto questo è una chiara manifestazione del fatto che le forze nucleari dipendano anche dallo spin.

Un'altra importante caratteristica del potenziale NN può essere dedotta stu-

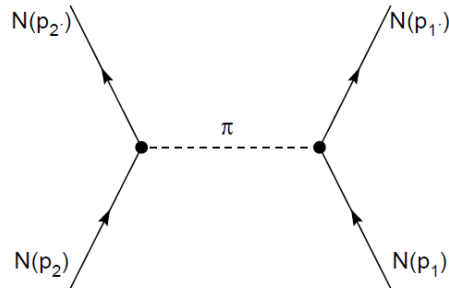


Figura 1.5: Diagramma di Feynman per lo scambio di un pione

diando la distribuzione di carica del deuterio. Quello che si riscontra è che esso possiede un momento di quadrupolo elettrico, che segnala una distribuzione di carica non sfericamente simmetrica. Quindi le forze nucleari hanno una componente non centrale..

1.3 Il sistema a due nucleoni

Le proprietà del potenziale NN[?] possono essere dedotte, oltre che dallo studio del sistema legato del deuterio, anche dai processi di scattering.

Ad oggi sono disponibili più di 4000 dati sperimentali accurati, per energie che vanno fino a 350Mev nel sistema di laboratorio (energia di soglia per la produzione di pioni).

La prima trattazione teorica del potenziale NN, fu svolta dal fisico giapponese H. Yukawa nel 1935[?]. Egli fece l'ipotesi che l'interazione NN fosse mediata da una particella di massa μ , legata al raggio d'interazione dalla

$$\mu \sim 1/r, \quad (1.37)$$

Sostituendo $r \sim 1\text{fm}$, si ottiene una massa $\mu \sim 200\text{Mev}$. La particella mediatrice di tale forza fu identificata col mesone π , il pione, di massa $m_\pi \simeq 147\text{Mev}$ scoperto nel 1947. Gli esperimenti mostrano che il pione è una particella pseudo-scalare di spin nullo, cioè la sua spin parità è 0^- . Può esistere in tutti e tre gli stati di carica elettrica π^+ , π^0 , π^- e viene identificato come un tripletto, $T = 1$ nello spazio dello spin isotopico, con proiezioni $T_3 = +1, 0, -1$.

Il termine di accoppiamento più semplice tra pioni e nucleone, compatibile con la conservazione della parità da parte delle forze nucleari, è della forma $ig\bar{N}\gamma^5\tau_i N\pi^i$. Con tale accoppiamento, l'ampiezza per il processo di scambio

di un pione ad opera di due nucleoni mostrato i Fig.(1.5) si può scrivere utilizzando le regole per i diagrammi di Feynman

$$\langle f | M | i \rangle = -ig^2 \frac{\bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_5 u(p_2, s_2) \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_5 u(p_1, s_1)}{k^2 - m_\pi^2} \langle \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \rangle, \quad (1.38)$$

dove $k = p'_1 - p_1 = p'_2 - p_2$, $k^2 = k_\mu k^\mu$, mentre $u(p, s)$ rappresenta lo spinore di Dirac associato ad un nucleone di momento $p = (E, \mathbf{p})$ e proiezione di spin s , mentre

$$\langle \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \rangle = \eta_2^+ \boldsymbol{\tau} \eta_2 \eta_1^+ \boldsymbol{\tau} \eta_1 \quad (1.39)$$

dove η_i è lo spinore di Pauli che descrive l'isospin della particella i . Nel limite non relativistico, la teoria di Yukawa predice un potenziale d'interazione v_π che nelle coordinate spaziali ha la seguente espressione

$$\begin{aligned} v_\pi &= \frac{g^2}{4m_N^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \\ &= \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{m_\pi^3}{4m_N^2} \frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \left\{ \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + S_{12} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \right] \frac{e^{-x}}{x} - \right. \\ &\quad \left. \frac{4\pi}{m_\pi^3} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \right\}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

dove $x = m_\pi r$ e

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2), \quad (1.41)$$

è la parte non centrale dell'interazione. Ad esempio, il suo valor medio nello stato di due neutroni è

$$\langle \uparrow(1) \uparrow(2) | S_{12} | \uparrow(1) \uparrow(1) \rangle = 3 \cos^2(\theta) - 1, \quad (1.42)$$

dove θ è l'angolo tra \mathbf{r} e l'asse di quantizzazione dello spin.

Il potenziale descritto con lo scambio di un pione, riproduce bene i dati disponibili per l'interazione a lungo raggio ($r > 1.5 fm$) della forza NN.

A distanze intermedie o a corto raggio, devono essere tenuti in conto fenomeni più complessi, come lo scambio di più pioni, o di particelle più massive, come ρ e ω , dove $m_\rho = 770 Mev$ e $m_\omega = 782 Mev$. Inoltre, per distanze $\sim 0.5 fm$ i nucleoni non possono essere più considerati come particelle puntiformi (si veda la Fig.(1.6)), e le loro interazioni devono essere descritte in termini dei quark e gluoni come espresso dal formalismo della QCD.

Fenomenologicamente, il potenziale NN può essere scritto come somma di contributi che tengono presenti le interazioni a diverse distanze

$$v = \bar{v}_\pi + v_{I,s} \quad (1.43)$$

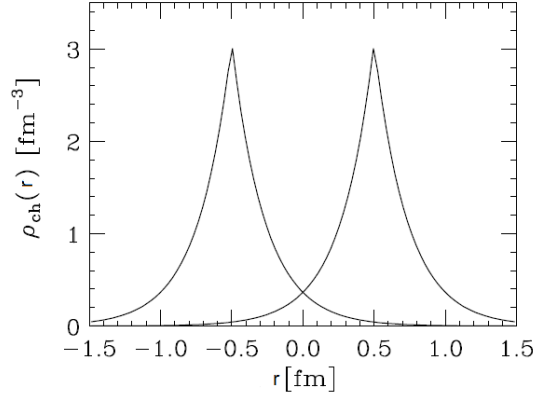


Figura 1.6: Distribuzione di carica di due protoni i cui centri sono a distanza di 1 fm , ottenuta dallo scattering elastico elettrone-protone, per $q_o = 0.84 \text{ Gev}$. Si nota come a distanze di $\simeq 1 \text{ fm}$ la sovrapposizione delle funzioni d'onda è piccola e le particelle possono essere considerate puntiformi

dove \bar{v}_π è il potenziale generato dallo scambio di un singolo pione come nella (1.40), privato però del contributo del termine con la delta, mentre $v_{I,s}$, tiene descrive le interazioni a distanze intermedie e corte.

La dipendenza da spin ed isospin, come la natura non centrale della forza NN, può essere descritta riscrivendo (1.43) come

$$v_{ij} = \sum_{T,S} [v_{TS}(r_{ij}) + \delta_{S1} v_{tT}(r_{ij}) S_{12}] P_S \Pi_T, \quad (1.44)$$

dove S e T rappresentano lo spin e l'isospin totale della coppia interagente, mentre P_S e Π_T sono i proiettori di spin e isospin rispettivamente, dati da

$$P_0 = \frac{1}{4}(1 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2), P_1 = \frac{1}{4}(1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2), \quad (1.45)$$

e similmente per il proiettore Π , mentre le funzioni $v_{TS}(r_{ij})$ e $v_{tT}(r_{ij})$ descrivono la dipendenza radiale del potenziale, nei diversi canali di spin-isospin.

Utilizzando la definizioni degli operatori P_S e Π_T possiamo riscrivere il potenziale NN nella forma

$$v_{ij} = \sum_{n=1}^6 v^{(n)}(r_{ij}) O_{ij}^{(n)}, \quad (1.46)$$

dove

$$\begin{aligned} O_1 &= 1, O_2 = (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2), O_3 = (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2), \\ O_4 &= (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2), O_5 = S_{12}, O_6 = S_{12}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2), \end{aligned} \quad (1.47)$$

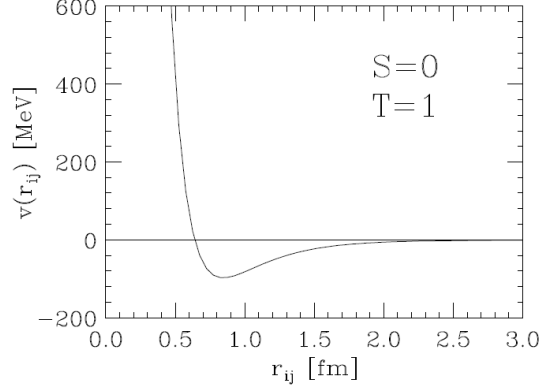


Figura 1.7: Dipendenza radiale del potenziale d'interazione tra due nucleoni, con momento angolare relativo nullo, $S = 0$ e $T = 1$

mentre le $v^{(n)}(r_{ij})$ sono combinazioni lineari di $v_{TS}(r_{ij})$ e $v_{tT}(r_{ij})$.

Il potenziale scritto in termini di questi sei operatori, riproduce bene i dati relativi al deuterio, in quanto il neutrone ed il protone si trovano a distanze abbastanza grandi, tali che la loro interazione è descrivibile dallo scambio di un solo pione. Per descrivere i dati relativi ai processi di scattering, è necessario introdurre altri operatori

$$O^{7,8} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \otimes [1, (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)], \quad (1.48)$$

dove \mathbf{L} è il momento angolare totale. Il termine spin-orbita $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$, emerge dal calcolo dell'ampiezza tipo (3.30) per accoppiamenti tra il mediatore scambiato e i nucleoni, di tipo vettoriale o scalare.

Fit ancora più precisi dei dati sperimentali, $\chi^2/dato \sim 1$, si hanno estendendo il numero di operatori considerati nella parametrizzazione del potenziale NN, fino ad arrivare a potenziali con 14 o 18 operatori

$$\begin{aligned} O_{ij}^{9,\dots,14} &= (\mathbf{L}^2, (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})^2, \mathbf{L}^2(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j)) \otimes (1, \boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j) \\ O_{ij}^{15,\dots,18} &= [1, (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j), S_{ij}] \otimes T_{ij}, (\tau_{zi}, \tau_{zj}), \end{aligned} \quad (1.49)$$

dove

$$T_{ij} = \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\tau}_j \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j). \quad (1.50)$$

1.4 Materia nucleare

Le interazioni tra più nucleoni non possono essere schematizzate iterando un potenziale NN a due corpi. Alcuni processi, degli esempi sono riportati in

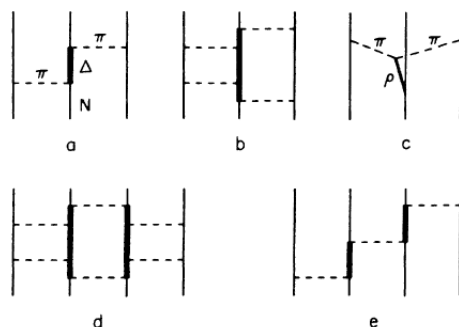


Figura 1.8: Diagrammi rappresentanti processi che contribuiscono al potenziale a molti corpi

Fig(1.8), necessitano che si tenga conto dell'interazione a tre corpi.

Ad esempio lo stato fondamentale del ${}^3\text{He}$ con un potenziale NN, ha energie $E_o = 7.6\text{Mev}$ mentre sperimentalmente si trova $E_o^{exp} = 8.48\text{Mev}$. Le correzioni apportate da un potenziale a tre corpi sono piccole $\sim 2/100$, ma sono necessarie per descrivere le proprietà dei nuclei leggeri e la proprietà di saturazione richiesta nella materia nucleare. Il processo più importante di interazione a tre nucleoni, comporta lo scambio di due pioni associato con l'eccitazione di una risonanza del nucleone nello stato intermedio. In generale un potenziale a tra corpi può essere scritto come

$$v_{ijk} = v_{ijk}^{2\pi} + v_{ijk}^R, \quad (1.51)$$

dove il primo contributo del membro di destra riguarda lo scambio di due pioni, mentre il secondo è puramente fenomenologico.

All'interno delle stelle di neutroni, abbiamo un numero di nucleoni $A \sim 10^{57}$. Con un così alto valore del numero di particelle interagenti sarebbe utile una teoria di campo medio. Purtroppo però per una materia molto densa, un simile approccio è questionabile, poichè non tiene conto delle correlazioni a brevi distanze, dovute principalmente alla presenza di un core fortemente repulsivo nel potenziale NN (si veda la Fig.(1.7).

In una teoria a molti corpi non relativistica, la materia nucleare è descrivibile tramite una hamiltoniana del tipo

$$H = \sum_i k_i + \sum_{j>i} v_{ij} + \dots \quad (1.52)$$

dove i puntini indicano la parte del potenziale a più corpi. Una simile hamiltoniana non può essere trattata con le usuali tecniche perturbative, a causa

del core repulsivo presente in v_{ij} . In questo caso l'elemento di matrice

$$\langle \varphi'_1 \varphi'_2 | v_{12} | \varphi_1 \varphi_2 \rangle, \quad (1.53)$$

dove φ_i sono gli stati a una particella del sistema libero, non può essere trattato come una piccola perturbazione.

Nel lavoro che seguirà, la parte non perturbativa del potenziale sarà assorbita nelle funzioni di base del problema, cioè definiremo nuovi stati del sistema, che inglobino delle funzioni di correlazione in grado di rappresentare gli effetti repulsivi a corto raggio, questa è la teoria della base correlata (CBF)[?][?]

Definiamo lo stato correlato, $|n\rangle$ ottenuto a partire da quello del gas di Fermi $|n_{fg}\rangle$, cioè il determinante degli stati di singola particella.

$$|n\rangle = \frac{F |n_{fg}\rangle}{\langle n_{fg} | F^\dagger F |n_{fg}\rangle}, \quad (1.54)$$

L'operatore F è l'operatore di correlazione, che può essere scritto

$$F(1, \dots, N) = S \prod_{j>i=1}^N f_{ij} \quad (1.55)$$

dove S è un operatore di simmetrizzazione che tiene conto del fatto che, in generale, f_{ij} non commuta con f_{ik} .

La struttura delle funzioni di correlazione deve dipendere da quella del potenziale NN e possiamo riscriverle (si confronti con la (1.46))

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^6 f^n(r_{ij}) O_{ij}^n. \quad (1.56)$$

Le funzioni $f(r_{ij})$ si ottengono minimizzando il valor medio dell'hamiltoniana nello stato fondamentale della base correlata, che fornisce un limite superiore dell'autovalore E_0 .

$$(0H0) \geq E_0 \quad (1.57)$$

In Fig.(1.9) sono riportati i potenziali d'interazione per nucleoni nella materia nucleare a densità d'equilibrio n_o , in uno stato a $S = 0$, $T = 0$ ed $S = 1$, $T = 0$ con le corrispondenti funzioni di correlazione. Il potenziale utilizzato è quello chiamato Argonne v'_8 . Nel secondo caso i numeri quantici sono quelli del deuterio, la funzione di correlazione ha un massimo a distanza $\simeq 1fm$, dove il potenziale è attrattivo.

Gli stati definiti (1.54) non sono ortogonali ma possono essere ortogonalizzati[?]

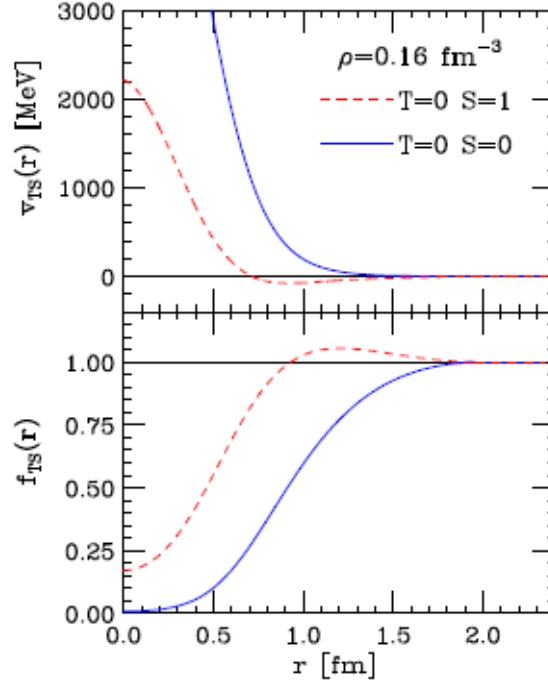


Figura 1.9: Pannello superiore: potenziali d'interazione per nucleoni nella materia nucleare a densità d'equilibrio n_o , in uno stato a $S = 0, T = 0$ ed $S = 1, T = 0$, pannello inferiore: le corrispettive funzioni di correlazione. Il potenziale utilizzato è quello Argonne v'_8

tramite un'apposita trasformazione

$$|n\rangle \rightarrow |\tilde{n}\rangle = \hat{T}|n\rangle, \quad (1.58)$$

con

$$\langle \tilde{n} | H | \tilde{n} \rangle = \langle n | H | n \rangle. \quad (1.59)$$

1.5 Espansione in cluster e potenziale effettivo

L'operatore F definito nella (1.55) ha la proprietà che se un sottoinsieme di particelle, diciamo i_1, \dots, i_p , viene portato a distanze grandi dalle rimanenti i_{p+1}, \dots, i_N , si fattorizza secondo la

$$F(1, \dots, N) = F_p(i_1, \dots, i_p) F_{N-p}(i_{p+1}, \dots, i_N). \quad (1.60)$$

La precedente proprietà è alla base del formalismo d'espansione in cluster[?], che ci permette di esprimere gli elementi di matrice di un operatore in una

teoria a molti corpi su stati correlati, come somma di contributi di sottosistemi isolati, riguardanti un numero di costituenti crescente.

Questo discorso vale naturalmente anche per l'operatore H . Perciò possiamo scrivere

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = T_o + (\Delta E)_2 + (\Delta E)_3 + \dots + (\Delta E)_N. \quad (1.61)$$

Definiamo ora un potenziale efficace, tale che

$$\langle H \rangle = \langle 0_{fg} | T_o + V_{eff} | 0_{fg} \rangle. \quad (1.62)$$

Sviluppando in clusters il membro di sinistra otteniamo la definizione di V_{eff} ad ogni ordine dell'espansione. Se consideriamo solo in contributo dei clusters di due nucleoni troviamo

$$\begin{aligned} \langle 0_{fg} | V_{eff} | 0_{fg} \rangle &= \sum_{i < j} \langle ij | v_{eff} | ij \rangle_a = \\ &= \sum_{i < j} \langle ij | f_{ij} \left[\frac{-1}{m} (\nabla^2 f_{ij}) - \frac{2}{m} (\nabla^2 f_{ij}) \cdot \nabla + v_{ij} f_{ij} \right] | ij \rangle_a, \end{aligned} \quad (1.63)$$

dove il pedice a , ci ricorda che lo stato di due particelle deve essere antisimmetrizzato. Notiamo che il potenziale v_{eff} ha una dipendenza dal momento, dovuta all'operatore $(\nabla^2 f_{ij}) \cdot \nabla$. Tuttavia il contributo di tale termine all'energia risulta essere molto piccolo, e può essere trascurato. Di conseguenza il potenziale effettivo è dato dalla parte statica, indipendente dagli impulsi, cioè

$$v_{eff} = f_{ij} \left[\frac{-1}{m} \nabla^2 + v_{ij} \right] f_{ij} = \sum_n v_{eff}^n O_{ij}^n. \quad (1.64)$$

Questa definizione di v_{eff} data sopra, non tiene conto dell'interazione a tre corpi, che è necessaria per descrivere sia l'energia di legame dei sistemi a pochi nucleoni che le proprietà di saturazione della materia nucleare. Per ovviare a tale problema, il contributo dato dall'interazione a tre corpi, è stato incluso modificando il potenziale efficace NN a distanze intermedie, dove si ritiene che lo scambio di due pioni con eccitazione della risonanza Δ nello stato intermedio sia il meccanismo d'interazione dominante. Trascurando, per semplicità, la rottura di simmetria di carica, il potenziale risultante può essere scritto come

$$\tilde{v}(ij) = \sum_n [v_\pi^n(r_{ij}) + v_I^n(r_{ij})e^{-\gamma_1 \rho} + v_s^n(r_{ij})] O_{ij}^n, \quad (1.65)$$

dove ρ è la densità mentre v_π^n , v_I^n e v_s^n denotano il potenziale a lungo raggio (scambio di un pione), a distanze intermedie e corte. Si aggiunge inoltre un

Figura 1.10: Confronto tra le componenti del potenziale Argonne $v8'$, (linee continue) e il potenziale efficace definito dall'equazione (1.64) (rombi), calcolati alla densità d'equilibrio della materia nucleare.

piccolo contributo attrattivo all'energia

$$\Delta E = \gamma_2 \rho^2 (3 - 2\beta^2) e^{-\gamma_3 \rho}, \quad (1.66)$$

dove $\beta = (\rho_p - \rho_n) / (\rho_p + \rho_n)$, dove ρ_p e ρ_n denotano le densità di protoni e neutroni. I valori dei parametri γ_1, γ_2 e γ_3 , sono determinati in maniera da riprodurre l'energia di legame e la densità d'equilibrio della materia nucleare. In Fig.(1.10) si confrontano le componenti corrispondenti ai sei operatori O^n dati in 1.47 del potenziale effettivo utilizzato in questa tesi[?], a densità d'equilibrio $0.16 fm^{-3}$, rispetto un potenziale Argonne $v8'$ troncato a sei componenti, che non tenga conto, come quello effettivo, delle correlazioni tra i nucleoni. Si può vedere come l'effetto di schermo dovuto alle correlazioni NN, comporti una riduzione dell'effetto repulsivo a breve distanza.

Capitolo 2

Interazione dei neutrini con la materia di neutroni

2.1 Scattering neutrino su neutroni non relativistici

In questo paragrafo calcoleremo la probabilità di scattering, per un neutrino al passaggio nella composta da soli neutroni. Tali processi di scattering sono molto importanti all'interno delle stelle di neutroni, rappresentando la fonte principale d'opacità del mezzo stellare. Il risultato che ricaveremo sarà espresso in termini di certe funzioni, i fattori di forma, che racchiudono in sé tutta l'informazione sullo stato in cui si trova la materia al momento del passaggio del neutrino. Come vedremo nel prossimo capitolo, i fattori di forma possono essere calcolati una volta noti certi parametri che caratterizzano le interazioni tra i nucleoni.

L'interazione tra il neutrino ed il nucleone, è descritta tramite lo scambio del bosone neutro Z di massa $\simeq 91\text{Gev}$, tra le correnti deboli del leptone e del nucleone l_μ, J_μ , (Fig.2.1). La lagrangiana d'interazione sarà data da

$$L_{Int}(x) = \frac{g}{2} [l_\mu(x)Z(x)^\mu + J_\nu(x)Z^\nu(x)], \quad (2.1)$$

con

$$\begin{aligned} l_\mu &= \frac{1}{2}\overline{\psi}_l(q', r')\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\psi_l(q, r), \\ J_\nu &= \overline{\psi}_n(s', p')(J_\nu^V - J_\nu^A)\psi_n(s, p), \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove r, r', s, s' denotano gli spin iniziali e finali per il leptone ed il neutrone, q, q', p, p' i loro quadrimpulsi e g è una costante che fissa l'intensità dell'interazione.

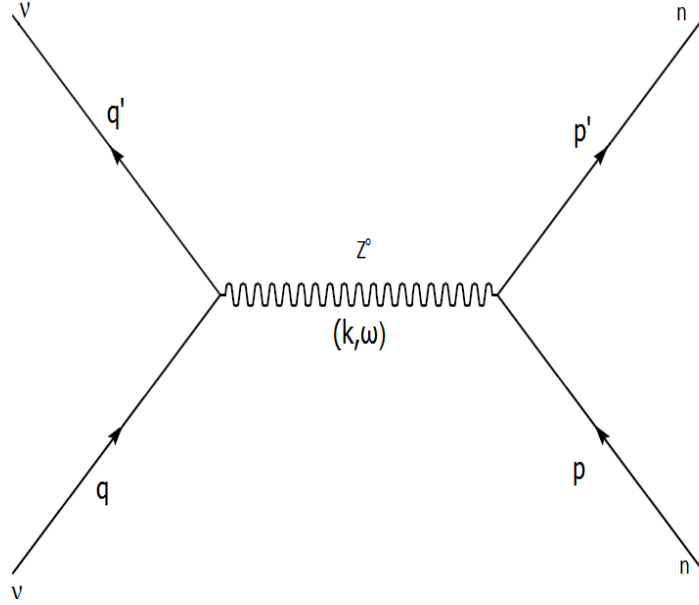


Figura 2.1: Rappresentazione mediante diagramma di Feynman, al primo ordine della teoria perturbativa.

L'espressione dei campi ψ , sotto forma di trasformata di Fourier relativa ai quadrimpulsi delle particelle, è data da

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{m_i}{E_p V}} \sum_s \int dp^4 [a_i(s, p) u_i(s, p) e^{-ipx} + b_i^+(s, p) v_i(s, p) e^{ipx}], \quad (2.3)$$

dove $i = \nu, n, n'$, $E_p^2 = m^2 + p^2$ è l'energia relativa all'impulso p , e V è il volume d'interazione

Come prima considerazione da fare, specifichiamo meglio le differenze tra i termini che compaiono nelle espressioni formali della corrente leptonica ed adronica. Entrambe presentano una parte vettoriale ed una assiale. Per il leptone queste sono date rispettivamente da γ_μ e $\gamma\gamma_5$, per il neutrone invece, le loro espressioni tramite le matrici di Dirac sono più complicate e necessitano di essere parametrizzate mediante opportune funzioni. Questa complicazione nel caso della corrente neutronica, si spiega tenendo conto che il neutrino ed i leptoni relativistici, sono particelle elementari entrambi con un valore dell'elicità ben definito; cioè con un valore preciso della proiezione dello spin sul vettore impulso. Per provare questo, definiamo gli operatori Λ_+ , Λ_- che proiettano gli spinori sugli stati ad elicità positiva e negativa:

$$\Lambda_+ = \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad (2.4)$$

$$\Lambda_- = \frac{1 - \gamma_5}{2}. \quad (2.5)$$

Sappiamo che un generico spinore u , può essere decomposto sugli autostati d'elicità tramite tali proiettori

$$u = \Lambda_+ u + \Lambda_- u = u_+ + u_-, \quad (2.6)$$

dove u_+ e u_- , sono gli spinori ad elicità positiva e negativa. La polarizzazione β di una particella è data da

$$\beta = \frac{|u_+|^2 - |u_-|^2}{|u_+|^2 + |u_-|^2} = \frac{p}{E}. \quad (2.7)$$

Si vede quindi che il neutrino ha elicità definita, essendo la sua energia pari all'impulso, mentre l'elicità dell'elettrone sarà tanto meglio definita quanto più è relativistico.

Per quanto riguarda i nucleoni, questi non sono particelle elementari ma sono costituiti da quark. Per conoscere lo spin del nucleone e la sua elicità, dobbiamo conoscere la distribuzione dello spin dei quark. Senza andare a scrivere la teoria trattando direttamente questi gradi di libertà fondamentali della materia, che nella nostra approssimazione di bassi impulsi trasferiti non possono essere distinti, ($\Delta x \Delta q \sim h/2\pi$), possiamo considerare di utilizzare dei fattori di forma, che parametrizzino la distribuzione spaziale della carica elettrica e del momento di spin, per le particelle nucleari. Questi fattori di forma andranno inseriti in J_V^μ e in J_A^μ .

All'interno della parte vettoriale J_V^μ potremmo scrivere, in forma del tutto generale, i quadrivettori

$$\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} k_\nu, k^\mu, p'^\mu + p^\mu, \sigma^{\mu\nu} (p'_\nu + p_\nu), \quad (2.8)$$

dove k_μ è il quadripulso trasferito. Le precedenti espressioni non sono indipendenti, poichè esistono delle identità che le mettono in relazione

$$\frac{p'^\mu + p^\mu}{m_N} \bar{u}(p') u(p) + \frac{i}{2m_N} \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} k_\nu u(p) = \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p), \quad (2.9)$$

$$k^\mu \bar{u}(p') u(p) + \frac{i}{2m_N} \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} (p'_\nu + p_\nu) u(p) = 0. \quad (2.10)$$

Quindi possiamo limitarci a scrivere

$$J_V^\mu = A\gamma^\mu + B\sigma^{\mu\nu} k_\nu + Ck^\mu. \quad (2.11)$$

Poichè la corrente vettoriale deve essere conservata, $k_\mu J^\mu = Ck^2 = 0 \rightarrow C = 0$. Inoltre la richiesta che i termini nella (2.11) si trasformino come

dei quadrivettori, implica che A e B siano degli scalari di Lorentz, e siano perciò funzioni di un'invariante relativistico; escludendo m_N^2 che è una forma triviale, dove m_N è la massa del neutrone, rimane solo k^2 .

Quindi scriviamo, rispettivamente per la parte vettoriale ed assiale della corrente adronica:

$$J_V^\mu = F_1(k^2) \gamma^\mu + F_2(k^2) \frac{i}{2m_N} \sigma^{\mu\nu} k_\nu \quad (2.12)$$

$$J_A^\mu = \gamma^\mu \gamma^5 F_3(k^2). \quad (2.13)$$

Se il quadrimpulso trasferito nell'urto fosse piccolo rispetto le scale d' energia presenti nel processo, cioè la massa del nucleone, il termine proporzionale a F_2 si annullerebbe, inoltre utilizzando

$$F_1(k^2 \cong 0) = 1, \quad (2.14)$$

$$F_3(k^2 \cong 0) = C_A, \quad (2.15)$$

con $C_A \simeq 1.25$, otteniamo la forma della corrente data da

$$J_\nu = \bar{\psi}_n(s', p') \gamma_\nu (1 - C_A \gamma_5) \psi_n(s, p). \quad (2.16)$$

Per quanto detto nel primo capitolo, fino a densità $\simeq 2n_o$ possiamo considerare i nucleoni come particelle non relativistiche. In questo caso possiamo scrivere

$$\bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n \rightarrow \frac{p}{m} \cong 0 \quad \psi_n^+ \psi_n \delta_o^\mu, \quad (2.17)$$

$$\bar{\psi}_n \gamma^\mu \gamma^5 \psi_n \rightarrow \frac{p}{m} \cong 0 \quad \psi_n^+ \sigma^i \psi_n \delta_i^\mu. \quad (2.18)$$

Definiamo lo stato iniziale e finale del processo, come

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |\nu_l, n\rangle, \\ |f\rangle &= |\nu_l', n'\rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La probabilità W_{fi} , è data dal modulo quadro dell'elemento di matrice di scattering S , divisa per il tempo d'interazione T e flusso di particelle ϕ , moltiplicata per il volume dello spazio delle fasi $\rho(\mathbf{q})$ disponibile per le particelle nello stato finale.

$$W_{fi} = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{T\phi} \rho(\mathbf{q}). \quad (2.20)$$

Per calcolare l'elemento di matrice $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$ utilizziamo la formula di Dyson

$$\langle f|S|i\rangle = S_{fi} = \frac{i^n}{n!} \int dx_1^4 \dots dx_n^4 \langle f|T \{L_{Int}(x_1) L_{Int}(x_2) \dots L_{Int}(x_n)\} |i\rangle. \quad (2.21)$$

Andando a sostituire le (2.1) e (2.2) nella precedente espressione, e prendendo solo le correnti che possono connettere lo stato iniziale e quello finale, si ottiene al secondo ordine in g

$$S_{fi} = \frac{-g^2}{8} \int dx^4 dy^4 \langle \nu | l_\mu(x) | \nu \rangle \langle n | J_\nu(y) | n' \rangle \times \langle 0 | T \{ Z^\mu(x) Z^\nu(y) \} | 0 \rangle. \quad (2.22)$$

Possiamo scrivere il propagatore del campo Z , in maniera esplicita sfruttando l'approssimazione di bassi impulsi trasferiti, $k^2 = |\vec{k}|^2 \ll M_Z^2$. In tale approssimazione abbiamo un'iterazione puntuale nello spazio delle coordinate

$$\begin{aligned} \langle 0 | Z^\mu(x) Z^\nu(y) | 0 \rangle &= \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2}}{k^2 - M_Z^2} e^{-ik(x-y)} \\ &\sim \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{M_Z^2} e^{-ik(x-y)} = \frac{-g^{\mu\nu}}{M_Z^2} \delta^{(4)}(x-y). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Una volta sostituite l'espressioni esplicite delle correnti e dei campi, gli elementi di matrice diventano

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{m_\nu m_n g^2 g^{\mu\nu}}{16V^2 M_Z^2} \sqrt{\frac{1}{E_q E_p E_{q'} E_{p'}}} \bar{\nu}(r', q') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu(r, q) \\ &\times \bar{n}(s', p') \gamma_\nu (1 - C_A \gamma_5) n(s, p) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q), \end{aligned} \quad (2.24)$$

dove $\bar{\nu}, \nu$ sono gli spinori relativi al neutrino finale ed iniziale, \bar{n}, n quelli relativi ai nucleoni. Nella precedente formula si è trattato il neutrino come una particella di Dirac massiva. Nel modello standard il neutrino è privo di massa, ma come vedremo la dipendenza da questa si semplificherà nei calcoli che effettueremo.

Quando svolgiamo il quadrato di S_{fi} , la delta ci porta un fattore moltiplicativo Γ , che rappresenta la regione dello spazio-tempo in cui avviene il processo, cioè $\Gamma = VT$. Quindi

$$|S_{fi}|^2 = TV \left(\frac{m_\nu m_n G_f}{2\sqrt{2}V^2} \sqrt{\frac{1}{E_q E_p E_{q'} E_{p'}}} \right)^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q) |M_{fi}|^2, \quad (2.25)$$

dove

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= \sum_{r, r'} \left| \left[\nu(q', r')^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu(q, r) g^{\mu\nu} \right] \right. \\ &\times \left. \left[n(p', s')^\dagger \gamma_0 \gamma_\nu (1 - C_A \gamma_5) n(p, s) \right] \right|^2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

e $G_F/\sqrt{2} = g^2/8M_Z^2$.

Riscrivendo $\phi = 1/V$, abbiamo che la (2.20) diventa

$$W_{fi} = V^{-2} \frac{m_\nu^2 m_n^2 G_f^2}{8E_q E_p E_{q'} E_{p'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q) |M_{fi}|^2 \rho(\mathbf{q}). \quad (2.27)$$

Prima di continuare con il calcolo di $|M_{fi}|^2$, notiamo che la (2.27) contiene al suo interno il principio d'esclusione di Pauli, per i nucleoni.

Infatti il fattore moltiplicativo ρ rappresenta lo spazio delle fasi accessibile al sistema nello stato finale del processo. Perciò la probabilità è proporzionale allo spettro delle eccitazioni possibili. Precisamente ρ è data da

$$\rho(\mathbf{q}) = V^3 \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(p) \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} (1 - f(p')) \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}, \quad (2.28)$$

dove $f(p)$ è la distribuzione di Fermi-Dirac

$$f(p) = \left[1 + \exp\left(\frac{E(p) - \mu}{k_B T}\right) \right]^{-1}, \quad (2.29)$$

dove μ è il potenziale chimico dei neutroni e k_B è la costante di Boltzmann. La distribuzione $f(p)$ per temperature nulle si riduce ad una funzione gradino $f(p) = \theta(p_f - p)$, dove

$$\theta(x) := \begin{pmatrix} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

e p_f è legato alla densità n del gas, dalla formula

$$p_f = (3\pi^2 n)^{1/3} \hbar. \quad (2.31)$$

Procediamo ora al calcolo dello scalare $|M_{fi}|^2$, utilizzando i limiti non relativistici (2.17) e (2.18) ed inseriamoli nella (2.26)

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= \sum_{r,r'} \left| \left[\nu(q', r')^+ \gamma_0 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu(q, r) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[n(p', s')^+ (g^{\mu 0} - C_A \sigma_i g^{\mu i}) n(p, s) \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Considerando la forma del tensore metrico $g^{\mu\nu}$, si ha che l'unico termine della parte vettoriale diverso da zero, è quello con $\mu = 0$. Similmente, per la parte assiale dovremo prendere $\mu = i$, ottenendo così

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= \sum_{r,r'} \left| \nu(q', r')^+ (1 - \gamma_5) \nu(q, r) n(p', s')^+ n(p, s) \right. \\ &\quad \left. + C_A \nu(q', r')^+ \gamma_0 \gamma_i (1 - \gamma_5) \nu(q, r) n(p', s')^+ \sigma_i n(p, s) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Quando svolgiamo il modulo quadro, i termini proporzionali a C_A si annullano, troviamo così

$$|M_{fi}|^2 = \sum_{r,r'} \{ (\nu'^+ (1 - \gamma_5) \nu \nu^+ (1 - \gamma_5) \nu) (n'^+ n n^+ n') + C_A^2 (\nu'^+ \gamma_0 \gamma_i (1 - \gamma_5) \nu \nu^+ \gamma_0 \gamma_j (1 - \gamma_5) \nu') (n'^+ \sigma_i n n^+ \sigma_j n') \}, \quad (2.34)$$

dove gli spinori del neutrino e del neutrone, sono stati indicati con le lettere relative alle stesse particelle, cioè n, n' per il neutrone iniziale e finale, mentre ν, ν' per il neutrino.

Possiamo ora scrivere

$$W_{fi} = n \frac{V G_f^2 m_\nu^2 m_n^2}{4 E_q E_{q'} E_p E_{p'}} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \left[(\nu'^+ (1 - \gamma_5) \nu \nu^+ (1 - \gamma_5) \nu') S(\mathbf{k}, \omega) + C_A^2 (\nu'^+ \gamma_0 \gamma_i (1 - \gamma_5) \nu \nu^+ \gamma_0 \gamma_j (1 - \gamma_5) \nu') S_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \right], \quad (2.35)$$

dove n è la densità della materia nucleare¹ mentre

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \frac{V}{N} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(p) \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \times (1 - f(p')) (n'^+ n n^+ n') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q), \quad (2.36)$$

$$S_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{V}{N} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(p) \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \times (1 - f(p')) (n'^+ \sigma_i n n^+ \sigma_j n') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q). \quad (2.37)$$

Nelle precedenti espressioni $S(\mathbf{k}, \omega)$ e $S_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ sono funzioni collegate alla risposta del sistema, rispettivamente alla parte vettoriale ed assiale della corrente del neutrino. Queste quantificano le fluttuazioni della densità di particelle e della densità di spin nella materia neutronica, al passaggio del neutrino. Infatti $S(\mathbf{k}, \omega)$ può essere collegata alla funzione di correlazione della densità di particelle, mentre $S_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ a quella della densità di spin tramite

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \rho(\mathbf{k}, t) \rho(-\mathbf{k}, 0) \rangle \quad (2.38)$$

$$S_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \sigma_i(\mathbf{k}, t) \sigma_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle. \quad (2.39)$$

¹Da non confondere con lo spinore del neutrone, la cui dipendenza è ormai racchiusa nei fattori S ed S

Dove $\rho(\mathbf{k}, t)$ e $\sigma_i(\mathbf{k}, t)$ sono le trasformate di Fourier dell'operatore densità $\psi_n^\dagger \psi_n$ e densità di spin $\psi_n^\dagger \sigma_i \psi_n$. A questo punto rimangono da calcolare solamente le somme sugli spin dei neutrini.

Utilizzando la regola di completezza per gli spinori ad energia positiva relativi a particelle di massa m , data da

$$\sum_r u(r, k) \bar{u}(r, k) = \frac{k^\alpha \gamma_\alpha + m}{2m}, \quad (2.40)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} & \sum_{r, r'} \nu'^+ (1 - \gamma_5) \nu \nu'^+ (1 - \gamma_5) \nu = \\ & \sum_{r, r'} \bar{\nu}' \gamma_0 (1 - \gamma_5) \nu \bar{\nu} \gamma_0 (1 - \gamma_5) \nu = \\ & = Tr(q'^\rho \gamma_\rho \gamma_0 (1 - \gamma_5) q^\sigma \gamma_\sigma \gamma_0 (1 - \gamma_5)) \\ & = \frac{1}{2m_\nu^2} Tr(q'^\rho q^\sigma \gamma_\rho \gamma_0 \gamma_\sigma \gamma_0 (1 - \gamma_5)) \\ & = \frac{1}{2m_\nu^2} Tr(q'^\rho q^\sigma \gamma_\rho (-\gamma_\sigma \gamma_0 + 2g_{\sigma 0}) \gamma_0 (1 - \gamma_5)) \\ & = \frac{1}{2m_\nu^2} Tr(-q'^\rho q^\sigma \gamma_\rho \gamma_\sigma + 2q'^\rho q^\sigma \gamma_\rho g_{\sigma 0} \gamma_0) \\ & = \frac{1}{2m_\nu^2} Tr(-q'^\rho q^\sigma \gamma_\rho \gamma_\sigma + 2q'^0 q^0 \gamma_0 \gamma_0) \\ & = \frac{2}{m_\nu^2} (-(q'q) + 2E_{q'} E_q). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Essendo il quadrivettore $q^\mu = (E_q, E_q \cdot \hat{q})$, otteniamo $q'q = E_{q'} E_q (1 - \cos \theta)$ dove θ è l'angolo che il neutrino entrante forma col neutrino uscente, cioè $\cos \theta = \hat{q}' \hat{q}$. Possiamo perciò scrivere

$$\sum_{r, r'} \bar{\nu}' \gamma_0 (1 - \gamma_5) \nu \bar{\nu} \gamma_0 (1 - \gamma_5) \nu = \frac{2E_q E_{q'}}{m_\nu^2} (1 + \cos \theta). \quad (2.42)$$

Calcoliamo ora l'ultimo termine della somma sugli spin dei neutrini

$$\begin{aligned}
& \sum_{r,r'} \bar{\nu}' \gamma_i (1 - \gamma_5) \nu \bar{\nu} \gamma_j (1 - \gamma_5) \nu = \\
& = \frac{1}{4m_\nu^2} \text{Tr}(q'^\rho \gamma_\rho \gamma_i (1 - \gamma_5) q^\sigma \gamma_\sigma \gamma_j (1 - \gamma_5)) \\
& = \frac{1}{2m_\nu^2} \text{Tr}(q'^\rho \gamma_\rho \gamma_i q^\sigma \gamma_\sigma \gamma_j (1 - \gamma_5)) \\
& = \frac{1}{2m_\nu^2} \text{Tr} \left[q'^\rho q^\sigma (\gamma_\rho \gamma_i \gamma_\sigma \gamma_j - \gamma_\rho \gamma_i \gamma_\sigma \gamma_j \gamma_5) \right] \tag{2.43} \\
& = \frac{1}{2m_\nu^2} [(q'^\rho q^\sigma (4g_{\rho i} g_{\sigma j} + 4g_{\rho j} g_{i\sigma} - 4g_{\rho\sigma} g_{ij}) - i\varepsilon_{\rho i\sigma j} q'^\rho q^\sigma)] \\
& = \frac{2}{m_\nu^2} [q'_i q_j + q'_j q_i - (q'_\sigma q^\sigma) g_{ij} - i\varepsilon_{\rho i\sigma j} q'^\rho q^\sigma] \\
& = \frac{2}{m_\nu^2} E_{q'} E_q \left[\hat{q}'_i \hat{q}_j + \hat{q}'_j \hat{q}_i + (1 - \cos \theta) \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} (\hat{q}^k - \hat{q}'^k) \right],
\end{aligned}$$

dove $\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}$ è il tensore di Levi-Civita, completamente antisimmetrico, definito da

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{0123} &= 1, \\
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 0 \quad \text{se ci sono due indici uguali,} \\
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \pm 1 \quad \text{per permutazioni pari o dispari di 0123.}
\end{aligned}$$

Non ci rimane che sostituire le precedenti espressioni in W_{fi} e considerare che $E_p E_{p'} \simeq m_n^2$, ottenendo così

$$\begin{aligned}
\sigma_{fi} &= \frac{W_{fi}}{V} = \frac{G_f^2 n}{4} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \left\{ C_A^2 \left[\hat{q}'_i \hat{q}_j + \hat{q}'_j \hat{q}_i + (1 - \cos \theta) \delta_{ij} \right] S_{ij}^s(\mathbf{k}, \omega) \right. \\
& \quad \left. + i\varepsilon_{ijk} (\hat{q}^k - \hat{q}'^k) S_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega) + (1 + \cos \theta) S(\mathbf{k}, \omega) \right\}, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

dove

$$S_{ij}^{s,(a)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} [S_{ij}(\mathbf{k}, \omega) + (-)S_{ji}(\mathbf{k}, \omega)]. \tag{2.45}$$

Nel caso in cui $S_{ij} = \delta_{ij} S$, la σ_{fi} si scriverà

$$\sigma_{fi} = \frac{G_f^2 n}{4} \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \left\{ C_A^2 (3 - \cos \theta) S(\mathbf{k}, \omega) + (1 + \cos \theta) S(\mathbf{k}, \omega) \right\}. \tag{2.46}$$

La Probabilità W_{fi} , permette di calcolare il tempo del cammino libero medio $\tau(\mathbf{q})$ del neutrino[?]. Per vedere questo, scriviamo l'equazione di

Boltzmann per il neutrino

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{q})}{\partial t} &= W_{fi}(\mathbf{k}, \omega) n(\mathbf{q})(1 - n(\mathbf{q}')) \\ &+ W_{fi}(-\mathbf{k}, -\omega) n(\mathbf{q}')(1 - n(\mathbf{q})), \end{aligned} \quad (2.47)$$

dove $n(\mathbf{q})$ è la funzione di distribuzione del neutrino. Il primo termine della (3.47) dà il rate al quale il neutrino viene diffuso in uno stato con impulso $\neq \mathbf{q}$, mentre il secondo rappresenta il flusso inverso, cioè un neutrino che entra nello stato \mathbf{q} . I termini n e $(1 - n)$ tengono conto del fatto che il processo può avvenire soltanto se lo stato iniziale è occupato e quello finale è vuoto.

Il tempo $\tau(\mathbf{q})$, può essere calcolato a partire dalla linearizzazione della (3.47) rispetto δn , che rappresenta la deviazione della distribuzione n rispetto quella dello stato fondamentale, cioè quella di Fermi Dirac. Con questa procedura possiamo scrivere

$$\frac{\partial n(\mathbf{q})}{\partial t} = -\delta n(\mathbf{q})/\tau(\mathbf{q}), \quad (2.48)$$

con

$$\frac{1}{\tau(\mathbf{q})} = \{W_{fi}(\mathbf{k}, \omega)(1 - n(\mathbf{q}')) + W_{fi}(-\mathbf{k}, -\omega)n(\mathbf{q}')\}. \quad (2.49)$$

Il principio del bilancio dettagliato riscriviamo

$$W_{fi}(\mathbf{k}, \omega) = e^{\beta\omega} W_{fi}(\mathbf{k}, -\omega), \quad (2.50)$$

e quindi

$$\frac{1}{\tau(\mathbf{q})} = [1 + e^{-(q^o - \mu_\nu)/K_B T}] W_{fi}(\mathbf{k}, \omega)(1 - n(\mathbf{q}')). \quad (2.51)$$

Questo risultato ci mostra come il tempo τ , dipenda dalle interazioni neutrone neutrone, tramite i fattori di forma che compaiono nella definizione σ_{fi} .

2.2 Teoria della risposta lineare

Supponiamo di condurre un esperimento su di un sistema fisico, andandolo ad eccitare tramite l'utilizzo di una forza esterna $f(t)$ dipendente dal tempo. In generale la sonda si andrà ad accoppiare con delle precise quantità A del sistema fisico (densità, corrente, densità di spin...); quello che si vuole misurare è la risposta del sistema andando ad osservare determinate sue quantità che chiameremo B. Nella teoria della risposta lineare[?], la sonda di prova si accoppia debolmente alle osservabili A, cioè l'intensità della forza d'interazione è proporzionale ad una costante sufficientemente piccola, da poter trascurare in uno sviluppo perturbativo gli ordini superiori al primo. In questo regime la risposta è determinata dalle caratteristiche del sistema fisico in assenza della sonda. Le proprietà del sistema saranno perciò descritte in termini di funzioni di risposta B-A.

2.2.1 Temperatura nulla

Iniziamo la trattazione della teoria della risposta lineare, per un sistema all'equilibrio termodinamico a temperatura nulla. Il sistema ha una hamiltoniana iniziale \hat{H}_o indipendente dal tempo. Chiamiamo $|\psi_s(t)\rangle$ un suo autostato nella rappresentazione di Schrodinger, naturalmente questo sarà lo stato fondamentale, cioè quello ad energia minima; la sua evoluzione temporale è data dall'equazione di Schrodinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_s(t)\rangle = \hat{H}_o |\psi_s(0)\rangle. \quad (2.52)$$

Fissiamo un istante t_o in cui il sistema risente di una forza esterna $f(t)$, che si accoppia ad una sua osservabile $\hat{A}(t)$, cosicché l'hamiltoniana si trasformi in

$$\hat{H} = \hat{H}_o + \hat{H}^{ext}(t) = \hat{H}_o + \hat{A}(t)f(t). \quad (2.53)$$

Lo stato del sistema soddisferà una nuova equazione di Schrodinger, la cui soluzione può essere cercata nella forma

$$|\psi'_s(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_o t/\hbar} \hat{U}(t) |\psi_s(0)\rangle, \quad (2.54)$$

dove $\hat{U}(t)$ è un operatore unitario, che deve soddisfare la condizione

$$\hat{U}(t) = 1 \quad t < t_o. \quad (2.55)$$

cioè $\hat{U}(t)$ si riduce all'identità per tempi precedenti t_o . L'evoluzione temporale di $\hat{U}(t)$, si ottiene andando a sostituire nell'equazione di Schrodinger, lo stato

definito nella(2.54) e utillizzando l'hamiltoniana \widehat{H} ,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \widehat{U}(t) &= e^{i\widehat{H}t/\hbar} \widehat{H}^{ext} e^{-i\widehat{H}t/\hbar} \widehat{U}(t) \\ &\equiv \widehat{H}_H^{ext} \widehat{U}(t). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dove \widehat{H}_H^{ext} è l'operatore espresso nella rappresentazione di Heisenberg, collegato a quello nella rappresentazione di Schrodinger dalla

$$\widehat{O}_H(t) = e^{i\widehat{H}t/\hbar} \widehat{O}_s e^{-i\widehat{H}t/\hbar}. \quad (2.57)$$

Risolvendo la (1.21) si ottiene per l'operatore di evoluzione temporale $\widehat{U}(t)$ la seguente espressione

$$\widehat{U}(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \widehat{H}_H^{ext}(t') + \dots \quad (2.58)$$

dove i puntini di sospensione rappresentano per i termini d'ordine superiore al secondo, nello sviluppo in \widehat{H}^{ext} .

Il corrispondente autostato al tempo t sarà

$$|\psi'_s(t)\rangle = e^{i\widehat{H}t/\hbar} |\psi_s(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} e^{i\widehat{H}t/\hbar} \int_{t_0}^t dt' \widehat{H}_H^{ext} |\psi_s(0)\rangle + \dots \quad (2.59)$$

Tutte le quantità di interesse fisico sono espresse dagli elementi di matrice dell'osservabile. Supponiamo di voler misurare il valore di una grandezza $B(t)$, allora quello che dobbiamo conoscere è

$$\begin{aligned} \langle \widehat{B}(t) \rangle^{ext} &= \langle \psi'_S(t) | \widehat{B}(t) | \psi_S(t) \rangle = \\ &\langle \psi'_s(0) | \left[1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \widehat{H}^{ext}(t') \right] e^{i\widehat{H}t/\hbar} \widehat{B}_s(t) e^{-i\widehat{H}t/\hbar} \\ &\quad \times \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \widehat{H}^{ext}(t') \right] | \psi_s(0) \rangle \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$= \langle \psi'_H | \widehat{B}_H(t) | \psi_H \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle \psi'_H | \int_{t_0}^t dt' \left[\widehat{H}_H^{ext}(t'), \widehat{B}_H(t) \right] | \psi_H \rangle, \quad (2.61)$$

dove abbiamo usato l'uguaglianza tra il ket nella rappresentazione di Heisenberg, e quello di Schrodinger al tempo iniziale.

Di quest'espressione, manteniamo solamente i termini lineari in \widehat{H}' e scriviamo la variazione dell'osservabile B dovuta alla perturbazione esterna. Inoltre,

consideriamo il caso in cui lo stato iniziale e finale siano lo stato fondamentale del sistema, $|\psi_o\rangle$, otteniamo così

$$\begin{aligned}\delta \langle \widehat{B}(t) \rangle &\equiv \langle \widehat{B}(t) \rangle^{ext} - \langle \widehat{B}(t) \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^t dt' \langle \psi_o | \left[\widehat{H}_H^{ext}(t'), \widehat{B}_H(t) \right] | \psi_o \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^t dt' f(t') \langle \psi_o | \left[\widehat{A}_H(t'), \widehat{B}_H(t) \right] | \psi_o \rangle.\end{aligned}\quad (2.62)$$

Possiamo ora definire la funzione di risposta χ_{AB} tramite la relazione

$$\delta \langle \widehat{B}(t) \rangle = \int_{t_o}^t dt' \chi_{AB}(t-t') f(t'), \quad (2.63)$$

cioè

$$\chi_{AB}(t-t') = \frac{i}{\hbar} \langle \psi_o | \left[\widehat{A}_H(t'), \widehat{B}_H(t) \right] | \psi_o \rangle \Theta(t-t'). \quad (2.64)$$

Come si vede, la variazione della misura di $B(t)$, è determinata dal valor medio del commutatore tra gli operatori in presenza d'interazione A_H e B_H , sullo stato fondamentale del sistema non perturbato. Inoltre la risposta del sistema si annulla ad istanti $t < t_o$, come deve verificarsi se si vuole una teoria causale, dove la variazione di una quantità relativa ad una forza esterna, può avvenire solo dopo che questa è applicata al sistema.

2.2.2 Temperatura diversa da zero.

La generalizzazione della teoria a temperature diverse da zero, ci aiuta a trovare delle pratiche relazioni tra la funzione di risposta e le funzioni di correlazione per la densità e la densità di spin.

Quello di cui dobbiamo tener conto a temperature non nulle, è che il sistema ha una probabilità diversa da zero di trovarsi in uno stato differente da quello fondamentale. Definiamo la densità di probabilità

$$\widehat{\rho}_g = Z^{-1} e^{-\beta \widehat{K}}, \quad (2.65)$$

dove l'operatore K è dato dalla

$$\widehat{K} = \widehat{H}_o - \mu \widehat{N}, \quad (2.66)$$

con H_o hamiltoniana del sistema imperturbato, mentre μ e N sono il potenziale chimico e il numero di particelle. Il fattore Z , è una costante di normalizzazione per la distribuzione di probabilità

$$Z = e^{-\beta \Omega} = Tr(e^{-\beta \widehat{K}}), \quad (2.67)$$

dove la traccia equivale alla somma su tutti gli autostati di \widehat{K} .

Quella che abbiamo introdotto è la distribuzione all'equilibrio detta gran canonica. Questa distribuzione è comoda nei problemi di fisica a molti corpi, perchè permette di non specificare il numero preciso di particelle del sistema, ma solo il valor medio di N . L'informazione sulla densità ed il numero di costituenti è però mantenuta nel potenziale chimico μ .

A questo punto si può trovare il valor medio di una qualsiasi osservabile O dalla

$$\langle O \rangle = \frac{\text{Tr}(e^{-\beta\widehat{K}}O)}{\text{Tr}(e^{-\beta\widehat{K}})} = e^{-\beta\Omega} \text{Tr}(e^{-\beta\widehat{K}}O), \quad (2.68)$$

ed ottenere la generalizzazione della (2.62) per la variazione media di un'osservabile B

$$\delta \langle \widehat{B}(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' f(t') \text{Tr}(\widehat{\rho}_g [\widehat{A}_H(t'), \widehat{B}_H(t)]). \quad (2.69)$$

In questo caso la funzione di risposta, sarà definita come

$$\chi_{AB}(t-t') = \frac{i}{\hbar} \text{Tr}(\widehat{\rho}_g [\widehat{A}_H(t'), \widehat{B}_H(t)]) \Theta(t-t'). \quad (2.70)$$

2.3 Teorema fluttuazione e dissipazione

Come abbiamo visto, la sezione d'urto in un processo di scattering tra neutrino e neutroni, è determinata quando si conoscono i fattori di forma $S(\mathbf{k}, \omega)$ e $S_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, [?] che riportiamo per comodità

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{n} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(p) \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \times (1-f(p'))(n'^+ n n^+ n') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q), \quad (2.71)$$

$$S_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{n} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(p) \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \times (1-f(p'))(n'^+ \sigma_i n n^+ \sigma_j n') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q). \quad (2.72)$$

Per determinare queste funzioni è necessario poterle collegare alla funzione di risposta χ , introdotta nei precedenti paragrafi, in quanto questa potrà essere calcolata, come vedremo, tramite l'utilizzo della teoria di Landau dei liquidi neutri di Fermi. Le fluttuazioni termiche che avvengono nel sistema, possono essere collegate con la risposta lineare ad una sonda esterna, tramite il teorema di "Fluttuazione e dissipazione" [?][?].

A tal proposito, incominciamo a dare un'espressione più generale della funzione di risposta, nel caso in cui la forza che perturba il mezzo, dipenda anche dalle coordinate spaziali, di modo che la hamiltoniana del sistema dipendente dal tempo sia

$$H^{ext}(t) = \int d\mathbf{x} \hat{A}(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t). \quad (2.73)$$

In questo caso abbiamo

$$\chi_{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{i}{\hbar} e^{\beta\Omega} \text{Tr} \left(e^{-\beta\hat{K}} \left[\hat{A}_H(\mathbf{x}', t'), \hat{B}_H(\mathbf{x}, t) \right] \right) \Theta(t - t'). \quad (2.74)$$

Esprimendo la traccia, come somma sugli autostati di \hat{K} , troviamo la seguente espressione

$$\begin{aligned} \chi_{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') &= \frac{i}{\hbar} e^{\beta\Omega} \sum_n \langle n | e^{-\beta\hat{K}} (\hat{A}_H(\mathbf{x}', t') \hat{B}_H(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - \hat{B}_H(\mathbf{x}, t) \hat{A}_H(\mathbf{x}', t')) | n \rangle \Theta(t - t'). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Gli autostati di \hat{K} sono un set completo di vettori di base, cioè

$$\sum_m |m\rangle \langle m| = 1 \quad (2.76)$$

inserendo questa relazione di completezza nella (2.75) otteniamo

$$\begin{aligned} \chi_{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') &= \frac{i}{\hbar} e^{\beta\Omega} \sum_{n,m} \langle n | e^{-\beta\hat{K}} (\hat{A}_H(\mathbf{x}', t') |m\rangle \langle m| \hat{B}_H(\mathbf{x}, t) |n\rangle \\ &\quad - \langle n| \hat{B}_H(\mathbf{x}, t) |m\rangle \langle m| \hat{A}_H(\mathbf{x}', t') |n\rangle) \Theta(t - t'). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Gli operatori definiti nella funzione di risposta sono funzioni dello spazio e del tempo, possiamo però traslarli nell'origine delle coordinate tramite

$$\hat{O}(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0 t/\hbar} e^{-i\mathbf{P}\mathbf{x}/\hbar} \hat{O}(0) e^{i\mathbf{P}\mathbf{x}/\hbar} e^{-iH_0 t/\hbar}. \quad (2.78)$$

Prendendo i ket di stato, come autostati dell'impulso e dell'energia, tramite semplici passaggi si può arrivare a scrivere

$$\begin{aligned} \chi_{AB}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &= \frac{i}{\hbar} e^{\beta\Omega} \sum_{n,m} e^{-\beta k_n} \left[e^{-i(E_n - E_m)(t-t')/\hbar} e^{i(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m)(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \right. \\ &\quad \times \langle n | \hat{A}(0) | m \rangle \langle m | \hat{B}(0) | n \rangle - e^{i(E_n - E_m)(t-t')/\hbar} e^{-i(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m)(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \\ &\quad \left. \times \langle n | \hat{B}(0) | m \rangle \langle m | \hat{A}(0) | n \rangle \right] \Theta(t - t'). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Eseguendo la trasformata di Fourier, otteniamo la funzione di risposta χ_{AB} in funzione dell' impulso ed energia trasferiti dalla sonda: \mathbf{k}, ω

$$\begin{aligned} \chi_{AB}(\mathbf{k}, \omega) &= \int d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int d(t - t') e^{i(\omega(t-t'))} e^{-i(\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'))} \frac{i}{\hbar} e^{\beta\Omega} \sum_{n,m} e^{-\beta k_n} \\ &\times \left[e^{-i(E_n - E_m)(t-t')/\hbar} e^{i(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m)(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \langle n | \hat{A}(0) | m \rangle \langle m | \hat{B}(0) | n \rangle \right. \\ &\quad \left. - e^{i(E_n - E_m)(t-t')/\hbar} e^{-i(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m)(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \langle n | \hat{B}(0) | m \rangle \langle m | \hat{A}(0) | n \rangle \right] \\ &\times \Theta(t - t'). \end{aligned} \tag{2.80}$$

Consideriamo il caso in cui le quantità A e B siano le stesse, ad esempio siamo interessati alla risposta densità-densità o spin-spin; in questo caso, una volta svolto l'integrale, troviamo che

$$\begin{aligned} \chi_{AA}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{e^{\beta\Omega}}{\hbar} \sum_{n,m} e^{-\beta k_n} \left\{ \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m)/\hbar)}{\omega - (E_n - E_m)/\hbar + i\eta} |\langle n | \hat{A} | m \rangle|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m)/\hbar)}{\omega - (E_m - E_n)/\hbar + i\eta} |\langle m | \hat{A} | n \rangle|^2 \right\}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Come possiamo vedere la funzione di risposta ha un numero infinito di poli per valori di ω

$$\hbar\omega = \pm \hbar\omega_{nm} - i\eta, \tag{2.82}$$

dove $\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m$. Infatti nei precedenti calcoli è stata attribuita ad ω una piccola parte immaginaria. Questo piccolo prolungamento nel piano complesso è necessario per dare consistenza fisica al processo. Infatti se ω appartenesse ai numeri reali, non potrebbe essere soddisfatta la condizione di causalità. Supponiamo, ad esempio, di avere una perturbazione che si propaghi nel tempo come un'onda piana, ossia tramite una fase oscillante del tipo $e^{i\omega t}$. Non importa quanto sia piccola l'energia che la sonda scambia con il mezzo, poichè la sonda nasce a $-\infty$ e si spegne a $+\infty$, essa potrà scambiare un'energia abbastanza grande da non poter essere considerata più come piccola perturbazione. Una sonda che nasce a tempi infinitamente passati e si spegne a tempi infinitamente futuri non ha senso fisico, e non può portare ad una consistente teoria causale di risposta lineare. Per questo risulta necessario dare una piccola parte immaginaria ad ω . Questo ha l'effetto di accendere e spegnere la perturbazione in maniera adiabatica, cioè molto lentamente, e conferisce alla sonda un tempo di vita finito.

A questo punto possiamo mettere in relazione la (2.81) con i fattori delle (2.71) e (2.72). Questi rappresentano il valor medio, sull'ensemble

grancanonico definito precedentemente, del modulo quadro degli operatori

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \widehat{\psi}_n^+ \widehat{\psi}_n, \\ \widehat{A}_i &= \widehat{\psi}_n^+ \sigma_i \widehat{\psi}_n,\end{aligned}\quad (2.83)$$

moltiplicati per le distribuzioni delta.

Questa conclusione viene notando che, la somma su s ed s' e gli integrali, rappresentano una somma sugli stati iniziali e finali, mentre le distribuzioni di Fermi-Dirac rappresentano il valore medio grancanonico, del numero d'occupazione per gli stati di impulso p e p' . Tale numero funge da peso statistico nel calcolo del valore medio per gli elementi di matrice di \widehat{A} e \widehat{A}_i .

Tenuto conto di ciò, si ha

$$\chi_{AA}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{n}{2\pi\hbar} \int d\omega' \left[\frac{S(\mathbf{k}, \omega')}{\hbar\omega - \hbar\omega' + i\eta} - \frac{S(-\mathbf{k}, \omega')}{\hbar\omega + \hbar\omega' + i\eta} \right], \quad (2.84)$$

$$\chi_{A_i A_j}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{n}{2\pi\hbar} \int d\omega' \left[\frac{S_{ij}(\mathbf{k}, \omega')}{\hbar\omega - \hbar\omega' + i\eta} - \frac{S_{ij}(-\mathbf{k}, \omega')}{\hbar\omega + \hbar\omega' + i\eta} \right]. \quad (2.85)$$

Possiamo ora dividere χ in parte reale ed immaginaria

$$\chi = \chi' + i\chi'', \quad (2.86)$$

e facendo uso della relazione

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{x - a + i\eta} = P \left(\frac{1}{x - a} \right) - i\pi\delta(x - a), \quad (2.87)$$

dove $P(x)$, è la parte principale di x , troviamo che

$$\chi'_{A_i A_j} = \frac{n}{2\pi\hbar} \int d\omega' \left\{ S_{ij}(\mathbf{k}, \omega') P \left(\frac{1}{\hbar\omega - \hbar\omega'} \right) - S_{ij}(-\mathbf{k}, \omega') P \left(\frac{1}{\hbar\omega + \hbar\omega'} \right) \right\}, \quad (2.88)$$

$$\chi''_{A_i A_j} = -\frac{n}{2\hbar} \{ S_{ij}(\mathbf{k}, \omega) - S_{ij}(-\mathbf{k}, -\omega) \}, \quad (2.89)$$

e similmente per χ_{AA} . Si può dimostrare facilmente che

$$\begin{aligned}S(\mathbf{k}, \omega) &= e^{\beta\hbar\omega} S(-\mathbf{k}, -\omega), \\ S_{ij}(\mathbf{k}, \omega) &= e^{\beta\hbar\omega} S_{ij}(-\mathbf{k}, -\omega).\end{aligned}\quad (2.90)$$

Quindi andando a sostituire nelle parti immaginarie delle funzioni χ_{AA} e $\chi_{A_i A_j}$, le relazioni

$$\begin{aligned}S(-\mathbf{k}, -\omega) &= e^{-\beta\hbar\omega} S(\mathbf{k}, \omega), \\ S_{ij}(-\mathbf{k}, -\omega) &= e^{-\beta\hbar\omega} S_{ij}(\mathbf{k}, \omega),\end{aligned}\quad (2.91)$$

otteniamo il risultato

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \frac{-2\hbar}{n(1 - e^{-\beta\omega})} \text{Im}\chi_{AA}, \quad (2.92)$$

$$S_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{-2\hbar}{n(1 - e^{-\beta\omega})} \text{Im}\chi_{A_i A_j}, \quad (2.93)$$

che conclude la dimostrazione del teorema di “Fluttuazione e dissipazione”

Capitolo 3

Teoria dei liquidi normali di Fermi

La teoria sui liquidi normali di Fermi [1][2][3], fu sviluppata da L.D.Landau intorno al 1956, per riuscire a dare un'interpretazione qualitativa e quantitativa, del comportamento di certi liquidi quantistici non superfluidi.

A temperature molto basse, generalmente i liquidi vanno incontro ad una transizione che li porti ad assumere proprietà di solido; non è così però per certi liquidi, che grazie alla naturale debolezza dei legami tra particelle, mantengono lo stato liquido anche a temperature prossime allo zero assoluto. In natura gli unici esempi di liquidi quantistici sono ^3He , ed ^4He a temperature di circa $3 - 4^\circ\text{K}$, tali che la loro lunghezza d'onda di de Broglie $\sqrt{\hbar^2/2MT}$ diventi comparabile con le distanze interatomiche. In questo lavoro di tesi prendiamo in esame la materia composta di neutroni, alla quale è possibile applicare la teoria di Landau.

Come abbiamo visto nel Cap.2, il passaggio del neutrino nella materia comporta delle fluttuazioni di densità delle osservabili. Queste variazioni di densità comportano una probabilità variabile nel tempo, di trovare una particella in un punto dello spazio delle fasi. Riuscire a calcolare queste fluttuazioni e quindi le funzioni di correlazione delle grandezze osservate, diventa il punto cruciale nel calcolo delle sezioni d'urto. A questo proposito introdurremo l'equazione cinetica per un liquido di Fermi, che quantificherà la variazione del numero d'occupazione di un certo stato quantistico, nel tempo. Come vedremo tutte le quantità di interesse, possono essere messe in relazione con pochi parametri fenomenologici, e possono essere note una volta risolta l'equazione cinetica.

Quella che riportiamo di seguito è una breve introduzione alla teoria fenomenologica dei liquidi di Fermi per particelle neutre.

3.1 Introduzione alle quasi particelle

La teoria dei liquidi di Fermi è attuabile solo a basse temperature per stati del sistema debolmente eccitati. In questa situazione lo stato del sistema eccitato è descrivibile in termini di eccitazioni elementari, dette quasi-particelle e quasi-lacune, che a basse temperature risultano stabili, cioè con lunga vita media, e che possono essere usate come autostati dell' hamiltoniana.

Per capire il concetto di quasi particella, bisogna capire il ruolo che svolge come eccitazione elementare. Per far ciò partiamo da un sistema di fermioni non interagenti, un gas ideale. In un gas fermionico, lo stato eccitato del sistema può essere descritto partendo dalle eccitazioni elementari rappresentate da coppie lacuna-particella, che si creano quando dallo stato fondamentale portiamo fuori dalla superficie di Fermi una particella, e lasciamo al suo interno una lacuna.

L'idea di Landau fu che anche lo spettro degli stati eccitati di un liquido di Fermi, fosse descrivibile utilizzando eccitazioni elementari quasi-particella quasi-lacuna, proprio come per i gas non interagenti. Le quasi-particelle, non sono le particelle fisiche comprensive d'interazione, ma rappresentano un metodo utile per schematizzare le eccitazioni del sistema. Infatti, fatta l'ipotesi che anche per esse valga la natura fermionica, potremmo costruirci uno stato fondamentale con una superficie di Fermi per le quasi particelle, superata la quale si creano degli stati eccitati.

Bisogna notare che non è in generale vero che la statistica delle eccitazioni, sia della stessa natura di quella delle particelle che compongono il sistema, come nel nostro caso dove sia le quasi-particelle che i neutroni hanno spin semi intero.

Per creare lo stato del sistema interagente, si utilizza il meccanismo dell'accensione adiabatica dell'interazione, cioè partendo da un sistema non interagente, si applica gradualmente l'interazione, accendendola completamente al limite in un tempo infinitamente lungo.

Sia \hat{H}_o l' hamiltoniana del sistema non interagente, e $\hat{H}(t) = \hat{H}_o + \hat{H}^{ext}(t)$, l'hamiltoniana del liquido di Fermi. L'accensione adiabatica consiste nello scrivere

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_o + e^{-\epsilon|t|} \hat{H}^{ext}. \quad (3.1)$$

A tempi $t = \pm\infty$, $\hat{H} \rightarrow \hat{H}_o$, mentre a tempi nulli $\hat{H} \rightarrow \hat{H}_o + \hat{H}^{ext}$. L'idea è, che sotto questa condizione d'accensione adiabatica, lo stato del sistema ideale si trasformi nello stato del sistema reale interagente.

Per mostrare più esplicitamente questo sviluppo, scriviamo lo stato del sistema reale al tempo t nella rappresentazione d'interazione

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{U}_\epsilon(t, t_o) |\psi_I(t_o)\rangle, \quad (3.2)$$

dove l'operatore d'evoluzione dipende esplicitamente da ϵ

$$\begin{aligned} \widehat{U}_\epsilon(t, t_o) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_o}^t dt_1 \dots \int_{t_o}^t dt_n \\ &\times e^{-\epsilon(|t_1| + \dots + |t_n|)} T\{\widehat{H}^{ext}(t_1) \dots \widehat{H}^{ext}(t_n)\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Quando t_o diventa $\pm\infty$ sappiamo che

$$|\psi_S(t_o)\rangle = e^{-iE_o t_o/\hbar} |\phi_o\rangle, \quad (3.4)$$

dove

$$\widehat{H}_o |\phi_o\rangle = E_o |\phi_o\rangle, \quad (3.5)$$

$|\phi_o\rangle$ è un autostato dell'hamiltoniana imperturbata.

A questo punto possiamo scrivere

$$|\psi_I(t_o)\rangle = e^{i\widehat{H}_o t_o/\hbar} |\psi_S(t_o)\rangle = |\phi_o\rangle. \quad (3.6)$$

Quindi lo stato del sistema interagente per tempi infiniti, è lo stato del sistema libero, e tale rimarrebbe se non si accendesse alcuna forza esterna. Nel nostro caso, quando il tempo cresce l'interazione aumenta fino ad essere completamente accesa a $t = 0$; utilizzando (3.2) troviamo la relazione

$$|\psi_I(0)\rangle = \widehat{U}_\epsilon(0, -\infty) |\phi_o\rangle, \quad (3.7)$$

che permette di trovare lo stato del sistema interagente dalla conoscenza dello stato ideale, a patto che si abbiano quantità ben definite nel limite in cui ϵ tenda a zero; questo limite deve essere sempre fatto, per evitare che la fisica descritta, rimanga dipendente da un parametro puramente matematico. A tal proposito introduciamo il teorema di Gell-Mann and Low[?] (per la cui dimostrazione si rimanda alla referenza), il quale afferma che nel caso in cui esista a tutti gli ordini della teoria perturbativa la quantità

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\widehat{U}_\epsilon(0, -\infty) |\phi_o\rangle}{\langle \phi_o | \widehat{U}_\epsilon(0, -\infty) |\phi_o\rangle} \equiv \frac{|\psi_o\rangle}{\langle \phi_o | \psi_o\rangle}, \quad (3.8)$$

allora questo è un autostato di \widehat{H}

$$\widehat{H} \frac{|\psi_o\rangle}{\langle \phi_o | \psi_o\rangle} = E \frac{|\psi_o\rangle}{\langle \phi_o | \psi_o\rangle}. \quad (3.9)$$

Bisogna fare una considerazione su tale meccanismo. Non è sempre vero che lo stato fondamentale ideale si trasformi in quello fondamentale reale

del sistema interagente. Infatti in casi particolari, come ad esempio nei ferromagneti sotto la temperatura critica, una volta accesa l'interazione tra gli spin, lo stato fondamentale è caratterizzato da un valore non nullo del momento magnetico totale, contrariamente a quanto accadrebbe spegnendo l'interazione, nel cui caso lo stato a momento magnetico diverso da zero è uno stato eccitato. Quindi in caso di rottura spontanea di simmetria, lo stato fondamentale del sistema ideale non si trasforma in quello fondamentale del sistema reale. Comunque il caso dei liquidi normali di Fermi non rientra in quello di rottura spontanea di simmetria.

Per quanto riguarda gli stati eccitati del sistema reale, anche questi possono essere messi in relazione con quelli del sistema non interagente, andando a considerare un sistema ideale con $N + 1$ particelle, di cui N sono nello stato fondamentale, ed una oltre la superficie di Fermi, a valori di impulso \mathbf{p} . Un tale stato è ancora autostato dell'hamiltoniana \hat{H}_0 , e può dar vita, con un'accensione adiabatica dell'interazione a stati eccitati del sistema reale, sempre di impulso \mathbf{p} , essendo tale variabile conservata negli urti tra particelle. Anche in questo caso però bisogna avere le dovute accortezze.

Infatti, consideriamo lo spettro delle eccitazioni di un gas ideale. Sappiamo che queste sono delle funzioni δ di Dirac corrispondenti ai diversi valori d'energia e rappresentano stati stabili del sistema, cioè non decadono. Come vedremo di seguito, le quasi-particelle contrariamente ai fermioni liberi del gas interagiscono tra loro e a causa di questa interazione gli stati eccitati decadono entro un certo tempo τ . Perciò nel caso delle quasi-particelle, lo stato eccitato non è più rappresentato da una δ di Dirac, ma da una risonanza con una certa larghezza Γ , inversamente proporzionale a τ . Il problema che sorge per uno stato eccitato è che, se il tempo di decadimento fosse troppo piccolo, non riusciremmo più a crearlo tramite un'accensione adiabatica dell'interazione. Naturalmente questo problema non si presenterà per lo stato fondamentale che è in ogni caso stabile.

Si può però dimostrare che sotto opportune condizioni, anche le quasi-particelle tendono ad avere vita media infinita. A tale proposito consideriamo un sistema a temperatura nulla, per cui tutti gli stati interni alla superficie di Fermi sono occupati; se ora immaginassimo di avere una quasi-particella fuori da tale superficie, si deve verificare che la sua larghezza Γ , sia minore della distanza tra il valore della sua energia e l'energia di Fermi, questo per evitare il blocco di Pauli dovuto al principio d'esclusione. Similmente, per temperature diverse da zero, quando la distribuzione delle quasi-particelle è smussata rispetto quella a gradino, la larghezza della quasi-particella dovrà essere inferiore alla larghezza dello smussamento, cioè kT , prodotto dall'energia termica. Considerando il caso in cui una quasi-particella di energia $\epsilon > \epsilon_F$ interagisce con una quasi-particella ad energie $\epsilon_1 < \epsilon_F$, per dare nello

stato finale una quasi-lacuna ad energie ϵ_1 e due quasi-particelle ϵ_2, ϵ_3 , fuori dalla superficie di Fermi.

$$\epsilon + \epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2 + \epsilon_3. \quad (3.10)$$

La probabilità che avvenga un tale processo sarà proporzionale a $1/\tau$ e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{1}{\tau} = & \sum_{\text{stati finali}} P(\epsilon + \epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2 + \epsilon_3) \delta(p + p_1 - (p_2 + p_3)) \delta(\epsilon + \epsilon_1 - (\epsilon_2 + \epsilon_3)) \\ & \times \delta_{\sigma+\sigma_1, \sigma_2+\sigma_3} (n_1(1-n_2)(1-n_3)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

La precedente equazione conduce al risultato[?]

$$\frac{1}{\tau} := \begin{cases} (\epsilon - \mu)^2 & \text{se } |\epsilon - \mu| > kT \\ (kT)^2 & \text{se } |\epsilon - \mu| < kT, \end{cases} \quad (3.12)$$

dove μ è il potenziale chimico.

Quindi per quanto detto sopra, affinché $\Gamma = (\epsilon - \mu)^2$ o $\Gamma = (kT)^2$ sia minore della distanza $(\epsilon - \mu)$ o kT , le quasi-particelle devono essere definite solamente in prossimità della superficie di Fermi e a bassa temperatura.

Per quanto riguarda i processi che producano nello stato finale $M + 1$ quasi-particelle e M quasi-lacune, questi sono molto meno probabili; infatti perchè non si violi il blocco di Pauli e perchè si conservino l'impulso e l'energia, ogni stato eccitato dovrà avere energia libera nell'intervallo $(-kT, +(\epsilon - \mu))$. Se $|\epsilon - \mu| < kT$ la probabilità del processo sarà $(kT)^{2M}$, altrimenti, per $|\epsilon - \mu| > kT$, sarà $(\epsilon - \mu)^{2M}$. Quindi vicino alla superficie di Fermi ed a bassa temperatura, l'unico processo rilevante sarà quello descritto nella (3.10)

3.2 Energia di quasiparticella

Lo stato del sistema interagente, è noto in linea di principio, una volta che si specifichi la distribuzione delle quasi-particelle in funzione dell'impulso \mathbf{p} e dello spin σ : $n_{\mathbf{p}\sigma}$.

La distribuzione $n_{\mathbf{p}\sigma}$, può essere scritta

$$n_{\mathbf{p}\sigma} = n_{\mathbf{p}\sigma}^o + \delta n_{\mathbf{p}\sigma}, \quad (3.13)$$

dove $n_{\mathbf{p}\sigma}^o$, rappresenta la distribuzione dello stato fondamentale, mentre $\delta n_{\mathbf{p}\sigma}$ tiene conto delle eccitazioni del sistema.

La precedente è solo un'espressione formale, infatti non ha molto senso dare una distribuzione d'equilibrio $n_{\mathbf{p}\sigma}^o$, essendo le quasi-particelle stabili solo

vicino la superficie di Fermi ed a bassa temperature. L'unica quantità di significato fisico, di cui si dovremo tener conto è $\delta n_{\mathbf{p}\sigma}$. La nostra teoria perciò tradurrà tutte le sue predizioni, in termini della differenza $\delta n_{\mathbf{p}\sigma} = n_{\mathbf{p}\sigma} - n_{\mathbf{p}\sigma}^o$. Per discutere l'energia del liquido di Fermi, partiamo dall'analizzare le differenze con l'espressione nel caso di un gas fermionico.

Chiamiamo E_o l'energia dello stato fondamentale per il gas di fermioni e $\delta n_{\mathbf{p}}$ l'eccitazioni particella lacuna. Possiamo allora scrivere l'energia del sistema come

$$E = E_o + \sum_{\mathbf{p}} \frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{2m} \delta n_{\mathbf{p}}, \quad (3.14)$$

dove $\delta n_{\mathbf{p}}$ sarà +1 a per le particelle e -1 per le lacune. Quello che possiamo notare dalla precedente formula, è che le eccitazioni comportano una variazione d'energia

$$\delta E = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}} \equiv \sum_{\mathbf{p}} \frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{2m} \delta n_{\mathbf{p}}. \quad (3.15)$$

Anche per un liquido di Fermi vale un'espressione analoga, cioè possiamo scrivere

$$\delta E = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma} \delta n_{\mathbf{p}\sigma}, \quad (3.16)$$

cioè

$$\epsilon_{\mathbf{p}\sigma} = \frac{\delta E}{\delta n_{\mathbf{p}\sigma}}, \quad (3.17)$$

dove abbiamo lasciato la dipendenza da σ per una trattazione più generale. Nel caso di un liquido di Fermi, $\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}$ ha una dipendenza funzionale non banale dalla distribuzione di quasi-particella $n_{\mathbf{p}\sigma}$, cioè l'energia di una quasi-particella dipende da come sono distribuite tutte le altre.

Diciamo che l'energia di una quasi-particella (\mathbf{p}, σ) cambia, a seguito della presenza di un'altra (\mathbf{p}', σ') , di una quantità

$$\delta \epsilon_{\mathbf{p}\sigma} = \sum_{\mathbf{p}', \sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\mathbf{p}'\sigma'}, \quad (3.18)$$

dove $f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ è l'energia d'interazione, ed è data da

$$f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{\delta^2 E}{\delta n_{\mathbf{p}\sigma} \delta n_{\mathbf{p}'\sigma'}}. \quad (3.19)$$

Perciò possiamo scrivere l'energia $\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}$ per una singola quasi-particella, come un contributo $\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^o$, chiamato energia nuda di quasi-particella, rappresentante

l'energia che avrebbe la nostra eccitazione se questa non interagisse con le altre quasi-particelle modificandone la loro distribuzione, più un termine che rappresenta l'interazione, ottenendo così

$$\epsilon_{\mathbf{p}\sigma} = \epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^o + \sum_{\mathbf{p}'\sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\mathbf{p}'\sigma'}. \quad (3.20)$$

A temperatura zero, l'energia nuda in prossimità della superficie di Fermi può essere scritta come

$$\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^o = \mu + \hbar \mathbf{v}_F (\mathbf{p} - \mathbf{p}_F), \quad (3.21)$$

dove

$$\mathbf{v}_F = \frac{1}{\hbar} (\nabla_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^o)_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_F}, \quad (3.22)$$

è la velocità della quasi-particella sulla superficie di Fermi, che definisce il valore della massa efficace m^* tramite

$$\mathbf{v}_F = \frac{\hbar \mathbf{p}_F}{m^*}. \quad (3.23)$$

Per quanto riguarda la $f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, essa ha le dimensioni di un'energia e poichè la somma su \mathbf{p}' nella (3.18) va come V , il volume in cui è racchiuso il sistema, la nostra f sarà d'ordine V^{-1} . Possiamo supporre inoltre, che $f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, sia continua in prossimità della superficie di Fermi, così per valori di \mathbf{p} e \mathbf{p}' prossimi a \mathbf{p}_F , quello che servirà è il valore di $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ sulla superficie di Fermi, di modo che la dipendenza relativa agli impulsi delle quasi-particelle, riguardi solamente la direzione di \mathbf{p}, \mathbf{p}' .

Naturalmente vale

$$f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') = f(\mathbf{p}', \sigma'; \mathbf{p}, \sigma). \quad (3.24)$$

Consideriamo inoltre il caso in cui la dipendenza dallo spin, sia solo una dipendenza tra la direzione relativa di σ e σ' , possiamo avere solo due possibili casi

$$\begin{aligned} f_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= f_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f^s(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + f^a(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \\ f_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= f_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f^s(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - f^a(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Se il sistema fosse isotropo, la dipendenza dagli impulsi di $f^{s(a)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, si riduce a quella dall'angolo θ tra \mathbf{p} e \mathbf{p}' , perciò potremmo compiere un'espansione in polinomi di Legendre, ottenendo

$$f^{s(a)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{s(a)} P_l(\cos(\theta)), \quad (3.26)$$

dove ad esempio

$$f_l^s = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dt P_l(t) f^s(t), \quad (3.27)$$

con $t = \cos(\theta)$.

Introducendo la densità di stati

$$N(\epsilon) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^o - \mu), \quad (3.28)$$

con

$$\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^o = \frac{\hbar^2 |\mathbf{p}|^2}{2m^*}, \quad (3.29)$$

definiamo i parametri adimensionali di Landau $F_l^{s(a)}$

$$F_l^{s(a)} = VN(\epsilon_F) f_l^{s(a)} = \frac{Vm^* |\mathbf{p}_F|}{\pi^2 \hbar^2} f_l^{s(a)}. \quad (3.30)$$

Scriviamo ora esplicitamente la distribuzione all'equilibrio per le quasi-particelle.

Partiamo dall'equazione

$$\delta E = T\delta S + \mu\delta N, \quad (3.31)$$

dove già possiamo scrivere

$$\delta E = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma} \delta n_{\mathbf{p}\sigma}. \quad (3.32)$$

Per quanto riguarda l'entropia, possiamo utilizzare la formula valida per il gas fermionico, essendo gli stati del gas in relazione biunivoca con quelli del liquido di Fermi

$$S = -k_\beta \sum_{\mathbf{p}\sigma} \{n_{\mathbf{p}\sigma} \ln(n_{\mathbf{p}\sigma}) + (1 - n_{\mathbf{p}\sigma}) \ln(1 - n_{\mathbf{p}\sigma})\}, \quad (3.33)$$

ottenendo

$$\delta S = -k_\beta \sum_{\mathbf{p}\sigma} \ln\left(\frac{n_{\mathbf{p}\sigma}}{1 - n_{\mathbf{p}\sigma}}\right) \delta n_{\mathbf{p}\sigma}, \quad (3.34)$$

e in ultimo abbiamo

$$\delta N = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \delta n_{\mathbf{p}\sigma}. \quad (3.35)$$

Sostituendo le precedenti espressioni nella (3.31), otteniamo

$$\sum_{\mathbf{p}\sigma} (\epsilon_{\mathbf{p}\sigma} - \mu) \delta n_{\mathbf{p}\sigma} = -Tk_\beta \sum_{\mathbf{p}\sigma} \ln\left(\frac{n_{\mathbf{p}\sigma}}{1 - n_{\mathbf{p}\sigma}}\right) \delta n_{\mathbf{p}\sigma}. \quad (3.36)$$

Poichè la distribuzione che cerchiamo è quella d'equilibrio, per un certo $\delta n_{\mathbf{p}\sigma}$ a T e μ fissati, il termine lineare nella variazione di $n_{\mathbf{p}\sigma}^o$ si deve annullare, otteniamo perciò

$$n_{\mathbf{p}\sigma}^o = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}\sigma} - \mu)}}. \quad (3.37)$$

Questa, contrariamente alla distribuzione di un gas fermionico, è un'equazione non lineare, inquanto $\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}$ dipende dalla distribuzione $n_{\mathbf{p}\sigma}^o$ che stiamo cercando. Quello che possiamo notare è che a temperature nulle, la distribuzione diventa un gradino

$$n_{\mathbf{p}\sigma}^o = \begin{cases} 1 & \text{se } \epsilon_{\mathbf{p}\sigma} < \mu \\ 0 & \text{se } \epsilon_{\mathbf{p}\sigma} > \mu. \end{cases} \quad (3.38)$$

Nel caso in cui il sistema non interagente dal quale siamo partiti, fosse un gas racchiuso in un volume V , la sua superficie di Fermi è una sfera; mediante l'accensione adiabatica, per un sistema isotropo, la superficie di Fermi rimane sempre sferica.

3.3 Equazione cinetica per le quasi particelle

Nei precedenti paragrafi, abbiamo considerato una distribuzione omogenea e non dipendente dal tempo, sappiamo però che per riuscire a descrivere la risposta della materia neutronica ad una sonda esterna, è necessario andare a vedere come variano nello spazio e nel tempo, le densità di determinate osservabili a cui la sonda si accoppia.

Nella nostra trattazione, consideriamo il caso di accoppiamento debole tra sistema e sonda, in modo tale che si possa applicare la teoria della risposta lineare. Tale ipotesi è pienamente soddisfatta nel caso in cui la perturbazione esterna, sia rappresentata dal campo del neutrino, che ha solamente carica debole.

Incominciamo quindi a definire una distribuzione $n_{\mathbf{p}\sigma}(\mathbf{r}, t)$, tramite la quale descrivere il trasporto di una quasi-particella.

Vediamo subito che si incappa in un problema d'origine quantistica. Infatti dal principio d'indeterminazione sappiamo che, una volta noto l'impulso, la coordinata è largamente incerta, quindi non potremmo considerare simultaneamente queste osservabili definendole con arbitraria precisione.

In nostro aiuto viene però il fatto che, la distribuzione nello spazio degli impulsi, per temperature piccole ma comunque diverse da zero, è smussata di una quantità $k_\beta T/v_F$, questo significa che non è necessario conoscere gli impulsi delle quasi-particelle con una precisione maggiore di tale quantità $\Delta\mathbf{p} = k_\beta T/v_F$, che sarà collegata all'incertezza sulle coordinate, dal principio d'indeterminazione $\lambda > \hbar/\Delta\mathbf{p}$. Perciò se la perturbazione esterna ha

una lunghezza d'onda maggiore della lunghezza caratteristica del sistema, la perturbazione potrà essere considerata macroscopica e il problema assume una natura classica.

La precedente condizione è troppo restrittiva, in verità la teoria di Landau può essere utilizzata senza problemi nel caso in cui si verifichi che

$$\begin{aligned} \hbar q v_f &\ll \mu, \\ \hbar \omega &\ll \mu, \end{aligned} \quad (3.39)$$

cioè l'energia trasferita dalla sonda, deve essere molto minore dell'energia di Fermi, o potenziale chimico, del liquido.

Consideriamo un elemento di volume $d\mathbf{r}d\mathbf{p}$, bilanciando perciò il flusso entrante con quello uscente, sappiamo che

$$\frac{dn_{\mathbf{p}}}{dt} = 0. \quad (3.40)$$

Dove è stata mantenuta esplicitamente solo la dipendenza dagli impulsi, per semplicità di scrittura.

Facendo l'assunzione che l'hamiltoniana della quasi-particella sia $\epsilon_{\mathbf{p}}$, l'equazione precedente equivale alla

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \frac{1}{\hbar} \{n_{\mathbf{p}}, \epsilon_{\mathbf{p}}\} = 0, \quad (3.41)$$

dove abbiamo introdotto le parentesi di Poisson

$$\{n_{\mathbf{p}}, \epsilon_{\mathbf{p}}\} = \nabla_{\mathbf{r}} n_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} - \nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{p}}, \quad (3.42)$$

la precedente equazione, riguarda la distribuzione globale per le quasi-particelle; ma noi sappiamo che $n_{\mathbf{p}}$ è definita solo in prossimità della superficie di Fermi, perciò dovremo estrarre un'equazione valida solamente per le quasi-particelle eccitate.

Questo può essere facilmente fatto scrivendo ancora una volta

$$n_{\mathbf{p}\sigma}(\mathbf{r}, t) = n_{\mathbf{p}\sigma}^o(\mathbf{r}, t) + \delta n_{\mathbf{p}\sigma}(\mathbf{r}, t), \quad (3.43)$$

e linearizzando la (3.41) rispetto δn , ottenendo così

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^o \cdot \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}'} = 0. \quad (3.44)$$

I primi due termini dell'equazione linearizzata descrivono un flusso di quasi-particelle indipendenti, il terzo termine descrive un flusso di quasi-particelle

trascinato dalla mutua interazione e originato dalle inomogeneità dell'eccitazione. Questo è diverso da zero solo in prossimità della superficie di Fermi, infatti possiamo scrivere

$$\frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^o = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}^o} \nabla_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}^o = -\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_F) \mathbf{v}_{\mathbf{p}}. \quad (3.45)$$

Aggiungiamo ora una forza esterna $F_{\mathbf{p}}$, applicata sulla quasi-particella \mathbf{p} . Questa introdurrà un termine aggiuntivo nell'equazione del trasporto, dovuto al fatto che nella (3.42), $\epsilon_{\mathbf{p}}$ non conterà più solo il termine d'interazione tra le quasi particelle, ma anche un termine d'interazione con il campo esterno, perciò nella (3.44) dovremo inserire anche

$$\nabla_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) / \hbar. \quad (3.46)$$

Poichè l'eccitazione $\delta n_{\mathbf{p}}$ è proporzionale alla forza, dovremmo sostituire $n_{\mathbf{p}}$ con $n_{\mathbf{p}}^o$, per considerare solo il contributo lineare.

Per giungere ad un'equazione del trasporto completa, ci manca di introdurre nella nostra equazione l'integrale degli urti $I(\delta n_{\mathbf{p}})$. Tale integrale tiene conto della variazione del numero di quasi particelle all'interno del volumetto $d\mathbf{r}d\mathbf{p}$, a causa degli urti che esse subiscono. A temperature molto basse, e per basse densità di quasi-particelle, gli urti sono poco frequenti e limitati dal poco spazio delle fasi accessibile, per via del principio d'esclusione di Pauli, tuttavia in una trattazione generale, tale contributo è da prendere in considerazione.

In definitiva l'espressione linearizzata per il trasporto di quasi-particella è

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} + \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_F) \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left(\sum_{\mathbf{p}'} f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\mathbf{p}'} + F_{\mathbf{p}} \right) = I(\delta n_{\mathbf{p}}). \quad (3.47)$$

3.4 Eccitazioni nei liquidi di Fermi

Nei liquidi normali di Fermi, esistono due diverse tipologie d'eccitazioni, queste sono dette di singola particella e di moto collettivo.

La prima consiste nell'aggiungere una quasi particella allo stato fondamentale del liquido, la seconda riguarda l'eccitazione collettiva di tutte le quasi particelle, che può avvenire in due diversi modi e cioè come onde sonore, o come eccitazioni di suono nullo[?]. Quest'ultime sono una peculiarità dei liquidi di Fermi e per questo saranno trattate con più attenzione nel seguito del paragrafo.

Quando si ha un'eccitazione di singola particella, può succedere che questa sia diffusa omogeneamente su tutto il liquido oppure che rimanga localizzata. Nel primo caso, l'interazione tra la quasi particella e lo stato fondamentale è uniforme, nel secondo invece, la quasi particella addizionata interagisce maggiormente con quelle più vicine, che tendono perciò ad eccitarsi spinte da tale forza polarizzante.

La quasi particella si riveste perciò di una nube polarizzata, che la segue con lo stesso vettore d'onda \mathbf{q} e frequenza $\omega \cdot \mathbf{v}_{p_o}$, dove p_o è l'impulso della quasi particella addizionata.

A seguito dell'interazione localizzata con le altre quasi particelle, la quasi particella rivestita, ha una massa efficace m^* differente da quella della particella nuda, data dalla

$$m^* = m \left(1 + \frac{1}{3} F_1^s \right), \quad (3.48)$$

ed inoltre la corrente presente nel liquido, per un sistema invariante per traslazioni, sarà

$$\mathbf{j}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/m = \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \left(\frac{\partial n^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}'}} \right) \mathbf{v}_{\mathbf{p}'}. \quad (3.49)$$

Sappiamo che, affinché un'onda sonora di frequenza ω_s , si propaghi in un mezzo dove le collisioni tra i suoi costituenti avvengono con frequenza ω_l , si deve avere la condizione

$$\omega_s < \omega_l, \quad (3.50)$$

cioè tra un periodo e l'altro dell'onda sonora, ci deve essere un numero sufficiente di collisioni che permetta il ripristino delle condizioni d'equilibrio, situazione necessaria per la propagazione del suono.

Quando si abbassa la temperatura del liquido di Fermi, il tempo τ tra due collisioni aumenta come T^{-2} e quindi la frequenza degli urti diminuisce di molto, generando uno smorzamento della propagazione del suono. Tuttavia, come notò per primo Landau, anche a temperature molto basse risulta possibile la propagazione di moti collettivi per le quasi particelle; questi vengono denominati come moti collettivi di suono zero, o suono nullo, proprio per sottolineare la loro diversità con la propagazione di un'onda di tipo sonora. Un ruolo fondamentale nella propagazione del moto in assenza di urti lo gioca ancora una volta l'interazione tra le quasi particelle.

Le fluttuazioni nella distribuzione delle quasi particelle dovute al suono nullo, sono ricavabili dall'equazione cinetica introdotta nel precedente paragrafo, una volta che si trascuri l'integrale degli urti; consideriamo inoltre il caso in cui la forza esterna sia nulla, così da studiare le naturali fluttuazioni, (risonanze), presenti nel liquido.

Riscriviamo l'equazione (3.47) per una fluttuazione data da

$$\delta n_{\mathbf{p},\sigma}(\mathbf{r}, t) = \delta n_{\mathbf{p}\sigma}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + c.c., \quad (3.51)$$

ed abbiamo

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \omega) \delta n_{\mathbf{p}\sigma} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_F) \sum_{\mathbf{p}', \sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\mathbf{p}'\sigma'} = 0. \quad (3.52)$$

Assumiamo che il sistema sia isotropo; la superficie di Fermi è perciò una sfera. A $T = 0$ la fluttuazione $\delta n_{\mathbf{p}\sigma}$ può essere scritta in termini dello spostamento di tale superficie $u_{\mathbf{p}\sigma}(\theta, \phi)$, dove gli angoli θ e ϕ sono le coordinate polari intorno all'asse \mathbf{q}

$$\delta n_{\mathbf{p}\sigma} = \Theta(p_f + u - p) - \Theta(p_f - p) = u_{\mathbf{p}\sigma}(\theta, \phi), \quad (3.53)$$

o in maniera più esplicita

$$\delta n_{\mathbf{p}\sigma} = \delta(p_f - p) u_{\mathbf{p},\sigma} = \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_f) |(\hbar \mathbf{v}_f)| u_{\mathbf{p},\sigma}. \quad (3.54)$$

In termini dello spostamento u , l'equazione cinetica diviene

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \omega) u_{\mathbf{p}\sigma} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}', \sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\epsilon_{\mathbf{p}'} - \epsilon_f) u_{\mathbf{p}'\sigma'} = 0. \quad (3.55)$$

Per $\omega = \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{q}$, cioè frequenze proporzionali al vettore d'onda, esistono soluzioni dell'equazione cinetica con u non nullo, queste rappresentano le soluzioni per i moti di suono zero.

Definiamo la variabile adimensionale

$$\lambda = \frac{\omega}{q v_f}, \quad (3.56)$$

che rappresenta il rapporto tra la velocità di fase dell'onda $v_s = \omega/q$ e la velocità di Fermi. Riscriviamo la (3.55) come

$$(\cos(\theta) - \lambda) u(\theta, \phi) + \cos(\theta) \sum_{\mathbf{p}', \sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\xi) \delta(\epsilon_{\mathbf{p}'} - \epsilon_f) u_{\mathbf{p}'\sigma'}(\theta' \phi') = 0, \quad (3.57)$$

dove ξ è l'angolo compreso tra \mathbf{p} e \mathbf{p}' , cioè l'angolo compreso tra le due direzioni (θ, ϕ) e (θ', ϕ') .

L'integrazione sugli impulsi \mathbf{p}' con la delta sull'energia, genera la densità degli stati moltiplicata per un volume; questo fattore davanti la funzione $f(\xi)$ dà proprio il parametro di Landau, come dalla formula (3.30). Otteniamo perciò

$$(\cos(\theta) - \lambda) u_{\sigma} + \frac{\cos(\theta)}{2} \sum_{\sigma'} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} F_{\sigma\sigma'}(\xi) u_{\sigma'} = 0, \quad (3.58)$$

Le soluzioni in cui gli spin si muovono in fase, sono disaccoppiate da quelle in cui si muovono fuori fase, scriviamo perciò

$$u(\theta, \phi, \sigma) = u(\theta, \phi, \pm) = u^s(\theta, \phi) \pm u^a(\theta, \phi), \quad (3.59)$$

sommando σ' per ogni valore di σ , otteniamo

$$\begin{aligned} & (\cos(\theta) - \lambda)u^s + \frac{\cos(\theta)}{2} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} F_{\uparrow\uparrow}(\xi)u_{\uparrow} + F_{\uparrow\downarrow}(\xi)u_{\downarrow} + F_{\downarrow\downarrow}(\xi)u_{\downarrow} + F_{\downarrow\uparrow}(\xi)u_{\uparrow} \\ & = (\cos(\theta) - \lambda)u^s + \cos(\theta) \int \frac{d\Omega'}{4\pi} F^s(\xi)u^s = 0, \end{aligned} \quad (3.60)$$

e similmente per la parte antisimmetrica u^a .

Per risolvere la precedente equazione, possiamo sviluppare in polinomi di Legendre la $F(\xi)$, considerando solo il primo termine di sviluppo cioè quello costante. Risolviamo per la parte simmetrica, ma lo stesso risultato si raggiungerebbe per quella antisimmetrica. Considerando solamente F_o^s , che non dipende dall'angolo ξ , abbiamo

$$\begin{cases} u^s(\theta, \phi) = C \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) - \lambda} \\ C = -\frac{F_o^s}{2} \int_{-1}^1 d(\cos(\theta')) u^s(\theta', \phi'), \end{cases} \quad (3.61)$$

andando a sostituire la prima equazione nella seconda, si ottiene

$$C = -C \frac{F_o^s}{2} \int_{-1}^1 d(\cos(\theta')) \frac{\cos(\theta')}{\cos(\theta') - \lambda}. \quad (3.62)$$

Scartando la soluzione per $C = 0$ che non implicherebbe alcuna fluttuazione u , rimane

$$1 = -\frac{F_o^s}{2} \int_{-1}^1 d(\cos(\theta')) \frac{\cos(\theta')}{\cos(\theta') - \lambda}, \quad (3.63)$$

che conduce al risultato

$$\frac{1}{F_o^s} = \frac{\lambda}{2} \ln \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right) - 1. \quad (3.64)$$

Prendiamo in esame la precedente equazione. Si può vedere che per valori di F_o^s positivi, cioè per forze repulsive tra le quasi particelle, esiste una soluzione per $\lambda > 1$. Questo significa che il moto si sta propagando a velocità $v_s > v_f$. Se F_o^s fosse invece negativo, cioè per forze attrattive tra le quasi particelle, si vede che λ deve essere un numero complesso e perciò anche ω avrà una parte immaginaria, ottenendo così un'ampiezza per la perturbazione (3.51) decrescente nel tempo.

3.5 Landau damping e stabilità del suono nullo

Il fatto che il moto collettivo di suono nullo sia stabile per valori di $\lambda > 1$, può essere giustificato anche tramite un raffronto con lo spettro di un gas fermionico.

L'energia d'eccitazione per creazione di una coppia particella lacuna è

$$\omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^o = \epsilon_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^o - \epsilon_{\mathbf{p}}^o = \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{\mathbf{q}^2}{2m}. \quad (3.65)$$

Lo spettro d'energia forma un continuo tra i seguenti limiti

$$\begin{cases} 0 \leq \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^o \leq \frac{qp_f}{m} + \frac{q^2}{2m} & \text{se } q < 2p_f \\ -\frac{qp_f}{m} + \frac{q^2}{2m} \leq \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^o \leq \frac{qp_f}{m} - \frac{q^2}{2m} & \text{se } q > 2p_f. \end{cases} \quad (3.66)$$

In Fig.(3.1) è riportata la legge di dispersione $\omega(q)$ per l'eccitazioni da singola particella, o coppia particella lacuna, e per quelle del moto collettivo di suono zero. Si può vedere come nel caso $\lambda < 1$, cioè $v_s < v_f$ il moto collettivo per piccoli q ricadrebbe all'interno del continuo di singola particella, che per $q = 0$, ha una pendenza pari a v_f . Questo significa che le eccitazioni incoerenti di singola particella, eccitazione nelle quali ogni coppia ha un ruolo individuale, rompono il moto collettivo delle eccitazioni di suono nullo, facendolo decadere.

Questo decadimento del moto collettivo, è qualcosa di differente rispetto al più comune processo d'attenuazione ottenuto per via delle collisioni prodotte dall'energia termica. Quest'ultime possono avvenire per tutti i valori di λ , mentre il processo di Landau avviene solo per valori di $\lambda < 1$.

Tale processo è molto più incisivo di quello termico quando siamo prossimi a temperature nulle.

Il decadimento del moto collettivo, è determinato da uno scambio energetico di quest'ultimo, con le quasi particelle del mezzo che va ad eccitare. Consideriamo una quasi particella di impulso \mathbf{p} , qualora la sua velocità nella direzione di propagazione della perturbazione \mathbf{q} fosse pari alla velocità di fase dell'onda, cioè $\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p = \omega$, ci sarebbe uno scambio equilibrato di energie tra l'onda e la quasi particella. Nel caso in cui la quasi particella avesse velocità minori o maggiori di quella di fase, avremmo che questa verrebbe accelerata o frenata dalla propagazione dell'onda. Perciò se il moto collettivo incontra quasi particelle più lente, rispetto alla sua velocità di propagazione, esso trasferisce loro energia finendo per attenuarsi. Quello che sarà perciò importante per tale processo d'attenuazione, sarà la distribuzione di velocità delle quasi particelle. Per valori di $\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p = \omega$, ossia per valori di $\lambda = \cos \theta$,

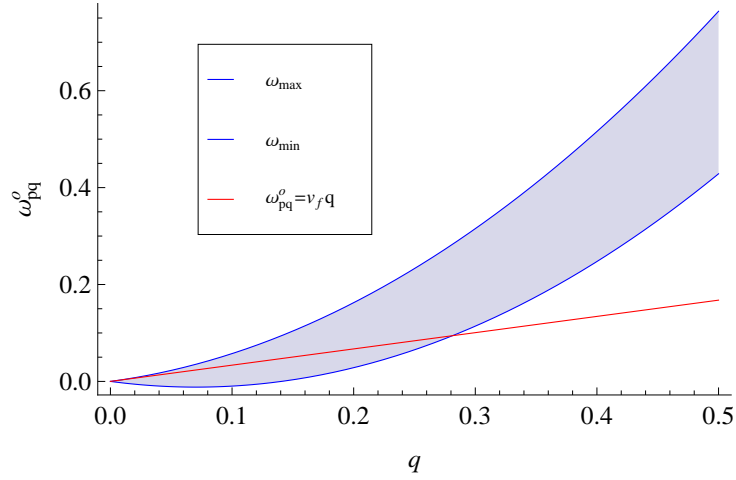


Figura 3.1: In blu e rosso, legge di dispersione di singola particella e di moto collettivo di suono zero

l'ampiezza del moto collettivo è divergente, come si vede nella (3.61). Questa risonanza è proprio dovuta al fatto che le quasi particelle che il moto collettivo incontra, vengono trascinate dalla perturbazione senza dispendio energetico.

Tale situazione, rappresenta un punto di transizione che segna il passaggio verso un moto attenuato[?]; infatti riscrivendo la (3.60) come

$$\tilde{u}^s(\theta, \varphi) = \cos \theta \int \frac{d\Omega'}{4\pi} F^s(\xi) \frac{\tilde{u}^s(\theta', \varphi')}{\lambda - \cos \theta'}, \quad (3.67)$$

dove abbiamo definito

$$\tilde{u}^s(\theta, \varphi) = (\lambda - \cos \theta) u^s, \quad (3.68)$$

vediamo che per valori di $\lambda < 1$, si può incontrare un polo. Affinchè l'integrale abbia perciò senso, si dovrà dare una regola per aggirare tale singolarità nel piano della variabile complessa $\cos \theta'$, che equivale a dare una parte immaginaria a λ , ossia ad ω . Per quanto discusso in precedenza, sappiamo che per ω complesso, la perturbazione si sta propagando come un'onda che si attenua nel tempo.

Tale processo di attenuamento è detto "Landau damping", in quanto fu proprio Landau a proporlo per primo nel 1946, per spiegare l'attenuazione delle onde nei plasmi.

3.6 Risposta materia neutronica

La risposta ad un campo esterno $U(\mathbf{r}, t) = -g\mu_B \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, è data da

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \omega) = \chi \mathbf{H}(\mathbf{q}, \omega) \quad \chi_{\alpha\beta} = \frac{\delta M_\alpha}{\delta H_\beta}. \quad (3.69)$$

Nelle precedenti equazioni, μ_B è il magnetone di Bohr, \mathbf{S} e \mathbf{H} sono rispettivamente lo spin ed il campo magnetico esterno, e $\chi_{\alpha\beta}$ è la variazione della componente α del momento magnetico \mathbf{M} , a seguito di una variazione del campo nella direzione β .

Consideriamo un campo magnetico diretto lungo l'asse z , allora avremo

$$\frac{\delta M_z}{\delta H} = -\frac{g\mu_B}{2} (\delta\rho_\uparrow - \delta\rho_\downarrow) = -\frac{g\mu_B}{2} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \sigma \delta n_{\mathbf{p}\sigma} = -\frac{g\mu_B}{2V} \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}}^a. \quad (3.70)$$

Per conoscere la risposta del liquido di Fermi al campo esterno, dobbiamo calcolare la variazione δn causata dal campo magnetico.

Per far questo utilizzeremo ancora una volta l'equazione cinetica relativa alla perturbazione (3.51)

$$(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \delta n_{\mathbf{p}\sigma} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}^o} \left[-\frac{g\mu_B}{2} \sigma_z H(\mathbf{q}, \omega) + \sum_{\mathbf{p}'\sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\mathbf{p}'\sigma'} \right] = 0. \quad (3.71)$$

Per semplificare l'equazione, usiamo le relazioni

$$\begin{aligned} \delta n_\uparrow &= \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}^o} \left(-\frac{g\mu_B}{2} H(\mathbf{q}, \omega) \right), \\ \delta n_\downarrow &= \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}^o} \left(\frac{g\mu_B}{2} H(\mathbf{q}, \omega) \right), \end{aligned} \quad (3.72)$$

che risultano valide al primo ordine in δn , dalle quali segue $\delta n_\uparrow = -\delta n_\downarrow$. A questo punto scriviamo

$$\begin{aligned} f_{\uparrow\uparrow} \delta n_\uparrow + f_{\uparrow\downarrow} \delta n_\downarrow &= (f_{\uparrow\uparrow} - f_{\uparrow\downarrow}) \delta n_\uparrow = \frac{f_{\uparrow\uparrow} - f_{\uparrow\downarrow}}{2} (\delta n_\uparrow - \delta n_\downarrow) = f^a \delta n^a \\ f_{\downarrow\uparrow} \delta n_\uparrow + f_{\downarrow\downarrow} \delta n_\downarrow &= -f^a \delta n^a, \end{aligned} \quad (3.73)$$

così l'equazione (3.71) si semplifica divenendo

$$(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \delta n_{\mathbf{p}\sigma} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}^o} \left[-\frac{g\mu_B}{2} H(\mathbf{q}, \omega) + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^a \delta n_{\mathbf{p}'}^a \right] = 0. \quad (3.74)$$

Consideriamo ora una soluzione del tipo

$$\delta n_{\mathbf{p}}^a(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{\partial n_{\mathbf{p}}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} u_{\mathbf{p}}, \quad (3.75)$$

dove $u_{\mathbf{p}}$ è lo spostamento in energia corrispondente alla variazione della distribuzione, nella direzione indicata da \mathbf{p} .

In termini di u , la precedente equazione avrà un'espressione simile a quella trovata nel precedente paragrafo, con l'aggiunta di un termine relativo al campo magnetico esterno

$$u_{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}} \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^a \frac{\partial n_{\mathbf{p}'}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}'}} u_{\mathbf{p}'} = \frac{g\mu_B}{2} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}} H(\mathbf{q}, \omega). \quad (3.76)$$

Sappiamo che le quasi particelle sono definite solo in prossimità della superficie di Fermi, perciò nell'equazione cinetica, possiamo sostituire ad f il suo valore per $p = p' = p_f$, in questo caso diverrebbe funzione solo dell'angolo ξ tra i due impulsi \mathbf{p} , \mathbf{p}' . Consideriamo inoltre soluzioni $u_{\mathbf{p}}$ dipendenti solo dall'angolo θ tra i vettori \mathbf{p} e \mathbf{q} .

Possiamo ora sviluppare in polinomi di Legendre sia la f , che la u

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^a &= \sum_{l=0}^{\infty} f_l^a P_l(x); & f_l^a &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f^a P_l(x) dx, \\ u_{\mathbf{p}} = u(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k P_k(y); & u_k &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 u P_k(y) dy, \end{aligned} \quad (3.77)$$

dove

$$\begin{aligned} x &= \cos(\xi) = \widehat{\mathbf{p}} \cdot \widehat{\mathbf{p}'}, \\ y &= \cos(\theta) = \widehat{\mathbf{q}} \cdot \widehat{\mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

utilizzando le formule di trigonometria sferica si può scrivere

$$\cos(\xi) = \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\varphi - \varphi'), \quad (3.79)$$

dove gli angoli (θ, φ) e (θ', φ') , definiscono l'orientazione dei vettori \mathbf{p} e \mathbf{p}' rispetto l'asse \mathbf{q}

Il termine relativo alla sommatoria in p' nella (3.76), può essere perciò riscritto come

$$\sum_{\mathbf{p}'} f^a(\xi) \frac{\partial n_{\mathbf{p}'}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}'}} u_{\mathbf{p}'} = \sum_{\mathbf{p}'} \sum_{l,k=0}^{\infty} f_l^a u_k P_l(x) P_k(y'). \quad (3.80)$$

Possiamo utilizzare il teorema d'addizione per i polinomi di Legendre, in base al quale

$$P_l(x) = P_l(y)P_l(y') + \sum_{s=1}^l \frac{2(l-s)!}{(l+s)!} P_l^s(y)P_l^s(y') \cos(s(\varphi - \varphi')), \quad (3.81)$$

così da ottenere al posto della (3.80)

$$\sum_{\mathbf{p}'} \frac{\partial n_{\mathbf{p}'}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}'}} \sum_{l,k=0}^{\infty} f_l^a u_k \left(P_l(y)P_l(y') + \sum_{s=1}^l \frac{2(l-s)!}{(l+s)!} P_l^s(y)P_l^s(y') \cos(s\Delta\varphi) \right) P_k(y'). \quad (3.82)$$

La sommatoria su \mathbf{p}' può essere trasformata in un integrale $Vk'^2 d(\cos(\theta')) d\varphi' dk'$, l'integrazione nella variabile angolare φ annulla il termine proporzionale a $\cos(s\Delta\varphi)$; inoltre sfruttando l'ortogonalità dei polinomi di Legendre

$$\int_{-1}^1 dy P_l(y)P_k(y) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk}, \quad (3.83)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p}'} f^a(\xi) \frac{\partial n_{\mathbf{p}'}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}'}} u_{\mathbf{p}'} &= -2\pi V \int \frac{dp'}{(2\pi)^3} p'^2 \sum_k \delta(\epsilon_{\mathbf{p}'} - \epsilon_f) \frac{f_k^a u_k P_k(\cos(\theta))}{2k+1} \\ &= -\frac{VN(\epsilon_f)}{2} \sum_k \frac{f_k^a u_k P_k(\cos(\theta))}{2k+1}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

dove abbiamo sfruttato

$$\int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_f) = N(\epsilon_f), \quad (3.85)$$

con $N(\epsilon_f)$ densità degli stati ad energia di Fermi.

Prendiamo la (3.76), per $\lambda = \omega/(qv_f)$ e $VN(\epsilon_f)f^a = F^a$, si ottiene la

$$u_{\mathbf{p}} - \frac{\cos(\theta)}{\lambda - \cos(\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k^a u_k P_k(\cos(\theta))}{2(2k+1)} = \frac{g\mu_B}{2} \frac{\cos(\theta)}{\lambda - \cos(\theta)} H(\mathbf{q}, \omega), \quad (3.86)$$

utilizzando la (3.77) la si può riscrivere

$$\frac{u_{k'}}{2k'+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k^a u_k}{2(2k+1)} \Omega_{k'k}(\lambda) = -\frac{g\mu_B}{2} \Omega_{k'0}(\lambda), \quad (3.87)$$

dove il tensore $\Omega(\lambda)$ è dato da

$$\Omega_{k'k}(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{dy}{2} P_{k'}(y) \frac{y}{y-\lambda} P_k(y), \quad (3.88)$$

e y ricordiamo essere uguale al $\cos(\theta)$.

Riportiamo l'espressione esplicita per alcune componenti di $\Omega_{k'k}$,

$$\begin{aligned} \Omega_{00} &= 1 + \frac{\lambda}{2} \ln \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right), & \Omega_{k'1} &= \lambda \Omega_{k'0} + \frac{1}{3} \delta_{k'1}, \\ \Omega_{20} &= \frac{1}{2} + \frac{3\lambda^2-1}{2} \Omega_{00}, & \Omega_{22} &= \frac{1}{5} + \frac{3\lambda^2-1}{2} \Omega_{20}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Riprendendo le formule (3.69) e (3.70) abbiamo che la suscettività χ è data da

$$\chi = \frac{g\mu_B}{2} \frac{1}{H} \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}}, \quad (3.90)$$

dove

$$\delta n_{\mathbf{p}} = -\frac{\partial n_{\mathbf{p}}^o}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}^o} u_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_f) \left(\sum_{l=0}^{\infty} u_l P_l(\cos(\theta)) \right) = N(\epsilon_f) u_0. \quad (3.91)$$

l'integrale in \mathbf{p} porta un'integrazione $d(\cos \theta)$, che annulla tutti i contributi per $l > 0$ della precedente espressione.

Possiamo trovare u_0 come soluzione del sistema ottenuto dalla (3.87)

$$\begin{pmatrix} 1 + \Omega_{00} F_0^a & \frac{1}{3} \Omega_{01} F_1^a \\ \Omega_{10} F_0^a & \frac{1}{3} (1 + \Omega_{11} F_1^a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = -\left(\frac{g\mu_B H(\mathbf{q}, \omega)}{2} \right) \begin{pmatrix} \Omega_{00} \\ \Omega_{10} \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Sostituendo il valore di u_0 , troviamo

$$\chi = \left(\frac{g\mu_B}{2} \right)^2 N(\epsilon_f) \frac{\Omega_{00}}{1 + \left[F_0^a + \lambda^2 \frac{F_1^a}{1 + \frac{1}{3} F_1^a} \right] \Omega_{00}}. \quad (3.93)$$

Una espressione simile, ma con le sostituzioni

$$\begin{aligned} F_0^a &\rightarrow F_0^s \\ F_1^a &\rightarrow F_1^s \end{aligned} \quad (3.94)$$

si sarebbe ottenuta se avessimo calcolato la risposta del liquido ad una perturbazione esterna esercitata da un campo scalare φ , anzichè da \mathbf{H} . In questo caso il campo si sarebbe accoppiato all'operatore densità del sistema non più a quello di spin, comportando delle fluttuazioni di densità $\sim \chi^{dens} \varphi$, dove la χ^{dens} è chiamata compressibilità della materia nucleare, da distinguere dalla (3.93) che chiameremo χ^{spin} .

Capitolo 4

Risposta della materia neutronica

4.1 Parametri di Landau, risposta del liquido di Fermi

Nella teoria di Landau f è la derivata funzionale seconda, dell'energia rispetto la funzione di distribuzione n . Possiamo scrivere

$$\delta E = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^o \delta n_{\mathbf{p}\sigma} + \sum_{\mathbf{p}\sigma\mathbf{p}'\sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\mathbf{p}\sigma} \delta n_{\mathbf{p}'\sigma'}. \quad (4.1)$$

Per un sistema a molti corpi, una prima approssimazione della funzione f , può essere data variando l'energia di Hartree-Fock, che corrisponde

$$E^{H.F} = \left\{ \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{2m} + \sum_{\mathbf{p}\sigma\mathbf{p}'\sigma'} [\langle \mathbf{p}(1)\sigma(1), \mathbf{p}'(2)\sigma'(2) | V(q) | \mathbf{p}(1)\sigma(1), \mathbf{p}'(2)\sigma'(2) \rangle - \langle \mathbf{p}(1)\sigma(1), \mathbf{p}'(2)\sigma'(2) | V(q) | \mathbf{p}'(1)\sigma'(1), \mathbf{p}(2)\sigma(2) \rangle] \frac{1}{2V} n_{\mathbf{p}'\sigma'} \right\} n_{\mathbf{p}\sigma}. \quad (4.2)$$

A secondo membro della precedente espressione abbiamo due processi d'interazione. Nel primo, le particelle conservano i loro numeri quantici, questo è il termine di Hartree, nel secondo, denominato termine di Fock, le due particelle si scambiano di stato. Nei due casi avremo un impulso trasferito q , rispettivamente uguale a zero e a $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Riscriviamo ora l'energia come

$$E^{H.F} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{2m} n_{\mathbf{p}\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}\sigma\mathbf{p}'\sigma'} (V(0) - V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')) n_{\mathbf{p}\sigma} n_{\mathbf{p}'\sigma'}, \quad (4.3)$$

dove, in teoria di CBF si ha che

$$V(0) = \sum_{n=1}^6 \int d\mathbf{r} w^n(r) A^n(\cos(\theta)), \quad (4.4)$$

$$V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \sum_{n=1}^6 \int d\mathbf{r} w^n(r) e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} B^n(\cos(\theta)), \quad (4.5)$$

con θ indichiamo l'angolo tra il vettore \mathbf{r} e l'asse di quantizzazione dello spin z , $w^n(r)$ è il potenziale effettivo, vedi paragrafo 1.5 che esplicita la dipendenza dell'energia d'interazione dalla distanza tra le due particelle, mentre la dipendenza dallo spin, è racchiusa negli elementi di matrice A^n e B^n , che sono dati da

$$A^n(\cos(\theta)) = \langle \sigma(1)\sigma'(2) | O^n | \sigma(1)\sigma'(2) \rangle, \quad (4.6)$$

$$B^n(\cos(\theta)) = \langle \sigma(1)\sigma'(2) | O^n | \sigma'(1)\sigma(2) \rangle, \quad (4.7)$$

dove i sei operatori scelti per parametrizzare l'interazione sono

$$\begin{aligned} O_1 &= 1, O_2 = (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2), O_3 = (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2), \\ O_4 &= (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2), O_5 = S_{12}, O_6 = S_{12}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2), \end{aligned} \quad (4.8)$$

e

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2). \quad (4.9)$$

A questo punto abbiamo tutto ciò che ci occorre per poter calcolare la f , che sarà data da

$$\frac{\delta E^{H.F.}}{\delta n_{\mathbf{p}\sigma} \delta n_{\mathbf{p}'\sigma'}} = f(\mathbf{p}, \sigma, \mathbf{p}', \sigma') = \frac{1}{V} \left(V(0) - e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right), \quad (4.10)$$

che riscriviamo

$$f(\mathbf{p}, \sigma, \mathbf{p}', \sigma') = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^6 \int d\mathbf{r} w^n(r) \left(A^n(x) - e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} B^n(x) \right), \quad (4.11)$$

dove $x = \cos(\theta)$. Chiamiamo $\mathbf{h} = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ ed esprimiamo l'integrale in coordinate polari

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \sigma, \mathbf{p}', \sigma') &= \frac{1}{V} \sum_{n=1}^6 \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dx w^n(r) [A^n(x) \\ &\quad - e^{-i\mathbf{h}\cdot\mathbf{r}\cos(\gamma)} B^n(x)], \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove γ è l'angolo tra i vettori \mathbf{h} e \mathbf{r} .

Come abbiamo visto nel precedente capitolo, la dipendenza dallo spin delle funzioni di Landau $f(\mathbf{p}, \sigma, \mathbf{p}', \sigma')$, porta alla definizione di una parte simmetrica ed una antisimmetrica dell'interazione: $f^{s(a)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, date da

$$\begin{aligned} f^s(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{1}{2} [f_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + f_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')], \\ f^a(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{1}{2} [f_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - f_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Segundo la risoluzione dell'integrale (4.12) riportata nell'Appendice A, abbiamo per $f_{\uparrow\uparrow}$ e $f_{\uparrow\downarrow}$ le seguenti espressioni

$$f_{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{V} \int_{r_-}^{r_+} r^2 \, 4\pi [(w^1 + w^2 + w^3 + w^4)(1 - g_o) - \frac{2}{5} g_2 P_2(x')(w^5 + w^6)] dr, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} f_{\uparrow\downarrow} &= \frac{1}{V} \int_{r_-}^{r_+} r^2 \, 4\pi [(w^1 + w^2 - w^3 - w^4) - g_o(2w^3 + 2w^4) \\ &\quad + \frac{2}{5} g_2 P_2(x')(w^5 + w^6)]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Quello che a noi interessa conoscere riguardo la f , sono i suoi primi due termini di sviluppo in polinomi di Legendre $P_m(\xi)$, dove ξ è l'angolo tra \mathbf{p} e \mathbf{p}' , relativi alla parte simmetrica e antisimmetrica $f^{s(a)}$.

Scriviamo quindi

$$f^{s(a)}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{s(a)} P_j(\xi); \quad f_j^{s(a)} = \frac{2j+1}{2} \int_0^\pi d\xi \sin(\xi) P_j(\xi) f^{s(a)}(\xi). \quad (4.16)$$

La dipendenza dall'angolo ξ nelle $f_{\uparrow\uparrow}$ e $f_{\uparrow\downarrow}$, è nascosta in g_k , cioè nel fattore esponenziale e^{-ihry} , essendo

$$h = 2p_F \sin(\xi/2). \quad (4.17)$$

Utilizzando i risultati (A.22) e (A.23), possiamo riscrivere la parte simmetrica e antisimmetrica di f come,

$$f^s = \frac{2\pi}{V} \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 [2(w^1 + w^2) - g_o(3w^3 + 3w^4 + w^1 + w^2)], \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} f^a &= \frac{2\pi}{V} \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 [2(w^3 + w^4) + g_o(-w^1 - w^2 + w^3 + w^4) \\ &\quad - \frac{2}{5} g_2 P_2(x')(w^5 + w^6)], \end{aligned} \quad (4.19)$$

inoltre facendo uso delle (A.24), (A.25) e (A.26) abbiamo i primi termini dello sviluppo in polinomi di Legendre per f^s e f^a

$$\begin{aligned} f_0^s &= \frac{2\pi}{V} \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 \left[2(w^1 + w^2) - \frac{\sin(p_f r)^2}{(p_f r)^2} (3w^3 + 3w^4 + w^1 + w^2) \right], \\ f_1^s &= \frac{-2\pi}{V} \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 \frac{3(-p_f r \cos(p_f r) + \sin(p_f r))^2}{(p_f r)^4} (3w^3 + 3w^4 + w^1 + w^2), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} f_0^a &= \frac{2\pi}{V} \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 \left[2(w^3 + w^4) + \frac{\sin(p_f r)^2}{(p_f r)^2} (-w^1 - w^2 + w^3 + w^4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 - 10p_f r (2 + \cos(2p_f r)) + 15 \sin(2p_f r)}{5(4p_f^2 r^3)} P_2(x') (w^5 + w^6) \right], \\ f_1^a &= \frac{2\pi}{V} \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 \frac{3(-p_f r \cos(p_f r) + \sin(p_f r))^2}{(p_f r)^4} (-w^1 - w^2 + w^3 + w^4) \\ &\quad + \frac{12(-8 + 4p_f^2 r^2 + (8 - 2p_f^2 r^2) \cos(2p_f r) + 7p_f r \sin(2p_f r))}{p_f^4 r^4} P_2(x') (w^5 + w^6). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Come si può notare dalle precedenti espressioni, le funzioni di Landau dipendono da $x' = \cos(\theta')$, cioè dall'angolo che il vettore $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$, forma con l'asse di quantizzazione dello spin, l'asse z .

Quello che possiamo fare, per semplificare la dipendenza di tali funzioni da $\cos(\theta')$, è fare una media su tale angolo. Avremo perciò che il termine con $P_2(\cos(\theta'))$ si annullerà, poichè il valor medio di tale polinomio è nullo, per via dell'ortogonalità dei polinomi di Legendre

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_2(\cos(\theta')) d \cos(\theta') = 0, \quad (4.22)$$

mentre i termini che non dipendono da θ' rimangono costanti.

Dalle precedenti funzioni $f_l^{s(a)}$, si possono ricavare i rispettivi parametri di Landau $F_l^{s(a)}$ adimensionali, utilizzando

$$F_l^{s(a)} = \frac{V m^* p_f}{\pi^2 \hbar^2} f_l^{s(a)}. \quad (4.23)$$

In Fig.(4.1) sono riportati gli andamenti dei parametri di Landau in funzione della densità, i cui valori sono trascritti nella tabella seguente. Una volta noti i parametri di Landau, possiamo ricavare la massa efficace Fig(4.2) tramite la relazione

$$m^* = m \frac{1}{1 + \frac{F_0^s}{3}}, \quad (4.24)$$

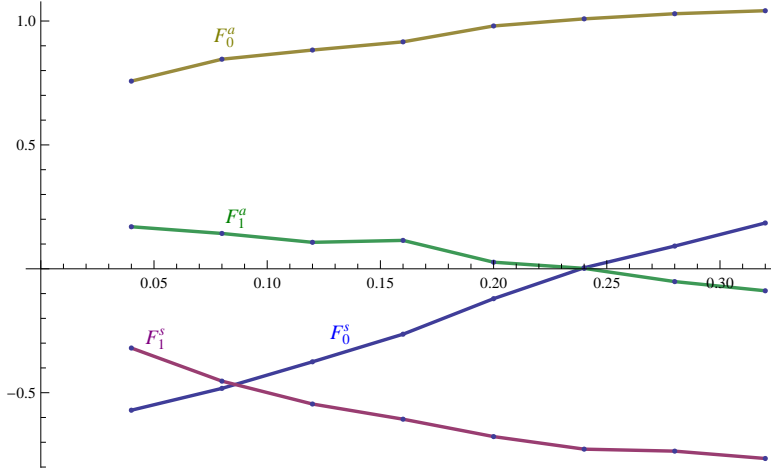


Figura 4.1: Parametri di Landau al variare della densità espressa in fm^{-3}

$n(fm^{-3})$	F_0^s	F_1^s	F_0^a	F_1^a
0.04	-0.571	-0.320	0.757	0.170
0.08	-0.483	-0.453	0.846	0.143
0.12	-0.375	-0.546	0.883	0.107
0.16	-0.264	-0.607	0.916	0.115
0.20	-0.121	-0.677	0.980	0.027
0.24	0.004	-0.728	1.009	0.002
0.28	0.092	-0.736	1.029	-0.052
0.32	0.185	-0.765	1.041	-0.089

Tabella 4.1: Tabella parametri Landau Vs densità

Utilizzando l'espressione della suscettività magnetica χ^{spin} e per la compressibilità χ^{dens} calcolate con la teoria di Landau nel precedente capitolo e facendo uso del teorema di fluttuazione e dissipazione, possiamo calcolare i fattori di forma per la densità S e spin-densità S_{ij} per eccitazioni di singola particella.

Definiamo

$$\tilde{\chi} = \left(\frac{2}{g\mu_B} \right)^2 \chi^{spin} = N(\epsilon_f) \frac{\Omega_{00}}{1 + \left[F_0^a + \lambda^2 \frac{F_1^a}{1 + \frac{1}{3} F_1^a} \right] \Omega_{00}}, \quad (4.25)$$

$$\chi^{dens} = N(\epsilon_f) \frac{\Omega_{00}}{1 + \left[F_0^s + \lambda^2 \frac{F_1^s}{1 + \frac{1}{3} F_1^s} \right] \Omega_{00}}, \quad (4.26)$$

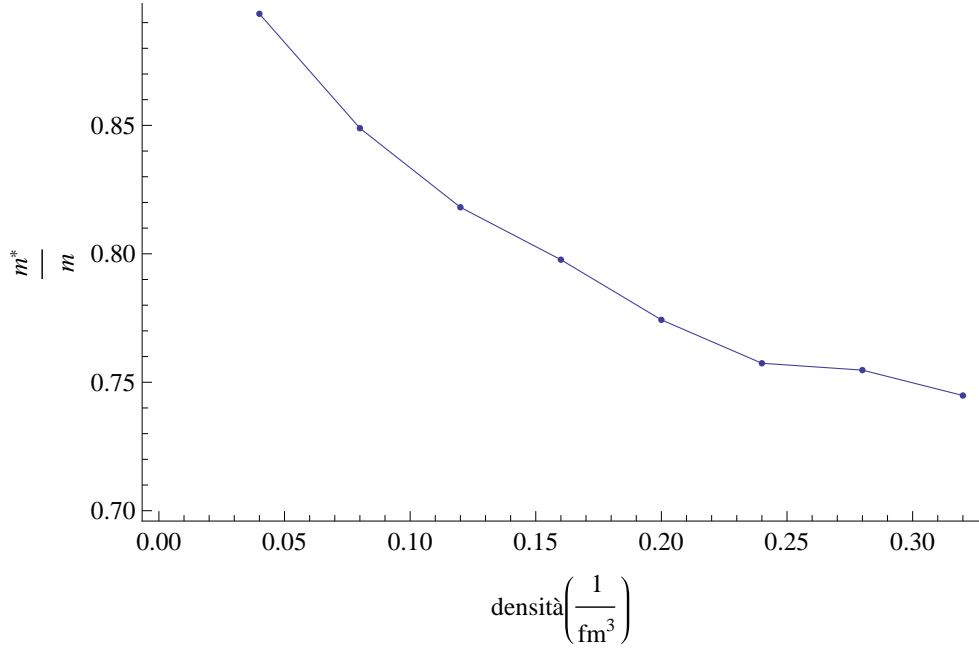


Figura 4.2: Rapporto tra massa efficace e massa effettiva, al variare della densità, (fm^{-3}).

dove ricordiamo che

$$\Omega_{00} = 1 + \frac{\lambda}{2} \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right). \quad (4.27)$$

e $\lambda = \omega/kv_f$, dove ω e k sono l'energia ed il modulo dell'impulso trasferiti nel processo di scattering.

Il teorema di fluttuazione e dissipazione si esprime scrivendo

$$\begin{aligned} S_{ij}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{-2}{n} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \text{Im} \chi_{ij}^{spin}(\mathbf{k}, \omega), \\ S(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{-2}{n} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \text{Im} \chi^{dens.}(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (4.28)$$

dove nel primo caso consideriamo una risposta uguale in tutte le direzioni, così il tensore χ_{ij} è diagonale, quindi $S_{ij} = \delta_{ij}S$. I risultati per $S_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ e $S(\mathbf{k}, \omega)$ riportati in Fig.(4.3) e Fig.(4.4) (le unità di misura sono quelle in cui $\hbar = 1$ e $c = 1$).

Per quanto riguarda i moti collettivi di suono zero, gli unici presenti nella materia neutronica sono quelli associati a fluttuazioni di spin, in quanto i valori di F_o^s sono negativi o circa nulli, perciò per le condizioni di stabilità del suono zero, possiamo affermare che essi soffrono di un forte "Landau damping". I moti collettivi si propagano a velocità $c_s = \lambda_o v_f(n)$ dove λ_o rappresenta il

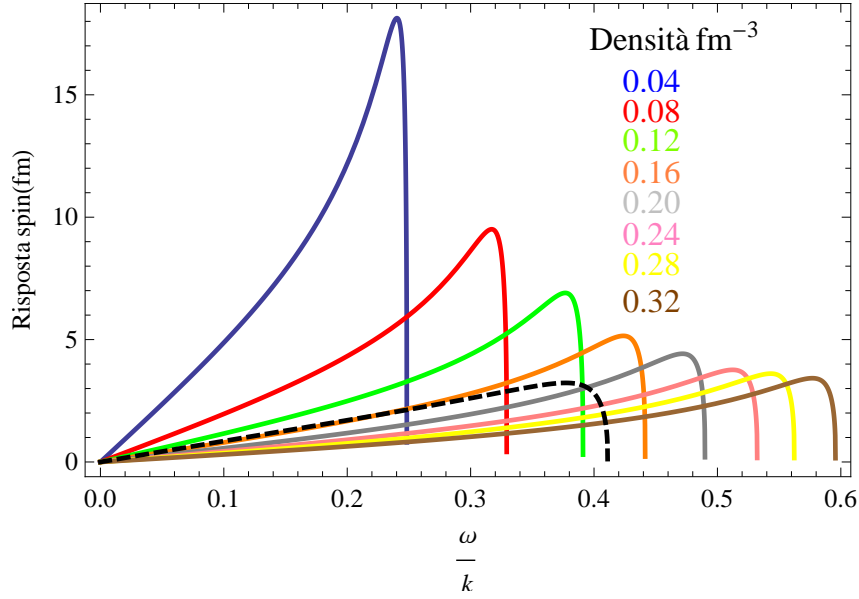


Figura 4.3: Temperatura nulla: risposta nel canale di spin $S_{ij} = \delta_{ij}S$ per valori della densità riportati in colonna. La figura tratteggiata è l'andamento di riferimento [?], relativa a $0.16 fm^{-3}$.

polo della suscettività χ^{spin} . Andando a riprendere l'equazione 4.25, abbiamo che λ_o è soluzione dell'equazione

$$1 + \left[F_0^a + \lambda^2 \frac{F_1^a}{1 + \frac{1}{3}F_1^a} \right] \Omega_{00} = 0, \quad (4.29)$$

In Tab.4.2 sono riportati i valori di λ_o e delle velocità dei moti collettivi, al variare della densità. Ricordiamo che le unità utilizzate sono quelle per cui $\hbar = 1, c = 1$, perciò i valori in tabella sono adimensionali.

La risposta nel canale di spin di suono nullo è data da[?]

$$S_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} \frac{N(\epsilon_f) k v_f(n)}{nVB} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \times [\delta(\omega - c_s k) - \delta(\omega + c_s k)], \quad (4.30)$$

dove

$$B = \left\{ F_o^a + \left[F_1^a / \left(1 + \frac{1}{3}F_1^a \right) \right] \lambda_o^2 \right\} A / 2\pi, \\ A = 2F_1^a \lambda_o \Omega_{00}(\lambda_o) / \left(1 + \frac{1}{3}F_1^a \right) + \left[F_o^a + F_1^a \lambda_o^2 / \left(1 + \frac{1}{3}F_1^a \right) \right] \Omega'_{00}(\lambda_o), \quad (4.31)$$

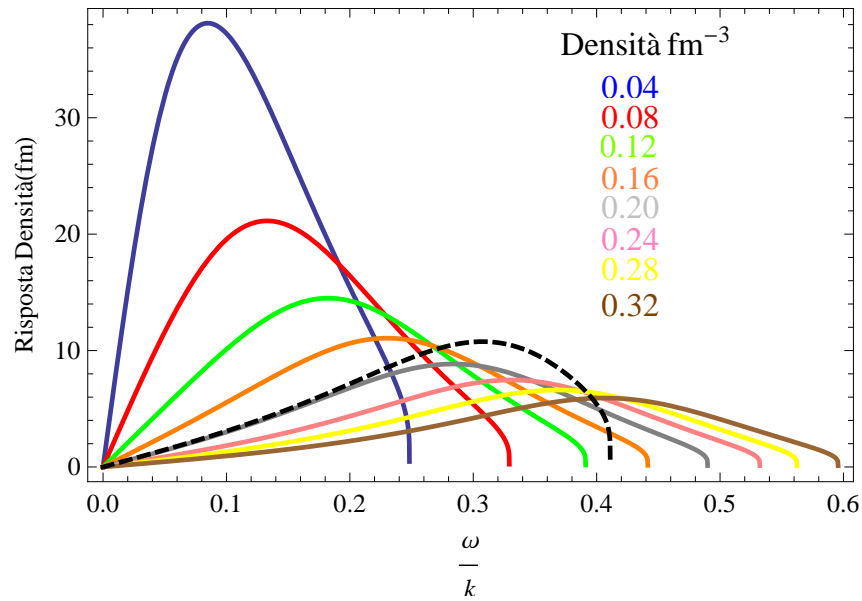


Figura 4.4: Temperatura nulla: risposta nel canale densità S per valori della densità riportati in colonna. La figura tratteggiata è l'andamento di riferimento [?], relativa a $0.16 fm^{-3}$.

e $\Omega_{00}(\lambda_o)'$ è la derivata di Ω_{00} calcolata nel polo λ_o . La risposta collettiva sarà perciò una δ di Dirac, per valori di $\omega = \pm c_s k$.

$n(fm^{-3})$	λ_o	c_s
0.04	1.037	0.258
0.08	1.044	0.347
0.12	1.044	0.408
0.16	1.048	0.463
0.20	1.045	0.512
0.24	1.045	0.556
0.28	1.041	0.586
0.32	1.039	0.619

Tabella 4.2: Velocità dei moti collettivi c_s e poli λ_o , al variare della densità.

4.2 Cammino libero medio $T=0$

Il cammino libero medio L del neutrino, è il prodotto tra la sua velocità ed il tempo τ che intercorre tra due collisioni: $L = c * \tau$.

Ponendo ancora una volta la velocità della luce uguale ad uno e prendendo la formula per τ espressa alla fine del primo capitolo, otteniamo

$$1/L = W_{fi} [1 - n(\mathbf{q}')] \times \{1 + e^{(\mu_\nu - q^o)\beta}\}, \quad (4.32)$$

dove $\beta = 1/T$ per $k_B = 1$ e ricordiamo che $(1 - n(\mathbf{q}'))$ rappresenta la probabilità che lo stato finale di impulso \mathbf{q}' sia inizialmente libero. La (4.32) si riscrive facendo uso dell'espressione esplicita di W_{fi}

$$1/L = -\frac{VG_f^2 n}{4} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \{C_A^2(3 - \cos\theta)S(\mathbf{k}, \omega) + (1 + \cos\theta)S(\mathbf{k}, \omega)\} \\ \times [1 - n(\mathbf{q}')] [1 + e^{(\mu_\nu - E_\nu)\beta}], \quad (4.33)$$

dove \mathbf{k} è l'impulso trasferito $\mathbf{k} = \mathbf{q} - \mathbf{q}'$, mentre E_ν è l'energia iniziale del neutrino.

Il cammino libero medio è la somma del contributo derivante dalle eccitazioni di singola particella e quelle di moto collettivo. In generale quindi scriveremo

$$L_{tot} = L_{sp} + L_{coll}. \quad (4.34)$$

All'interno delle stelle di neutroni la temperatura è circa $10^9 K$. L'energia termica associata è dell'ordine di $100 KeV$, molto piccola rispetto le energie di Fermi dei neutroni che sono dell'ordine di $(10 - 100) MeV$, al variare della

densità. Perciò calcoleremo il cammino libero medio dei neutrini a temperatura nulla. Inoltre considereremo il caso in cui $\mu_\nu = 0$, cioè il potenziale chimico dei neutrini è zero. Queste sono le condizioni presenti nello stadio finale dell'evoluzione del residuo di supernova. Infatti la stella transita da una prima fase in cui la materia è calda $T \simeq (30 - 40)MeV$ e in equilibrio con il gas di neutrini intrappolati, ad una condizione in cui i neutrini sono liberi o vengono diffusi, in una materia sostanzialmente fredda ($T \simeq 0$).

Nel caso di neutrino non degeneri e temperatura nulla, la formula (4.33) si semplifica divenendo

$$1/L = -V \frac{G_f^2 n}{4} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} C_A^2 (3 - \cos\theta) S(\mathbf{k}, \omega) + (1 + \cos\theta) S(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.35)$$

Per prima cosa bisogna fare alcune considerazioni sul dominio d'integrazione.

Prendendo in esame la cinematica dell'urto tra il neutrino ed il neutrone di impulsi iniziali e finali rispettivamente $(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ e $(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, abbiamo per la conservazione dell'energia-impulso

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m^*} + q &= \frac{p'^2}{2m^*} + q', \\ \mathbf{p} + \mathbf{q} &= \mathbf{p}' + \mathbf{q}', \end{aligned} \quad (4.36)$$

queste condizioni comportano delle restrizioni di natura cinematica al dominio dei valori possibili di ω e \mathbf{k} , tramite le seguenti relazioni

$$-kv + \frac{k^2}{2m^*} \leq \omega \leq kv + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (4.37)$$

$$|\omega| \leq k \leq |\omega - 2q|. \quad (4.38)$$

La teoria di Landau impone un'ulteriore restrizione per i moti collettivi

$$\omega = \pm c_s k. \quad (4.39)$$

Il dominio identificato dalle condizioni precedenti è mostrato in Fig.(4.5), dove si possono vedere i due archi di parabola corrispondenti alla (4.37), per valori di $v = v_f$. Bisogna però considerare un ulteriore vincolo da applicare alle equazioni cinetiche, esercitato dalla statistica di Fermi-Dirac.

Nel caso di neutrini non degeneri, il blocco di Pauli non dà alcuna limitazione aggiuntiva sull'impulso-energia che il neutrino può trasferire al sistema di neutroni. Viceversa, essendo i neutroni altamente degeneri a temperatura nulla, essi non potranno trasferire energia ai neutrini. Perciò il dominio di ω

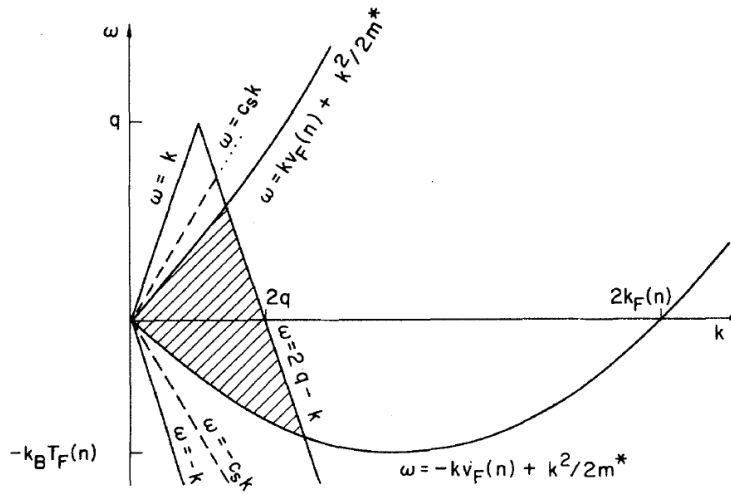


Figura 4.5: Spettri d'eccitazione di singola particella e moti collettivi[?]. La regione rigata è quella consentita dalle restrizioni cinematiche. Le due linee tratteggiate corrispondono ai moti collettivi. Nella figura $k_B T_f = k_f^2/2m^*$, è la massima energia che può cedere il sistema neutronico, senza violare il blocco di Pauli, nel limite di temperatura nulla, si riduce a zero.

si estenderà per valori $\omega \geq 0$ come in Fig.4.6.

Riscriviamo

$$\cos \theta = \hat{q} \cdot \hat{q}' = \frac{1 - (\omega/q) + \frac{1}{2} (\omega/q)^2 - \frac{1}{2} (k/q)^2}{1 - (\omega/q)}, \quad (4.40)$$

e

$$\cos \gamma = \hat{q} \cdot \hat{k} = \frac{1}{2} (k/q) + \omega/k - \frac{1}{2} (\omega^2/kq). \quad (4.41)$$

Possiamo trasformare l'integrazione in $d\mathbf{k}$ in un'integrazione su $2\pi dk k^2 d(\cos \gamma)$, e trasformare l'integrale sulla variabile angolare, in un integrale sull'energia scambiata ω

$$d(\cos \gamma) = [1 - (\omega/q)] \left(\frac{d\omega}{k} \right), \quad (4.42)$$

Quindi, rifacendosi alla Fig.(4.6), una volta trascurato il termine di rinculo $k^2/2m^*$ nella (4.37), possiamo dividere l'integrale in $dkd\omega$ in due regioni

$$\int_0^{2q/(1+v_f)} dk \int_0^{kv_f} + \int_{2q/(1+v_f)}^{2q} dk \int_0^{2q-k}. \quad (4.43)$$

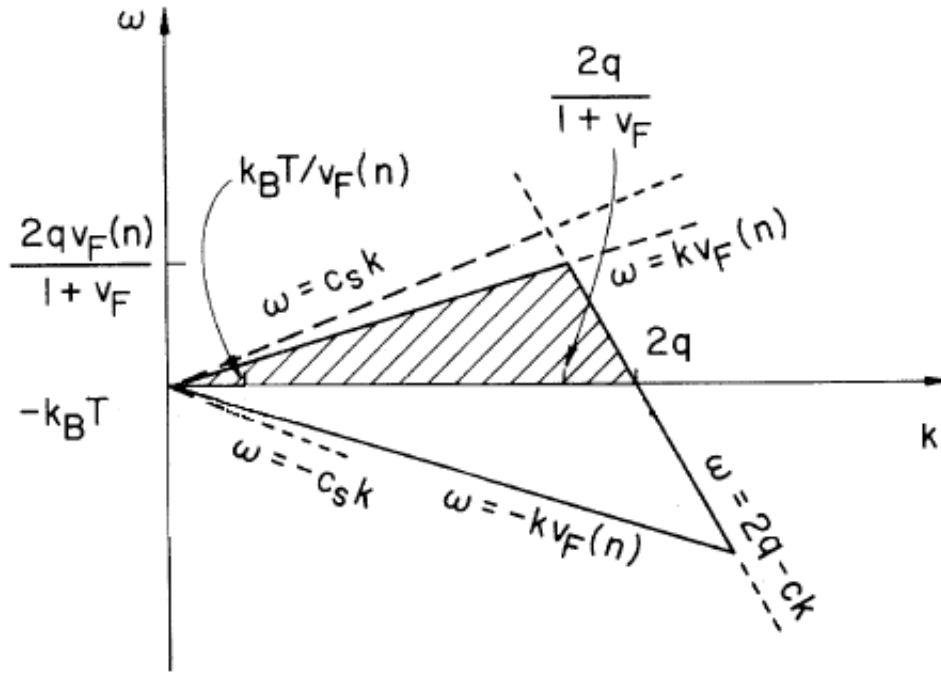


Figura 4.6: Superficie celeste: dominio d'integrazione per temperatura nulla. Le linee tratteggiate corrispondono ai due moti collettivi $\omega = c_s k$ e $\omega = -c_s k$. Quest'ultimo non è possibile a temperatura zero.

Tramite semplici passaggi algebrici, facendo uso delle (4.28), (4.40), (4.41), possiamo riscrivere il cammino libero medio per eccitazioni di singola particella come

$$\begin{aligned}
 (1/L)_{sp} &= (1/L)_{GT} + (1/L)_F = \\
 &= \frac{G^2(m^*)^2 v_f}{8\pi^4} \int dk d\omega k \left\{ \left[2 \left(1 - \frac{\omega}{q} \right) + \frac{1}{2q^2} (\omega^2 - k^2) \right] \text{Im}(\chi^{dens}) + \right. \\
 & \quad \left. C_A^2 \left[2 \left(1 - \frac{\omega}{q} \right) - \frac{1}{2q^2} (\omega^2 - k^2) \right] \text{Im}(\chi^{spin}) \right\},
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

dove i termini $(1/L)_{GT}$ e $(1/L)_F$ detti rispettivamente "Gamow-Teller" e "Fermi", si riferiscono alla parte assiale e scalare dell'interazione.

Per quanto riguarda i moti collettivi, possiamo considerare solamente quelli relativi a $\omega = +c_s k$, sempre per il fatto che la materia neutronica degenera, non può cedere energia al neutrino per via del blocco di Pauli.

In questo caso il cammino libero medio può essere scritto come

$$(1/L)_{coll} = \frac{G^2 C_A^2 (m^* v_f)^2}{16\pi^4 B} \int_0^{2q/(1+c_s)} dk k^2 \left[2 \left(1 - \frac{\omega}{q} \right) - \frac{1}{2q^2} (\omega^2 - k^2) \right] \times \delta(\omega - c_s k), \quad (4.45)$$

dove B è dato nella (4.31).

Il cammino libero medio totale L sarà dato dalla formula

$$1/L = (1/L)_{sp} + (1/L)_{coll}. \quad (4.46)$$

In Fig.4.7, Fig.4.8 e Fig.4.9, sono riportati gli andamenti del cammino libero medio in funzione della densità, rispettivamente per un liquido di neutroni, cioè particelle con interazione ed un gas di neutroni, cioè particelle libere, per valori di $q = (0.1, 1, 10) Mev$

Il cammino libero medio nel gas, L_g , è stato calcolato svolgendo gli stessi passaggi che ci hanno portato alla (4.44), dove la parte immaginaria della risposta χ , sarà quella della (4.26) una volta che siano stati messi a zero i parametri di Landau ed inoltre si è tenuto conto del fatto che, in assenza di interazioni non sono presenti moti collettivi.

I moti collettivi hanno l'effetto di diminuire il cammino libero medio del neutrino, nonostante ciò, esso rimarrà maggiore nel caso dei liquidi piuttosto che in quello del gas, come mostrato in Fig.(4.10)

Figura 4.7: Cammino libero medio nel liquido e nel gas di neutroni, in funzione della densità (fm^{-3}), per $q = 0.1 Mev$, a temperature nulle.

Figura 4.8: Cammino libero medio nel liquido e nel gas di neutroni, in funzione della densità (fm^{-3}), per $q = 1 Mev$ a temperature nulle

Figura 4.9: Cammino libero medio nel liquido e nel gas di neutroni, in funzione della densità (fm^{-3}), per $q = 10 Mev$ a temperature nulle

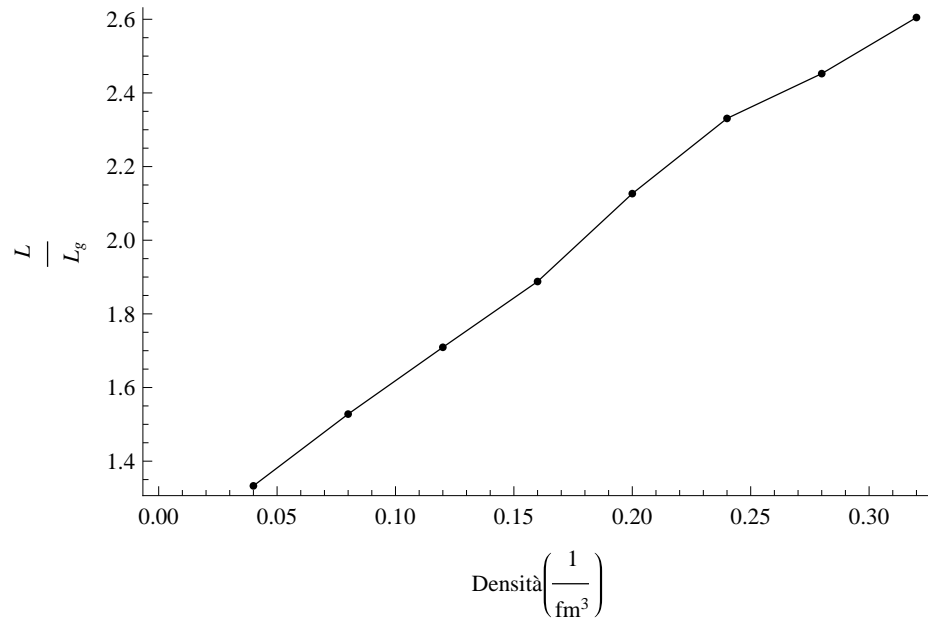


Figura 4.10: Rapporto tra il cammino libero medio calcolato nel liquido e quello calcolato nel gas, in funzione della densità (fm^{-3}). Tale rapporto è indipendente dalle energie iniziali del neutrino considerate

Come si può notare dalle Fig.4.7, Fig.4.8 e Fig.4.9, il cammino libero medio scala come q^{-3} . Questo lo si può facilmente verificare sia per i moti collettivi, andando ad integrare la (4.45), chè per l'eccitazione di singola particella, utilizzando nella (4.44), $Im(\chi) \propto \lambda = \omega/(kv_f)$, valida per $\lambda \ll 1$.

Notiamo inoltre che, i valori trovati dei cammini liberi medi per temperature nulle, sono molto più grandi del tipico raggio di una stella di neutroni, $(10 - 15)Km$, per neutrini di energia $(0.1, 1)MeV$. In tal caso, il neutrino riesce ad uscire dalla stella senza interagire con la materia che la compone.

Figura 4.11: Superficie celeste: dominio d'integrazione tipo 1, per eccitazioni di singola particella. L'energia termica $-k_B T < -k v_f$. I punti segnati in figura hanno coordinate: $A = (2q/(v_f+1), v_f 2q/(v_f+1))$, $B = (2q, 0)$, $C = (2q/(1-v_f), -v_f 2q/(1-v_f))$

Figura 4.12: Superficie celeste: dominio d'integrazione tipo 2, per eccitazioni di singola particella. L'energia termica $-k_B T > -k v_f$. I punti segnati in figura hanno coordinate: $D = (2q/(v_f+1), v_f 2q/(v_f+1))$, $E = (2q, 0)$, $F = (2q + k_B T, -k_B T)$

4.3 Cammino libero medio $T \neq 0$

Per calcolare il cammino libero medio a temperatura diversa da zero, il procedimento da attuare è lo stesso di quello affrontato nel precedente paragrafo, l'unica differenza, è che questa volta nei fattori $S_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ e $S(\mathbf{k}, \omega)$ definiti come nella (4.28), si dovrà mantenere la dipendenza dalla temperatura.

Per neutrini non degeneri, l'integrale da svolgere è quello dato nella (4.35), che nel caso di eccitazioni di singole particelle, si riduce all'integrazione della (4.44). Questa volta però i domini d'integrazione saranno quelli in Fig.4.11 e Fig.4.12.

Per quanto riguarda l'integrazione relativa ai moti collettivi, contrariamente al caso di temperature nulle, questa volta dovremo considerare anche valori di ω negativi: $\omega = -c_s k$ ed il segno meno nella (4.30). Quindi adesso il neutrino oltre a creare moti collettivi, potrà anche assorbirli.

I risultati mostrati in Fig.4.13, sono inerenti a neutrini con energie di $40 Mev$, per temperature di $(35, 40, 45, 50) Mev$. Con l'aumento della temperatura, aumenta anche lo spazio delle fasi a disposizione del sistema nello stato finale ed il numero di neutroni che possono cedere energia e scatterare il neutrino, questo perchè l'energia termica rende i neutroni meno degeneri, con risultato che la sezione d'urto aumenta, mentre il cammino libero medio diminuisce, rispetto al caso $T = 0$.

Nei calcoli, il dominio d'integrazione si restringe all'aumentare della densità, passando da una situazione tipo Fig.4.11 ad una del tipo in Fig.4.12, col restringersi del dominio d'integrazione, va a diminuire lo spazio delle fasi per il neutrino finale, con conseguente diminuzione della sezione d'urto e perciò aumento del cammino libero medio. Questo genera l'andamento crescente di L in funzione della densità.

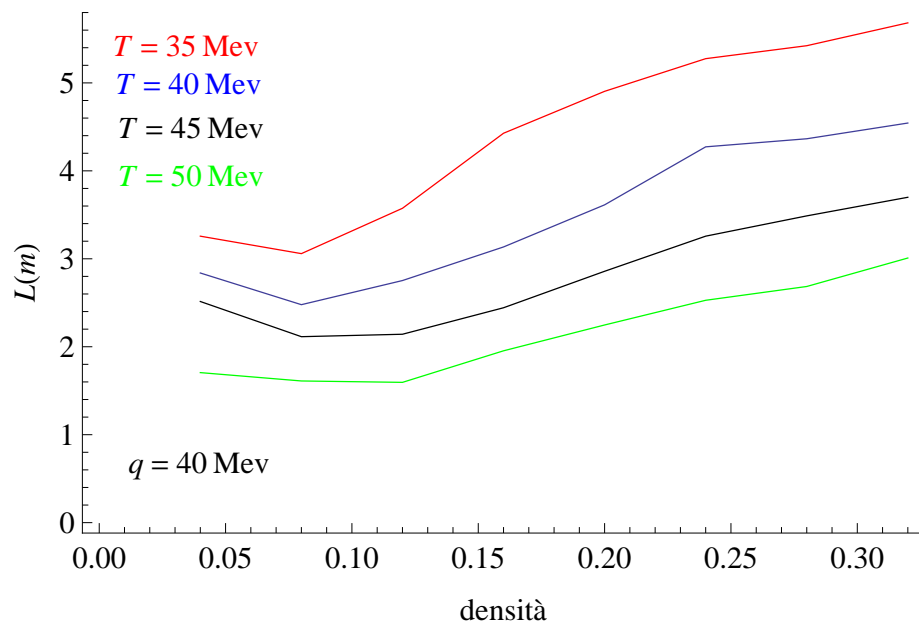


Figura 4.13: Cammino libero medio, per energie del neutrino di $40 Mev$ e temperature di $(35, 40, 45, 50) Mev$. La densità è espressa in fm^{-3}

Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo studiato la propagazione di neutrini non degeneri, cioè con potenziale chimico $\mu_\nu = 0$, nella materia di neutroni interagenti descritta secondo la teoria di Landau dei liquidi normali di Fermi.

Per prima cosa abbiamo determinato i parametri di Landau, tramite i quali è possibile esprimere le quantità d'interesse fisico del liquido neutronico, come la massa efficace e i fattori di forma di densità e densità di spin. I parametri sono stati calcolati utilizzando un potenziale effettivo dipendente dalla densità, ottenuto nell'ambito della teoria delle funzioni di base correlate. Questo potenziale, che ha la stessa struttura operatoriale dell'interazione di Yukawa di scambio di un pione, include gli effetti di schermo dovuti alla presenza del mezzo nucleare e, nel limite di densità nulla, si riduce ad un potenziale fenomenologico realistico. Inoltre, tiene conto degli effetti principali delle interazioni a tre nucleoni, che giocano un ruolo importante nel determinare la saturazione della materia nucleare.

Tramite i parametri di Landau, sono state calcolate le funzioni di risposta della materia ed i fattori di forma nei canali di densità e densità di spin, $S(\mathbf{k}, \omega)$ e $S(\mathbf{k}, \omega)$, in funzione dell'impulso e dell'energia trasferiti (\mathbf{k}, ω) , per densità comprese nel range $(0.04, 0.32) fm^{-3}$

I risultati ottenuti mostrano che il liquido di neutroni presenta modi di eccitazione collettivi al passaggio del neutrino solamente nel canale di spin, mentre i modi collettivi nel canale di densità sono smorzati a causa del fenomeno detto "Landau Damping". Abbiamo anche calcolato il cammino libero medio a temperatura nulla per neutrini di energie $q = (0.1, 1, 10) MeV$, nel caso di un liquido di neutroni interagenti, e confrontato il risultato ottenuto con quello corrispondente ad un gas di neutroni non interagenti.

Questa analisi mostra che, per tutti i valori delle energie del neutrino iniziali, l'effetto delle interazioni è un aumento, di un fattore circa due, del cammino libero medio del neutrino. Inoltre, si è trovato un andamento in energia del tipo q^{-3} .

I calcoli sono stati anche estesi a temperature diverse da zero, preci-

samente $(35, 40, 45, 50)MeV$, per energia iniziale dei neutrini $40MeV$. Abbiamo osservato una diminuzione del cammino libero medio, rispetto al caso $T = 0$, dovuta al fatto che, l'energia termica rende i neutroni meno degeneri. Di conseguenza aumenta il numero di neutroni che possono cedere energia al neutrino, tramite il processo di scattering e aumenta lo spazio delle fasi accessibile al sistema nello stato finale. L'effetto della temperatura è quello di aumentare la sezione d'urto e diminuire perciò il cammino libero medio. Inoltre, dai calcoli si evince un andamento crescente del cammino libero medio con la densità del mezzo, dovuto al fatto che lo spazio delle fasi accessibile al neutrino finale, e quindi la sezione d'urto, diminuiscono con la densità.

Per quanto riguarda gli sviluppi futuri del formalismo sviluppato in questa tesi, l'estensione al caso della materia costituita da protoni, neutroni e leptoni in equilibrio β non presenta alcuna difficoltà concettuale. Lo studio di questa forma di materia è di grande importanza per le applicazioni astrofisiche discusse nell'Introduzione.

Appendice A

Funzioni di Landau

Per svolgere l'integrale

$$f(\mathbf{p}, \sigma, \mathbf{p}', \sigma') = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^6 \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dx w^n(r) [A^n(x) - e^{-ihrcos(\gamma)} B^n(x)], \quad (\text{A.1})$$

partiamo dai termini relativi a $-e^{-ihrcos(\gamma)} B^n(x)$ facendo ricorso allo sviluppo in polinomi di Legendre. Chiamiamo $y = \cos(\gamma)$, dove ricordiamo che γ è l'angolo relativo ai vettori $\mathbf{h} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$, \mathbf{r} definiti dalle variabili angolari rispettivamente (θ', φ') e (θ, φ) . La funzione esponenziale e gli elementi B^n , possono essere scritti come

$$e^{-ihry} = \sum_{l=0}^{\infty} g_l P_l(y); \quad g_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 e^{-ihry} P_l(y) dy, \quad (\text{A.2})$$

e

$$B^n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^n P_k^n(x) : \quad b_k^n = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 B^n(x) P_k^n(x) dx. \quad (\text{A.3})$$

Per scrivere i polinomi $P_l(y)$, facciamo ricorso al teorema d'addizione per i polinomi di Legendre.

Una volta riscritto il $\cos(\gamma)$ tramite la relazione di trigonometria sferica

$$\cos(\gamma) = \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\varphi - \varphi'), \quad (\text{A.4})$$

possiamo scrivere

$$P_l(y) = P_l(x) P_l(x') + \sum_{s=1}^l \frac{2(l-s)!}{(l+s)!} P_l^s(x) P_l^s(x') \cos(s(\varphi - \varphi')). \quad (\text{A.5})$$

Moltiplicando la precedente uguaglianza per $P_k(x)$ ed integrando in $d\varphi dx$ otteniamo

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dx P_l(y) P_k(x) = \delta_{lk} \frac{4\pi}{2l+1} P_l(x'), \quad (\text{A.6})$$

l'integrazione in $d\varphi$ annulla i termini del secondo membro dell'uguaglianza che sono proporzionali a $\cos(s(\varphi - \varphi'))$, inoltre abbiamo utilizzato

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_k(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk}. \quad (\text{A.7})$$

Possiamo perciò riscrivere la nostra f come

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \sigma, \mathbf{p}', \sigma') &= \frac{1}{V} \sum_{n=1}^6 2\pi \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 w^n(r) \int_{-1}^1 dx A^n(x) \\ &\quad - \frac{1}{V} \sum_{n=1}^6 \int_{r_-}^{r_+} dr r^2 w^n(r) \sum_{k=0}^{\infty} g_k b_k^n \left(\frac{4\pi}{2k+1} P_k(x') \right). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Al variare di n , abbiamo i seguenti elementi di matrice per $A^n(x)$

$$\begin{aligned} \langle \uparrow(1) \uparrow(2) | O^n | \uparrow(1) \uparrow(2) \rangle &= 1, 1, 1, 1, a(x), a(x), \\ \langle \uparrow(1) \downarrow(2) | O^n | \uparrow(1) \downarrow(2) \rangle &= 1, 1, -1, -1, -a(x), -a(x), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

e per $B^n(x)$

$$\begin{aligned} \langle \uparrow(1) \uparrow(2) | O^n | \uparrow(1) \uparrow(2) \rangle &= 1, 1, 1, 1, a(x), a(x), \\ \langle \uparrow(1) \downarrow(2) | O^n | \downarrow(1) \uparrow(2) \rangle &= 0, 0, 2, 2, -a(x), -a(x), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

dove $a(x) = a(\cos(\theta)) = (3 \cos^2 \theta - 1)$.

Rinominiamo gli integrali relativi ad A^n

$$\begin{aligned} I(A_{\uparrow\uparrow}^n) &= \int_{-1}^1 \langle \uparrow(1) \uparrow(2) | O^n | \uparrow(1) \uparrow(2) \rangle dx, \\ I(A_{\uparrow\downarrow}^n) &= \int_{-1}^1 \langle \uparrow(1) \downarrow(2) | O^n | \uparrow(1) \downarrow(2) \rangle dx, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

abbiamo allora i seguenti risultati

$$\begin{aligned} I(A_{\uparrow\uparrow}^n) &= I(A_{\uparrow\downarrow}^n) = 2 & \text{se } n &= 1, 2, \\ I(A_{\uparrow\uparrow}^n) &= -I(A_{\uparrow\downarrow}^n) = 2 & \text{se } n &= 3, 4, \\ I(A_{\uparrow\uparrow}^n) &= -I(A_{\uparrow\downarrow}^n) = 0 & \text{se } n &= 5, 6. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Possiamo riscrivere l'ultimo termine del secondo membro della (A.8), facendo uso della (A.3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k b_k^n \frac{4\pi}{2k+1} P_k(x') = \sum_{k=0}^{\infty} 2\pi g_k P_k(x') \int_{-1}^1 B^n(x) P_k(x). \quad (\text{A.13})$$

Per svolgere l'integrale, partiamo da alcune considerazioni sui polinomi P_k . Questi si possono scrivere in forma generale come

$$P_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad (\text{A.14})$$

nota come formula di Rodriguez; tramite questa possiamo scrivere l'espressione esplicita per i polinomi $P_k(x)$, i primi quattro di questi saranno

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Quando gli elementi di matrice B^n sono costanti, dobbiamo risolvere un integrale del tipo

$$\int_{-1}^1 P_k(x) dx \equiv \int_{-1}^1 P_k(x) P_0(x) dx \neq 0 \quad \text{se } k = 0. \quad (\text{A.16})$$

Nella precedente si è sfruttata l'ortogonalità dei polinomi di Legendre. Similmente a quanto già fatto per gli elementi di matrice A^n , rinominiamo

$$\begin{aligned} K(B_{\uparrow\uparrow}^n) &= \int_{-1}^1 P_k(x) \langle \uparrow(1) \uparrow(2) | O^n | \uparrow(1) \uparrow(2) \rangle dx, \\ K(B_{\uparrow\downarrow}^n) &= \int_{-1}^1 P_k(x) \langle \uparrow(1) \downarrow(2) | O^n | \downarrow(1) \uparrow(2) \rangle dx, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

essendo B^n , costante per i primi quattro valori di n , abbiamo i seguenti risultati

$$\begin{aligned} K(B_{\uparrow\uparrow}^n) &= K(B_{\uparrow\downarrow}^n) = 0 & \text{se } n = 1, 2, 3, 4; \forall k > 0, \\ K(B_{\uparrow\uparrow}^n) &= 2 & \text{se } n = 1, 2, 3, 4; k = 0, \\ K(B_{\uparrow\downarrow}^n) &= 0 & \text{se } n = 1, 2; k = 0, \\ K(B_{\uparrow\downarrow}^n) &= 4 & \text{se } n = 3, 4; k = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

mentre per quanto riguarda i termini proporzionali ad $a(x) = 3x^2 - 1$, possiamo scrivere

$$\int_{-1}^1 P_k(x)(3x^2 - 1)dx = \int_{-1}^1 P_k(x)2P_2(x) \neq 0 \quad \text{se } k = 2, \quad (\text{A.19})$$

ed ottenere quindi

$$\begin{aligned} K(B_{\uparrow\uparrow}^n) &= -K(B_{\uparrow\downarrow}^n) = 0 & \text{se } n = 5, 6; k = 0, \\ K(B_{\uparrow\uparrow}^n) &= -K(B_{\uparrow\downarrow}^n) = 0 & \text{se } n = 5, 6; k = 1, \\ K(B_{\uparrow\uparrow}^n) &= -K(B_{\uparrow\downarrow}^n) = \frac{4}{5} & \text{se } n = 5, 6; k = 2, \\ K(B_{\uparrow\uparrow}^n) &= -K(B_{\uparrow\downarrow}^n) = 0 & \text{se } n = 5, 6; k > 2. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Possiamo perciò scrivere la (A.13), per il termine parallelo ed antiparallelo di spin

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^6 w^n(r) \sum_{k=0}^{\infty} 2\pi g_k P_k(x') \int_{-1}^1 B^n(x) P_k(x) dx = \\ (\uparrow\uparrow) &:= 4\pi \left[g_o (w^1 + w^2 + w^3 + w^4) + \frac{2}{5} g_2 P_2(x') (w^5 + w^6) \right], \quad (\text{A.21}) \\ (\uparrow\downarrow) &:= 4\pi \left[g_o (2w^3 + 2w^4) - \frac{2}{5} g_2 P_2(x') (w^5 + w^6) \right], \end{aligned}$$

similmente avremo

$$f_{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{V} \int_{r_-}^{r_+} r^2 4\pi [(w^1 + w^2 + w^3 + w^4)(1 - g_o) - \frac{2}{5} g_2 P_2(x')(w^5 + w^6)] dr, \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} f_{\uparrow\downarrow} &= \frac{1}{V} \int_{r_-}^{r_+} r^2 4\pi [(w^1 + w^2 - w^3 - w^4) - g_o(2w^3 + 2w^4) \\ &\quad + \frac{2}{5} g_2 P_2(x')(w^5 + w^6)]. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Per quanto riguarda le funzioni g_0 e g_2 , queste valgono

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-ihry} dy = \frac{1}{hr} \sin(hr), \\ g_2 &= \frac{5}{4} \int_{-1}^1 e^{-ihry} (3y^2 - 1) dy = \frac{5(3hr \cos(hr) + (-3 + h^2 r^2) \sin(hr))}{(hr)^3}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Utile al calcolo dei primi termini per la parte simmetrica ed antisimmetrica delle $f^{s(a)}$, sono i seguenti risultati

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\pi g_o \sin(\xi) d\xi &= \frac{\sin(p_f r)^2}{(p_f r)^2}, \\ \frac{3}{2} \int_0^\pi g_o \sin(\xi) \cos(\xi) d\xi &= \frac{3(-p_f r \cos(p_f r) + \sin(p_f r))^2}{(p_f r)^4}, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\pi g_2 \sin(\xi) d\xi &= \frac{-10p_f r(2 + \cos(2p_f r)) + 15 \sin[2p_f r]}{(4p_f^2 r^3)}, \\ \frac{3}{2} \int_0^\pi g_2 \sin(\xi) \cos(\xi) d\xi &= \\ \frac{-30(-8 + 4p_f^2 r^2 + (8 - 2p_f^2 r^2) \cos(2p_f r) + 7p_f r \sin(2p_f r))}{p_f^4 r^4}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Bibliografia