



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Calcolo della sezione d'urto neutrino-carbonio
per misure di oscillazione
nell'esperimento T2K

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Candidato

Federica Testani
Matricola 1014998

Relatore

Prof. Omar Benhar Noccioli

Anno Accademico 2019/2020

Tesi non ancora discussa

Calcolo della sezione d'urto neutrino-carbonio per misure di oscillazione nell'esperimento T2K

Tesi di Laurea Magistrale. Sapienza – Università di Roma

© 2020 Federica Testani. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L^AT_EX e la classe Saphthesis.

E-mail dell'autore: federica.testani@gmail.com

Ai miei genitori

Indice

Introduzione	vii
1 Oscillazioni dei neutrini	1
1.1 I neutrini nel Modello Standard	1
1.2 Oltre il Modello Standard: neutrini massivi	2
1.3 Oscillazioni nel vuoto	7
1.4 Tipi di esperimenti di oscillazione	9
1.5 Stato attuale delle misure	10
1.6 L'esperimento T2K	12
2 Sezione d'urto neutrino–nucleone	15
2.1 Struttura della sezione d'urto	15
2.2 Contrazione dei tensori leptonic e adronico: funzioni di struttura e fattori cinematici	17
2.3 Regioni cinematiche	18
2.4 Sezione d'urto elastica	19
2.5 Sezione d'urto nella regione di produzione di risonanze	21
3 Sezione d'urto neutrino–nucleo	23
3.1 Struttura della sezione d'urto	24
3.2 Approssimazione impulsiva	24
3.3 La funzione spettrale nucleare	27
3.4 Regioni cinematiche	30
3.5 CCQE	31
3.6 Ricostruzione dell'energia del neutrino	32
3.7 CC1 π e CCQE- <i>like</i>	34
4 Risultati numerici	35
4.1 Calcolo numerico della sezione d'urto	35
4.2 Risultati e confronto con i dati sperimentali	37
4.2.1 Sezione d'urto quasi-elastica	37
4.2.2 Sezione d'urto inclusiva: CCQE+CC1 π	41
Conclusioni	47

A	Ipotesi CVC e fattori di forma vettoriali	49
B	Ipotesi PCAC e fattori di forma assiali	51
	Bibliografia	53

Introduzione

La scoperta delle oscillazioni di sapore dei neutrini, che implicano che i neutrini hanno una massa, rappresenta senza dubbio uno dei maggiori successi recenti della Fisica delle particelle elementari. Negli anni sono stati realizzati molti esperimenti aventi come scopo la misura dei parametri che determinano la probabilità di oscillazione. Data la piccolezza delle sezioni d'urto di interazione dei neutrini¹, questi esperimenti utilizzano come bersagli nuclei pesanti. Questo, se da una parte consente di aumentare la statistica, dall'altra introduce delle complicazioni dovute agli effetti nucleari. In particolare, una delle principali fonti di errore sistematico nell'estrazione dei parametri di oscillazione dai dati sperimentali è data dalle incertezze derivanti dal modello utilizzato per descrivere la sezione d'urto neutrino-nucleo [1, 2, 3].

Negli ultimi anni è diventato sempre più evidente che i modelli nucleari a particelle indipendenti risultano inadeguati a descrivere la piena complessità del problema; l'uso di modelli nucleari più realistici e una comprensione quantitativa di tutti i processi rilevanti in gioco sono necessari per raggiungere la precisione richiesta dagli esperimenti.

I valori dell'energia del neutrino rilevanti per questi esperimenti vanno dalle poche centinaia di MeV alle decine di GeV, pertanto è necessario conoscere le reazioni neutrino-nucleo in un'ampia regione cinematica [2]. Dalle basse alle alte energie, i processi dominanti sono la diffusione quasi-elastica (QE), la produzione risonante di pioni (RES) e la diffusione profondamente anelastica (DIS).

In questa Tesi calcoliamo la sezione d'urto inclusiva neutrino-nucleo facendo uso di un modello realistico basato sull'*approssimazione impulsiva* (IA), valida per energie attorno a ~ 1 GeV, che permette la fattorizzazione tra lo stato iniziale, trattabile in teoria non relativistica, e il vertice d'interazione, da trattare relativisticamente. In questo modo si riesce a tener conto in modo consistente dei vari meccanismi di reazione. Grazie alla fattorizzazione la sezione d'urto si può scrivere in termini di due ingredienti fondamentali: 1) la *sezione d'urto neutrino-nucleone*; 2) la *funzione spettrale nucleare*, ricavata nell'ambito della teoria a molti corpi, che descrive lo stato fondamentale del nucleo bersaglio.

Il nostro calcolo mira al confronto con i dati sperimentali di uno degli attuali esperimenti di oscillazione, l'esperimento giapponese T2K (Tokai-to-Kamioka). Per la rivelazione dell'oscillazione di sapore saranno rilevanti i processi di corrente carica, in cui abbiamo un leptone carico nello stato finale. T2K misura la sezione d'urto differenziale inclusiva in funzione dei parametri cinematici del leptone carico. Il

¹Si pensi che la sezione d'urto neutrino-nucleone è dell'ordine di 10^{-38} cm² a energia ~ 1 GeV, cinque ordini di grandezza più piccola rispetto all'analogia sezione d'urto per elettroni.

fascio incidente è costituito da neutrini muonici e ha uno spettro piuttosto ampio, centrato attorno a ~ 600 MeV. A queste energie ci aspettiamo che il contributo del DIS sia trascurabile e non lo includiamo nel calcolo. Il fatto che il fascio di neutrini non abbia un'energia ben precisa rende necessario integrare sul flusso incidente. Il nostro è il primo calcolo consistente della sezione d'urto differenziale integrata sul flusso.

Da sottolineare che lo studio delle interazioni dei neutrini con la materia non solo è rilevante al fine di comprendere le caratteristiche del neutrino stesso, ma può anche fornire importanti contributi alla Fisica adronica e nucleare. Il neutrino ha la peculiarità di interagire solo tramite interazione debole; offre quindi un'opportunità unica di esplorare la struttura assiale del nucleone.

La Tesi è strutturata come segue.

Nel capitolo 1 vediamo in che modo è possibile descrivere un neutrino massivo, descriviamo la teoria standard delle oscillazioni e facciamo una panoramica sulla situazione sperimentale. Dedichiamo una sezione alla descrizione dell'esperimento T2K.

Nel capitolo 2 affrontiamo il calcolo della sezione d'urto neutrino-nucleone, a cui la sezione d'urto neutrino-nucleo si riconduce nel range di energie che ci interessa, nel quale è applicabile l'approssimazione impulsiva.

Nel capitolo 3 descriviamo l'approssimazione impulsiva e calcoliamo la sezione d'urto neutrino-nucleo, che si ottiene integrando la sezione d'urto sul nucleone con un peso dato dalla funzione spettrale nucleare, che descrive la distribuzione di energia ed impulso dei nucleoni nello stato fondamentale del nucleo bersaglio.

Nel capitolo 4 descriviamo il calcolo numerico effettuato, esponiamo i risultati ottenuti e li analizziamo facendo un confronto con i dati dell'esperimento T2K riportati in [3, 4].

Nella Tesi verrà sempre utilizzato un sistema di unità di misura nel quale $\hbar = h/2\pi = c = 1$, dove h e c sono, rispettivamente, la costante di Planck la velocità della luce nel vuoto.

Capitolo 1

Oscillazioni dei neutrini

Il fenomeno dell'oscillazione dei neutrini, ossia il loro cambiamento di sapore nella propagazione, è stato osservato per la prima volta tra la fine degli anni novanta e l'inizio degli anni duemila nei neutrini atmosferici [5] e solari [6], rispettivamente da parte degli esperimenti Super-KamiokaNDE in Giappone e SNO in Canada. Questa scoperta ha portato al premio Nobel per la Fisica nel 2015.

Questo fenomeno si può spiegare solo se i neutrini hanno una massa, contrariamente a quanto previsto dal Modello Standard delle particelle elementari, che va rivisto di conseguenza.

In questo capitolo, dopo aver riassunto le caratteristiche principali del neutrino nel Modello Standard, illustriamo i meccanismi che possono generare un termine di massa. Ricaviamo poi la probabilità di oscillazione nel vuoto¹, facciamo una panoramica sulla situazione sperimentale attuale e descriviamo brevemente l'esperimento di riferimento per il nostro calcolo, l'esperimento T2K.

1.1 I neutrini nel Modello Standard

Nel Modello Standard delle particelle elementari i neutrini sono leptoni elettricamente neutri, di massa nulla e chiralità *left*. Si presentano in tre *flavour* leptonici, ognuno dei quali forma un doppietto di isospin debole $\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L$ con un leptone carico.

Possono avere solo interazioni deboli, di corrente carica (CC) o di corrente neutra (NC). In particolare la densità di Lagrangiana per i due tipi di interazione si scrive:

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_l \bar{\nu}_L^l \gamma^\mu l_L^- W_\mu^+ + h.c. \quad (1.1)$$

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_l \bar{\nu}_L^l \gamma^\mu \nu_L^l Z_\mu^0 \quad (1.2)$$

I campi presenti nelle (1.1) e (1.2) sono autostati sia del *flavour* che della massa: nel Modello Standard non c'è *mixing* nel settore leptonico. Nelle interazioni risultano

¹Gli effetti di materia sulle oscillazioni sono rilevanti solo ad alte densità, quali la densità solare. Dato che in questa Tesi siamo interessati a fasci di neutrini prodotti tramite acceleratori, trascuriamo questo tipo di effetti.

conservati sia il numero leptonico totale, sia il numero leptonico associato a ciascun flavour.

I neutrini di chiralità *left*, che partecipano alle interazioni (1.1) e (1.2), sono detti *attivi*, mentre i neutrini *right*, del tutto non interagenti, sono detti *sterili* e sono assenti nel Modello Standard.

La (1.2) determina la larghezza di decadimento del bosone Z^0 in neutrini *left* leggeri ($m_\nu < Z^0/2$). Dalla misura della larghezza totale di decadimento dello Z^0 si può quindi ricavare il numero N_ν di famiglie di neutrini di questo tipo. Allo stato attuale le misure danno il risultato $N_\nu = (2.984 \pm 0.008)$. Pertanto nel Modello Standard e in ogni sua estensione possono essere presenti solo e soltanto tre famiglie di neutrini attivi leggeri [7].

1.2 Oltre il Modello Standard: neutrini massivi

Vogliamo illustrare i modi in cui si può descrivere un neutrino massivo. È possibile generare un termine di massa per il neutrino con il meccanismo di Higgs, analogamente al caso dei quark e dei leptoni carichi. Si parla in questo caso di termine di massa di *Dirac*. Nel caso del neutrino esiste però un'altra possibilità. Essendo l'unico leptone neutro, si può ipotizzare che esso coincida con la sua antiparticella, cioè che sia una particella di Majorana, avente, quindi, un termine di massa di *Majorana*. Infine, è possibile combinare le due possibilità, ottenendo un termine di massa di *Dirac-Majorana*.

1.2.1 Termine di massa di Dirac

Consideriamo inizialmente un solo tipo di neutrino e supponiamo che esistano entrambe le sue componenti chirali *left* e *right*. Possiamo allora costruire un'interazione di Yukawa con il campo di Higgs ϕ :

$$\mathcal{L} = -g_\nu(\bar{\psi}_L\tilde{\phi}\nu_R + h.c.), \quad (1.3)$$

che dopo rottura spontanea di simmetria porta a un termine di massa per i neutrini pari a:

$$\mathcal{L}^D = -m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L), \quad (1.4)$$

Nel caso di tre neutrini attivi $\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$ e n sterili² $\nu_{s_1R}, \nu_{s_2R}, \dots, \nu_{s_nR}$ abbiamo:

$$\mathcal{L}^D = -\sum_{\beta,s} \bar{\nu}_{\beta L} M_{\beta s}^D \nu_{s R} + h.c., \quad (1.5)$$

con M^D matrice complessa. I campi non hanno quindi in generale massa definita: abbiamo un *mixing* tra diversi sapori.

Nel caso in cui vi siano tre tipi di neutrini *right* $\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$ la matrice di massa può essere diagonalizzata tramite una trasformazione biunitaria, cioè del tipo:

$$U^\dagger M^D V = \text{diag}(m_1^D, m_2^D, m_3^D), \quad (1.6)$$

²Il numero di neutrini sterili non può essere determinato sperimentalmente.

con U e V matrici unitarie. Introducendo gli autostati di massa $\nu_k^{L,R}$, $k = 1, 2, 3$, raggruppati in due vettori

$$\mathbf{n}_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

avremo:

$$\mathbf{n}_L = U^\dagger \boldsymbol{\nu}_L, \quad \mathbf{n}_R = V^\dagger \boldsymbol{\nu}_R \quad (1.8)$$

con $\boldsymbol{\nu}_{L,R}$ vettori degli autostati di *flavour*:

$$\boldsymbol{\nu}_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

Nella base $\{\nu_k\}$ la (1.5) diventa:

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{k=1}^3 m_k^D \bar{\nu}_{kL} \nu_{kR} + h.c. \quad (1.10)$$

Da sottolineare che le masse ottenute in questo modo sono proporzionali al valor medio nel vuoto del campo di Higgs, così come le masse dei leptoni carichi e dei quark. La generazione della massa del neutrino con questo meccanismo non spiega quindi perché esso sia più di cinque ordini di grandezza più leggero dell'elettrone, che è la più leggera delle altre particelle elementari conosciute. Detto in altri termini, non spiega perché i coefficienti di accoppiamento di Yukawa per i neutrini siano più di cinque ordini di grandezza più piccoli rispetto a quelli di quark e leptoni carichi [8].

Il mixing di tre neutrini di Dirac è simile al mixing dei quark nel Modello Standard. Se \mathbf{l}_L è il vettore dei leptoni carichi *left*, la corrente debole carica si scrive:

$$j^\rho = \bar{\boldsymbol{\nu}}_L \gamma^\rho \mathbf{l}_L = \bar{\mathbf{n}}_L U^\dagger \gamma^\rho \mathbf{l}_L \quad (1.11)$$

La matrice U è detta matrice di Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS) e, come la matrice CKM, dipende da 4 parametri, di cui 3 angoli di mixing e una fase³. La parametrizzazione più comune è la seguente:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.12)$$

con $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ e $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$. La fase δ è spesso detta fase di violazione di CP, poiché si dimostra che può esserci simmetria di CP se e solo se la matrice di mixing è reale [9].

³Una matrice unitaria $N \times N$ ha N^2 parametri liberi, di cui $\frac{1}{2}N(N-1)$ angoli e $\frac{1}{2}N(N+1)$ fasi. Nel caso che stiamo trattando, 5 fasi risultano essere non fisiche in quanto eliminabili tramite ridefinizione dei campi.

1.2.2 Termine di massa di Majorana

È possibile costruire un termine di massa senza dover introdurre neutrini sterili. Per ottenere questo risultato basta ipotizzare che il neutrino abbia entrambe le componenti chirali, ma queste non siano indipendenti [9]. In particolare la scomposizione del campo si può porre nella forma:

$$\nu = \nu_L + \mathcal{C}\bar{\nu}_L^t, \quad (1.13)$$

dove \mathcal{C} è la matrice di coniugazione di carica, avente le seguenti proprietà:

$$\mathcal{C}\gamma_\mu^t\mathcal{C}^{-1} = -\gamma_\mu \quad (1.14)$$

$$\mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} \quad (1.15)$$

$$\mathcal{C}^t = -\mathcal{C} \quad (1.16)$$

$$\mathcal{C}\gamma_5^t\mathcal{C}^{-1} = \gamma_5 \quad (1.17)$$

$$\mathcal{C}(\sigma^{\mu\nu})^t\mathcal{C}^{-1} = -\sigma^{\mu\nu} \quad (1.18)$$

Il campo (1.13) soddisfa la condizione di Majorana:

$$\psi = \mathcal{C}\bar{\psi}^t, \quad (1.19)$$

la quale implica l'uguaglianza di particella e antiparticella, e può quindi essere soddisfatta solo da fermioni neutri.

Si suole indicare il campo coniugato con l'apice C :

$$\nu_L^C = \mathcal{C}\bar{\nu}_L^t \quad (1.20)$$

La (1.13) è corretta in quanto ν_L^C ha chiralità *right*. Infatti, detti P_L e P_R i proiettori sui sottospazi a chiralità *left* e *right*, e sfruttando la proprietà (1.17), otteniamo:

$$P_L\mathcal{C}\bar{\nu}_L^t = \mathcal{C}P_L^t\bar{\nu}_L^t = \mathcal{C}(\bar{\nu}_L P_L)^t = \mathcal{C}(\nu_L^\dagger\gamma_0 P_L)^t = \mathcal{C}(\nu_L^\dagger P_R\gamma_0)^t = \mathcal{C}[(P_R\nu_L)^\dagger\gamma_0]^t = 0 \quad (1.21)$$

Vediamo inoltre come si trasforma ν_L^C sotto trasformazioni di Lorentz. I campi ν_L e $\bar{\nu}_L$ trasformano, com'è noto, nel seguente modo:

$$\nu'_L(x') = \mathcal{S}\nu_L(x) \quad (1.22)$$

$$\bar{\nu}'_L(x') = \bar{\nu}_L(x)\mathcal{S}^{-1}, \quad (1.23)$$

con $\mathcal{S} = 1 - (i/4)\epsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ e $\epsilon_{\mu\nu}$ parametri infinitesimi. Per ν_L^C avremo:

$$\nu_L^{C'}(x') = \mathcal{C}(\bar{\nu}_L(x)\mathcal{S}^{-1})^t = \mathcal{C}(\mathcal{S}^{-1})^t\bar{\nu}_L^t(x) = \mathcal{C}(\mathcal{S}^{-1})^t\mathcal{C}^{-1}\nu_L^C(x) = \mathcal{S}\nu_L^C(x), \quad (1.24)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la (1.18). Il campo coniugato ν_L^C trasforma quindi come ν_L .

Grazie alle suddette proprietà di ν_L^C , la quantità $\bar{\nu}_L^C\nu_L$ è diversa da zero, poiché ν_L^C è *right*, ed è uno scalare di Lorentz. Possiamo quindi costruire, nel caso di un solo tipo di neutrino, un termine di massa del tipo:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2}m_L\bar{\nu}_L^C\nu_L + h.c. \quad (1.25)$$

Nel caso di tre famiglie di neutrini avremo:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \overline{\nu_{\alpha L}^C} M_{\alpha\beta}^L \nu_{\beta L} + h.c., \quad (1.26)$$

con M^L matrice complessa simmetrica.

Come nel caso dei neutrini di Dirac, gli autostati di massa si ottengono diagonalizzando la matrice M^L . In funzione degli autostati di massa la (1.26) diventa:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k^L \overline{\nu_{kL}^C} \nu_{kL} + h.c. \quad (1.27)$$

Un termine di massa di questo tipo non è possibile nel Modello Standard in quanto non invariante sotto $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Questo perché il campo ν_L ha terza componente dell'isospin debole pari a $I_3 = 1/2$ e ipercarica $Y = -1$; pertanto la combinazione $\overline{\nu_L^C} \nu_L$ ha $I_3 = 1$ e $Y = -2$, ma nel Modello Standard non è presente alcun tripletto di isospin debole con $Y = 2$. Un termine del tipo (1.27) può essere comunque generato da effetti di nuova Fisica.

È bene sottolineare un'importante differenza tra il mixing di tre neutrini di Majorana e il mixing di tre neutrini di Dirac: le fasi nella matrice di mixing di Majorana sono tre anziché una. Infatti nel caso di Majorana i neutrini massivi non possono essere ridefiniti tramite una trasformazione di fase poiché il termine di massa (1.27) non è invariante. Si usa scrivere la matrice di mixing come un prodotto del tipo

$$U = U^D D^M, \quad (1.28)$$

con U^D matrice unitaria analoga alla (1.12) e D^M matrice unitaria diagonale contenente due fasi indipendenti:

$$D^M = \text{diag}(1, e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}) \quad (1.29)$$

La fase presente in U^D è detta appunto *fase di Dirac*, mentre le fasi presenti in U^D sono dette *fasi di Majorana*.

1.2.3 Termine di massa di Dirac–Majorana

Come fatto nelle sezioni precedenti, consideriamo inizialmente una sola generazione. Sappiamo che il campo chirale ν_L esiste in quanto è il campo che partecipa alle interazioni deboli. Non sappiamo se ν_R esiste, ma la sua esistenza è permessa dalle simmetrie del Modello Standard. Se esiste solo ν_L , la lagrangiana può contenere soltanto il termine di massa di Majorana (1.25), e il neutrino è una particella di Majorana. Se esiste anche ν_R , la lagrangiana può contenere il termine di massa di Dirac (1.4), ma anche il termine (1.25) e il suo analogo per ν_R . Possiamo quindi avere in generale un termine di massa di Dirac–Majorana [9]:

$$\mathcal{L}^{D+M} = \mathcal{L}^D + \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^R \quad (1.30)$$

Definiamo il vettore colonna dei campi *left*:

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Utilizzando il fatto che $\overline{\nu_L^C} = -\nu_L^t \mathcal{C}^\dagger$ possiamo scrivere la (1.30) come:

$$\mathcal{L}^{D+M} = \frac{1}{2} N_L^t \mathcal{C}^\dagger M N_L + h.c., \quad (1.32)$$

con

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Come al solito gli autostati di massa si ottengono applicando una trasformazione unitaria:

$$N_L = U n_L, \quad (1.34)$$

con U tale che

$$U^t M U = \text{diag}(m_1, m_2) \quad (1.35)$$

e

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

La (1.32) diventa:

$$\mathcal{L}^{D+M} = \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \nu_{kL}^t \mathcal{C}^\dagger \nu_{kL} + h.c. \quad (1.37)$$

Abbiamo quindi ottenuto l'importante risultato che un termine di massa di Dirac–Majorana implica che i neutrini massivi sono particelle di Majorana. In effetti la (1.32) ha la struttura di un termine di massa di Majorana per i campi ν_L e ν_R^C . Inoltre, dato che abbiamo un mixing tra neutrini attivi e sterili, saranno possibili oscillazioni tra le due tipologie [9].

Consideriamo ora il caso di tre tipi di neutrini attivi. Per trattare il caso più generale, supponiamo che, oltre ai campi ν_{eL} , $\nu_{\mu L}$, $\nu_{\tau L}$, vi siano N_s neutrini sterili ν_{sR} , $s = s_1, \dots, s_{N_s}$. Avremo allora:

$$\mathcal{L}^L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \nu_{\alpha L}^t \mathcal{C}^\dagger M_{\alpha\beta}^L \nu_{\beta L} + h.c. \quad (1.38)$$

$$\mathcal{L}^R = \frac{1}{2} \sum_{s, s'} \nu_{sR}^t \mathcal{C}^\dagger M_{ss'}^R \nu_{s'R} + h.c. \quad (1.39)$$

$$\mathcal{L}^D = - \sum_s \sum_\alpha \bar{\nu}_{sR} M_{s\alpha}^D \nu_{\alpha L} + h.c. \quad (1.40)$$

Definiamo il vettore di $N = 3 + N_s$ campi *left*:

$$\mathbf{N}_L = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_L \\ \boldsymbol{\nu}_R^C \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Il termine di massa sarà

$$\mathcal{L}^{D+M} = \frac{1}{2} \mathbf{N}_L^t \mathcal{C}^\dagger M^{D+M} \mathbf{N}_L + h.c., \quad (1.42)$$

con

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} M_L & M_D^t \\ M_D & M_R \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Scrivendo i campi autostati di flavour come combinazioni lineari unitarie di N campi con massa definita $\nu_k, k = 1, \dots, N$, la (1.42) diventa:

$$\mathcal{L}^{D+M} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \nu_{kL}^t \mathcal{C}^\dagger \nu_{kL} + h.c. \quad (1.44)$$

La corrente debole carica si scriverà in modo analogo al caso di Dirac e di Majorana, ossia avrà la forma (1.11), ma con delle differenze fondamentali. Nel caso di Dirac-Majorana infatti la matrice di mixing sarà una matrice rettangolare $3 \times N$, dovendo connettere tre autostati di flavour con N autostati di massa. Non sarà unitaria, in quanto $UU^\dagger = 1$, ma $U^\dagger U \neq 1$. Questo implica che la probabilità totale relativa ai neutrini attivi non è conservata, il che è coerente con la possibilità di oscillazione tra neutrini attivi e sterili [9].

1.3 Oscillazioni nel vuoto

Se i neutrini hanno una massa e c'è mixing fra i diversi flavour leptonici nelle interazioni deboli di corrente carica, il flavour leptonico non si conserva nella propagazione dei neutrini. Si parla allora di oscillazioni dei neutrini [7].

Nella teoria standard delle oscillazioni dei neutrini, un neutrino di flavour α e impulso \mathbf{p} è descritto, all'istante in cui viene prodotto, da un ket di stato del tipo

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle, \quad \alpha = e, \mu, \tau \quad (1.45)$$

Se consideriamo i neutrini massivi come onde piane di energia $E_k = \sqrt{m_k^2 + |\mathbf{p}|^2}$ ⁴, l'evoluto del ket (1.45) al tempo t sarà:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle \quad (1.46)$$

Invertendo la (1.45) gli autostati di massa si possono esprimere in funzione degli autostati di flavour:

$$|\nu_k\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle. \quad (1.47)$$

Sostituendo la (1.47) nella (1.46) si ottiene:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_\beta \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} |\nu_\beta\rangle. \quad (1.48)$$

Pertanto il ket $|\nu_\alpha\rangle$, che al tempo $t = 0$ era un autostato del flavour, diventa una sovrapposizione di flavour diversi per $t > 0$. Il coefficiente di $|\nu_\beta\rangle$ è l'ampiezza della transizione $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ in funzione del tempo:

$$\mathcal{A}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t}. \quad (1.49)$$

⁴Stiamo assumendo che un autostato del flavour abbia impulso \mathbf{p} ben definito, e quindi che gli autostati di massa abbiano tutti lo stesso impulso; questa assunzione non influisce sulla determinazione della probabilità di oscillazione [9].

La probabilità di transizione è quindi:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \left| A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \right|^2 = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}. \quad (1.50)$$

I neutrini saranno sicuramente ultrarelativistici, dato che i neutrini attivi hanno massa inferiore a ~ 1 eV e negli esperimenti si riesce a rivelare solo neutrini aventi energia pari almeno a ~ 100 keV [9]. Possiamo quindi fare l'approssimazione:

$$E_k \approx E + \frac{m_k^2}{2E}, \quad (1.51)$$

con $E = |\mathbf{p}|$. Pertanto:

$$E_k - E_j \approx \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}, \quad (1.52)$$

con

$$\Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2. \quad (1.53)$$

Bisogna ora tener conto del fatto che negli esperimenti di oscillazione non si misura il tempo t di propagazione, ma la distanza L tra sorgente e rivelatore. Dato che i neutrini sono ultrarelativistici possiamo porre $t = L$, ottenendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \\ &= \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2 \Re \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Questa espressione mostra che le costanti della natura che determinano le oscillazioni dei neutrini sono gli elementi della matrice di mixing e le differenze dei quadrati delle masse [8]; c'è poi una dipendenza da due quantità sperimentali: l'energia del fascio E e la distanza sorgente–rivelatore L . La dipendenza dalle differenze dei quadrati delle masse implica che tramite esperimenti di oscillazione non si possono ottenere informazioni sui singoli valori delle masse. Non è possibile inoltre misurare eventuali fasi di Majorana; infatti, ricordando che risulta $U_{\alpha k} = U_{\alpha k}^D e^{i\lambda_k}$, risulta evidente che nella (1.54) tali fasi non sono presenti.

In molti casi risulta valida l'approssimazione di mixing a due neutrini, in cui si ha un solo angolo di mixing θ e la matrice di mixing si scrive:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

La 1.54 assume in questo caso una forma molto semplice:

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right) \quad (1.56)$$

Questa espressione è storicamente molto importante in quanto i dati degli esperimenti di oscillazione sono sempre stati analizzati in prima approssimazione considerando il mixing a due neutrini [8]. La 1.56 si può anche scrivere nella forma

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(1.27 \frac{\Delta m^2 [\text{eV}^2] L [\text{km}]}{E [\text{GeV}]} \right), \quad (1.57)$$

utile per capire la classificazione dei vari esperimenti.

Tabella 1.1. Sensibilità alle differenze dei quadrati delle masse dei vari tipi di esperimenti di oscillazione.

Tipi di esperimenti	L	E	Δm^2 (eV ²)
<i>Short Baseline</i> (SBL)	10 m ÷ 1 km	1 MeV ÷ 10 ² GeV	0.1 ÷ 10 ²
<i>Long Baseline</i> (LBL)	1 km ÷ 10 ³ km	1 MeV ÷ \gtrsim 1 GeV	\gtrsim 10 ⁻³
<i>Atmosferici</i>	20 ÷ 10 ⁴ km	0.5 ÷ 10 ² GeV	10 ⁻⁴
<i>Very Long Baseline</i> (VLBL)	10 ² ÷ 10 ⁴ km	1 MeV ÷ \gtrsim 1 GeV	10 ⁻⁵ ÷ \gtrsim 10 ⁻⁴
<i>Solari</i>	10 ¹¹ km	0.2 ÷ 15 MeV	10 ⁻¹²

1.4 Tipi di esperimenti di oscillazione

Gli esperimenti sulle oscillazioni dei neutrini si dividono in:

- Esperimenti di *comparsa* (*appearance*). Questi esperimenti misurano la *probabilità di transizione* tra neutrini di sapore diverso, cioè $\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$, con $\alpha \neq \beta$;
- Esperimenti di *scomparsa* (*disappearance*). Misurano la *probabilità di sopravvivenza* di un certo sapore, ossia $\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}$.

C'è poi una suddivisione in base alla *sensibilità* alle differenze dei quadrati delle masse. Se consideriamo per semplicità il caso del mixing di due soli neutrini, la sensibilità a Δm^2 di un esperimento è quel valore di Δm^2 per il quale risulta:

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \sim 1 \quad (1.58)$$

Infatti se $\frac{\Delta m^2 L}{2E} \ll 1$ la probabilità di oscillazione non può essere misurata, mentre se $\frac{\Delta m^2 L}{2E} \gg 1$ sarà osservabile soltanto la media della probabilità [9].

In base al valor medio del rapporto L/E , che determina la sensibilità, gli esperimenti si possono classificare come nella tabella 1.1:

In tutti i casi il *rate* di eventi è molto basso poiché la sezione d'urto d'interazione dei neutrini è piccola. I detector devono quindi essere molto grandi, dell'ordine delle kilotonnellate. Devono inoltre essere ben schermati dai raggi cosmici e pertanto posti sotto terra [10].

- Negli esperimenti *solari* si rivelano i neutrini elettronici provenienti dal nucleo del Sole, il cui spettro viene calcolato usando il Modello Solare Standard. In presenza di oscillazioni si osserva un minor numero di neutrini rispetto al flusso atteso.
- I neutrini *atmosferici* provengono dal decadimento di mesoni π e K prodotti nelle interazioni dei raggi cosmici nell'alta atmosfera. I muoni prodotti decadono a loro volta in neutrini ed elettroni.
- Gli esperimenti SBL, LBL e VLBL si dividono in due tipologie:
 - Nei *reattori* nucleari le reazioni di fissione producono antineutrini elettronici, che vengono emessi isotropicamente e rivelati tramite il decadimento β inverso.



Figura 1.1. I due ordinamenti di massa possibili per il mixing a tre neutrini con la condizione $\Delta m_{\text{SUN}}^2 \ll \Delta m_{\text{ATM}}^2$.

- Negli *acceleratori* si fanno incidere protoni di alta energia su un bersaglio. I mesoni π e K emergenti vengono collimati verso un detector e fatti decadere in un tunnel in muoni e neutrini.

Un aspetto importante di questo tipo di esperimenti è la possibilità di utilizzare due rivelatori posti a diversa distanza. Il *near detector* viene posto abbastanza vicino alla sorgente da poter misurare il flusso dei neutrini prima di qualunque possibile cambiamento di sapore. Il *far detector* viene posizionato alla distanza alla quale ci si aspetta il massimo di oscillazione. Il confronto fra le osservazioni effettuate nei due siti permette di determinare i parametri di oscillazione eliminando molti errori sistematici [10].

1.5 Stato attuale delle misure

I risultati ottenuti finora dai vari esperimenti sui neutrini solari e atmosferici sono compatibili con uno scenario di mixing a tre neutrini e assenza di neutrini leggeri sterili. Abbiamo quindi tre autostati di flavour ν_e, ν_μ, ν_τ , combinazioni lineari di tre neutrini ν_1, ν_2, ν_3 aventi masse m_1, m_2, m_3 [8]. Le tre differenze dei quadrati delle masse non sono naturalmente indipendenti:

$$\Delta m_{21}^2 + \Delta m_{13}^2 + \Delta m_{32}^2 = 0 \quad (1.59)$$

La probabilità di oscillazione dipende quindi da sei parametri: due differenze tra i quadrati delle masse, tre angoli di mixing e una fase. Sperimentalmente si trovano due valori di Δm_{ij}^2 , molto diversi tra di loro. In particolare, gli esperimenti sui neutrini solari e atmosferici misurano rispettivamente $\Delta m_{\text{SUN}}^2 \sim 10^{-5} \text{ eV}^2$ e $\Delta m_{\text{ATM}}^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$. Questi valori sono compatibili con due possibili ordinamenti delle masse, che vediamo schematizzati in figura 1.1. Convenzionalmente i neutrini massivi vengono etichettati in modo da avere:

$$\Delta m_{\text{SUN}}^2 = \Delta m_{21}^2, \quad |\Delta m_{\text{ATM}}^2| \simeq |\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2| \quad (1.60)$$

Tabella 1.2. Valori dei parametri di oscillazione determinati tramite fit globale dei dati sperimentali più recenti [11]. Nell'ultima riga $\ell = 1$ per l'ordinamento normale e $\ell = 2$ per l'ordinamento invertito.

Parameter	NO		IO	
	Best fit	3σ range	Best fit	3σ range
$\sin^2 \theta_{12}/10^{-1}$	3.18 ± 0.16	$2.71 \div 3.70$	3.18 ± 0.16	$2.71 \div 3.70$
$\sin^2 \theta_{13}/10^{-2}$	$2.225^{+0.055}_{-0.078}$	$2.015 \div 2.417$	$2.250^{+0.056}_{-0.076}$	$2.039 \div 2.441$
$\sin^2 \theta_{23}/10^{-1}$	$5.66^{+0.16}_{-0.22}$	$4.41 \div 6.09$	$5.66^{+0.18}_{-0.23}$	$4.46 \div 6.09$
δ/π	$1.20^{+0.23}_{-0.14}$	$0.80 \div 2.00$	1.54 ± 0.13	$1.14 \div 1.90$
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} \text{eV}^2]$	$7.50^{+0.22}_{-0.20}$	$6.94 \div 8.14$	$7.50^{+0.22}_{-0.20}$	$6.94 \div 8.14$
$ \Delta m_{3\ell}^2 [10^{-3} \text{eV}^2]$	$2.56^{+0.03}_{-0.04}$	$2.46 \div 2.65$	2.46 ± 0.03	$2.37 \div 2.55$

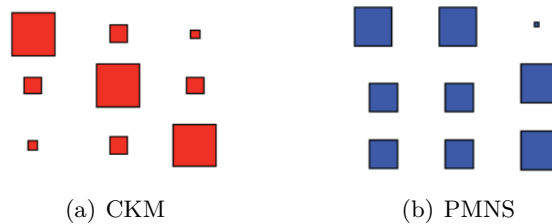


Figura 1.2. Confronto visivo tra gli elementi della matrice CKM e quelli della matrice PMNS.

I due ordinamenti vengono usualmente chiamati *ordinamento normale* (NO) e *ordinamento invertito* (IO). Nella tabella 1.2 mostriamo i valori dei parametri di oscillazione ottenuti da de Salas et al. tramite fit globale degli ultimi dati di diversi esperimenti [11].

Come si vede le attuali misure prevedono due angoli di mixing grandi ($\theta_{12} \approx 34^\circ$, $\theta_{23} \approx 49^\circ$) e uno piccolo ($\theta_{13} \approx 9^\circ$). Questo è in netto contrasto con la matrice CKM in cui tutti e tre gli angoli sono piccoli gerarchicamente decrescenti. In figura 1.2 vediamo una rappresentazione grafica della differenza tra le due matrici.

Anche se i valori dei parametri di oscillazione sono noti con buona precisione, rimangono molte questioni irrisolte. Gli esperimenti di oscillazione attuali e futuri hanno lo scopo, ad esempio, di stabilire il segno di Δm_{ATM}^2 , ricercare indizi dell'esistenza di neutrini sterili, misurare con maggior precisione la fase di violazione di CP.

1.6 L'esperimento T2K

L'esperimento Tokai-to-Kamioka è un esperimento di tipo *long baseline* situato in Giappone, progettato per effettuare misure di precisione nel canale $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ e rivelare la transizione $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$. È stato costruito tra il 2004 e il 2009, ha iniziato la presa dati nel 2010 e fornito i primi risultati nel 2011.

Nella figura 1.3 vediamo uno schema dell'esperimento.

Il fascio di neutrini viene prodotto al Japan Proton Accelerator Research Center (J-PARC) di Tokai facendo incidere protoni da 30 GeV su un bersaglio di grafite. Gli adroni prodotti vengono collimati e selezionati in carica da un sistema di magneti e vengono diretti in un tunnel di decadimento. I neutrini provengono principalmente dal decadimento in volo dei pioni: $\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$; si tratta quindi prevalentemente di neutrini muonici con una piccola contaminazione di neutrini elettronici. I muoni ed eventuali altri adroni rimasti vengono stoppati da un secondo strato di grafite, mentre i neutrini proseguono e vengono rivelati dal *near detector*, posto a circa 280 m da J-PARC. Si utilizza la configurazione *off-axis*, nella quale il fascio forma un certo angolo rispetto alla direzione dei rivelatori; questo perché la cinematica del decadimento a due corpi del pione è tale che lo spettro energetico dei neutrini diventa più stretto man mano che ci si allontana dalla direzione di volo dei pioni. Con un *off-axis* di 2.5° , T2K riesce a ottenere uno spettro abbastanza stretto piccato attorno a ~ 600 MeV, ottimizzato per massimizzare gli effetti di oscillazione a una distanza di 295 km, dove si trova il *far detector* Super-Kamiokande, nella miniera di Kamioka.

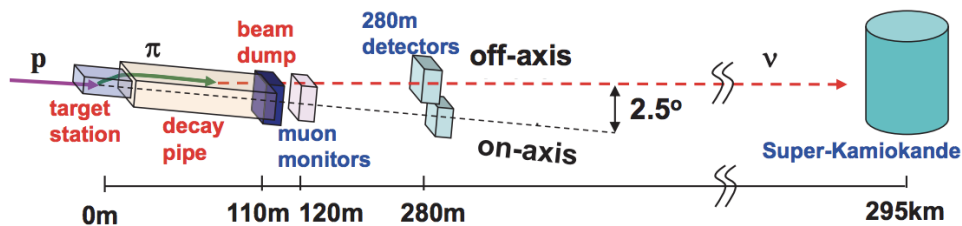


Figura 1.3. Rappresentazione schematica dell'esperimento T2K [12].

Il *near detector* è formato da due sistemi principali. L'Interactive Neutrino GRid (INGRID) si trova *on-axis* ed è un insieme di 16 tracciatori formati da piani di ferro alternati a piani di materiale plastico scintillante, il cui scopo principale è monitorare la direzione del fascio. ND280 si trova invece *off-axis* ed è formato da un tracciatore, in cui due piani formati da barre di materiale plastico (Fine Grained Detectors, FGDs) si alternano a delle camere a proiezione temporale (Time Projection Chambers, TPCs), e un rivelatore dedicato allo studio della produzione di π_0 , circondati da un calorimetro elettromagnetico; il tutto è racchiuso all'interno di un magnete, già usato nell'esperimento UA1 del CERN nei primi anni '80, che genera un campo magnetico di 0.2 T. Ogni FGD ha una massa di ~ 1 ton e costituisce il target per i neutrini. La prima FGD è formata per l'86.1% da carbonio, per il 7.4% da idrogeno, per il 3.7% da ossigeno e per il 2.8% da altri elementi. La seconda FGD è simile alla prima ma gli strati di materiale scintillante si alternano a strati d'acqua [3].

Il *far detector* Super-KamiokaNDE è un rivelatore Čerenkov costituito da un cilindro d'acqua da 50 kt ricoperto di fotomoltiplicatori. Un cono di luce Čerenkov sarà rivelato come un anello. Gli eventi di tipo muonico si distinguono da quelli di tipo elettronico in quanto i muoni danno luogo a un anello di Čerenkov più netto, mentre nel caso degli elettroni avremo un anello più sfocato a causa degli sciami elettromagnetici [12].

T2K è stato il primo esperimento a osservare la comparsa di neutrini elettronici in un fascio di neutrini muonici prodotto in laboratorio [13]. Ha inoltre fornito la più precisa misura del parametro θ_{23} [14], nonché indizi di violazione di CP nelle oscillazioni [15]. Tra gli scopi dell'esperimento c'è anche fornire contributi allo studio delle interazioni dei neutrini [16]; i risultati di questo tipo di studi sono rilevanti di per sé, oltre che essenziali per ridurre gli errori sistematici derivanti dalla sezione d'urto neutrino-nucleo nell'estrazione dei parametri di oscillazione [3].

Capitolo 2

Sezione d'urto neutrino–nucleone

In questo capitolo vogliamo discutere la struttura della sezione d'urto neutrino–nucleone, a cui, come vedremo, il calcolo della sezione d'urto neutrino–nucleo può essere ricondotto nel range di energie che ci interessa. Nelle prossime sezioni studieremo quindi il processo

$$\nu_l + N \rightarrow l^- + x, \quad (2.1)$$

dove N indica il nucleone bersaglio e x il sistema adronico finale. Siano $k = (E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$, $k' = (E_{\mathbf{k}'}, \mathbf{k}')$, $p = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$, $p' = (E_{\mathbf{p}'}, \mathbf{p}')$ i 4-impulsi rispettivamente di neutrino, leptone finale, nucleone nello stato iniziale e sistema adronico finale. Sia $q = (\omega, \mathbf{q})$ il 4-impulso trasferito.

Utilizziamo il tensore metrico nella forma $g^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

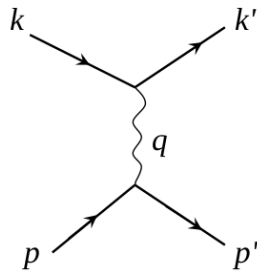


Figura 2.1. Diagramma di Feynman per il processo $\nu_l + N \rightarrow l^- + x$.

2.1 Struttura della sezione d'urto

L'espressione generale della sezione d'urto di collisione tra due particelle, in un sistema di riferimento in cui esse si muovono collinearmente, è la seguente [17, 18]:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{v} \delta^{(4)} \left(\sum_i p_i - \sum_f p_f \right) \prod_i \frac{1}{2E_i} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \overline{\sum_{\sigma_i} \sum_{\sigma_f} |\mathcal{M}|^2}, \quad (2.2)$$

dove v è la velocità relativa, \mathcal{M} è l'ampiezza di Feynman, il cui modulo quadro è mediato sugli spin iniziali σ_i e sommato sugli spin finali σ_f e le quantità $E_{i,f}$, $p_{i,f}$ indicano energia e impulso iniziali e finali.

Nel nostro caso avremo:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{v} \delta^{(4)}(k+p-k'-p') \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}'}} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}'}} \overline{\sum_{\sigma_i}} \sum_{\sigma_f} |\mathcal{M}|^2, \quad (2.3)$$

con W massa invariante del sistema adronico finale.

È necessario mediare solo sulle polarizzazioni iniziali del nucleone, poiché il neutrino ha una sola possibile polarizzazione. Tuttavia, per comodità di calcolo, si può effettuare formalmente la somma anche per il neutrino, in quanto l'assenza di neutrini con elicità positiva e antineutrini con elicità negativa è garantita automaticamente dal fattore $(1 - \gamma_5)$ nella corrente leptonica [18].

Detta m la massa del nucleone, risulta:

$$v = \frac{[(kp)^2 - m_\nu^2 m^2]^{1/2}}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{p}}} = \frac{kp}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{p}}}, \quad (2.4)$$

che nel sistema di riferimento in cui il nucleone è in quiete diventa:

$$v = \frac{E_{\mathbf{k}} m}{E_{\mathbf{k}} m} = 1 \quad (2.5)$$

Usando la relazione $|\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}'| E_{\mathbf{k}'} dE_{\mathbf{k}'}$ e il fatto che $E_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$, abbiamo:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+p-k'-p') \frac{1}{4E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}'}} \frac{|\mathbf{k}'| E_{\mathbf{k}'} dE_{\mathbf{k}'} d\Omega_{\mathbf{k}'}}{(2\pi)^3} \overline{\sum_{\sigma_i}} \sum_{\sigma_f} |\mathcal{M}|^2 \quad (2.6)$$

Se il sistema adronico finale non viene rivelato possiamo integrare in d^3p' . La sezione d'urto doppio-differenziale è quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dE_{\mathbf{k}'} d\Omega_{\mathbf{k}'}} &= \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^3p'}{2E_{\mathbf{p}'}} \delta^{(4)}(k+p-k'-p') \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \overline{\sum_{\sigma_i}} \sum_{\sigma_f} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \frac{1}{4E_{\mathbf{p}} E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}} \overline{\sum_{\sigma_i}} \sum_{\sigma_f} |\mathcal{M}|^2 \delta(\omega + E_{\mathbf{p}} - E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'ampiezza di Feynman \mathcal{M} , dato che nel nostro caso il 4-impulso trasferito si potrà considerare molto minore della massa del bosone W , si può scrivere:

$$\mathcal{M} = \frac{G_F V_{ud}}{\sqrt{2}} \langle l | j_\alpha(0) | \nu \rangle \langle x | j_A^\alpha(0) | 0 \rangle = \frac{G_F V_{ud}}{\sqrt{2}} \langle k' \sigma' | j_\alpha(0) | k \sigma \rangle \langle p' s' | j_A^\alpha(0) | p s \rangle, \quad (2.8)$$

con G_F costante di Fermi, V_{ud} elemento della matrice CKM che accoppia i quark up e $down$, j_α corrente leptonica, j_A^α corrente adronica, σ, σ' spin del leptone iniziale e finale, s, s' spin adronico iniziale e finale.

Pertanto:

$$\overline{\sum_{\sigma_i}} \sum_{\sigma_f} |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2 V_{ud}^2}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \langle k' \sigma' | j_\alpha | k \sigma \rangle \langle k' \sigma' | j_\beta | k \sigma \rangle^* \sum_{s, s'} \langle p' s' | j_A^\alpha | p s \rangle \langle p' s' | j_A^\beta | p s \rangle^* \quad (2.9)$$

e possiamo scrivere la sezione d'urto come

$$\frac{d^2\sigma}{dE_{\mathbf{k}'}d\Omega_{\mathbf{k}'}} = \frac{G_F^2 V_{ud}^2 |\mathbf{k}'|}{32\pi^2 |\mathbf{k}|} \frac{1}{4E_{\mathbf{p}}E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}} L_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta}, \quad (2.10)$$

con $q = k - k'$ 4-impulso trasferito.

Il tensore leptonic $L_{\alpha\beta}$ si calcola facilmente nel modo usuale:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta} &= \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{u}_{\sigma'}(\mathbf{k}') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_\sigma(\mathbf{k}) \bar{u}_\sigma(\mathbf{k}) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) u_{\sigma'}(\mathbf{k}') \\ &= \text{Tr} \left[(\not{k}' + m) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma_\beta (1 - \gamma_5) \right] \\ &= 2 \left[\text{Tr}(\not{k}' \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta) - \text{Tr}(\not{k}' \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta \gamma_5) \right] \\ &= 8(k_\alpha k'_\beta + k_\beta k'_\alpha - g_{\alpha\beta} k k' - i \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} k^\mu k'^\nu) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Il tensore adronico ha invece la seguente espressione:

$$W^{\alpha\beta} = \sum_{s, s'} \langle \mathbf{p}, s | j^{\alpha\dagger} | \mathbf{p} + \mathbf{q}, s' \rangle \langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, s' | j^\beta | \mathbf{p}, s \rangle \delta(\omega + E_{\mathbf{p}} - E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}) \quad (2.12)$$

2.2 Contrazione dei tensori leptonic e adronico: funzioni di struttura e fattori cinematici

Il tensore $W^{\alpha\beta}$ si può scrivere in forma generale, utilizzando i due 4-vettori a disposizione p e q e rispettando la covarianza di Lorentz, in termini di sei funzioni di struttura [19]:

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta}(p, q) &= -g^{\alpha\beta} W_1 + p^\alpha p^\beta \frac{W_2}{m^2} + i \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} q_\rho q_\sigma \frac{W_3}{m^2} + q^\alpha q^\beta \frac{W_4}{m^4} + \\ &+ (p^\alpha q^\beta + p^\beta q^\alpha) \frac{W_5}{m^2} + (p^\alpha q^\beta - p^\beta q^\alpha) \frac{W_6}{m^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Si può dimostrare che in realtà l'ultimo termine non contribuisce in quanto viola l'invarianza sotto CP. La contrazione tra $W^{\alpha\beta}$ e tensore leptonic dà il risultato:

$$L_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta} = \frac{16}{m^2} \sum_i W_i A_i, \quad (2.14)$$

con

$$\begin{aligned} A_1 &= m^2 k k' \\ A_2 &= (kp)(k'p) - \frac{A_1}{2} \\ A_3 &= (kp)(k'q) - (kq)(k'p) \\ A_4 &= (kq)(k'q) - \frac{q^2}{2} \frac{A_1}{m^2} \\ A_5 &= (kp)(k'q) + (k'p)(kq) - (pq) \frac{A_1}{m^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le funzioni di struttura sono diverse a seconda della regione cinematica considerata.

2.3 Regioni cinematiche

Applichiamo la conservazione del 4-impulso al vertice adronico (si veda la figura 2.1):

$$p' = p + q \quad \longrightarrow \quad p'^2 = p^2 + 2pq + q^2 \quad (2.16)$$

Il 4-impulso trasferito q è di tipo *spacelike*, come si vede facilmente se si trascurano le masse dei leptoni:

$$q^2 = (k - k')^2 \approx -2kk' = -4EE' \sin^2(\theta/2), \quad (2.17)$$

con θ angolo tra il neutrino incidente e il leptone uscente. È consuetudine pertanto definire $-q^2 = Q^2$. Detta W la massa invariante del sistema adronico finale, nel sistema di riferimento del laboratorio la (2.16) diventa:

$$W^2 = m^2 + 2m\omega - Q^2 \quad \longrightarrow \quad Q^2 = 2m\omega + m^2 - W^2 \quad (2.18)$$

Possiamo innanzitutto distinguere la diffusione *elastica* da quella *anelastica* a seconda del valore di W :

- $W = m \quad \longrightarrow \quad \textit{Scattering elastico}$

In questo caso l'energia trasferita e il 4-impulso trasferito sono legati dalla relazione

$$\omega = \frac{Q^2}{2m} \quad (2.19)$$

Nel piano (ω, Q^2) abbiamo una retta. La regione al di sopra di questa retta è proibita cinematicamente. Le funzioni di struttura dipendono da una sola variabile e si riducono ai fattori di forma di protone e neutrone.

- $W^2 > m^2 \quad \longrightarrow \quad \textit{Scattering anelastico}$

In questo caso le funzioni di struttura dipendono sia da Q^2 che da ω , che, essendo W variabile, sono variabili indipendenti. Possiamo individuare due ulteriori suddivisioni:

- *Regione di produzione di risonanze.*

Corrisponde alla produzione di stati adronici eccitati di massa invariante W , che successivamente decadono, principalmente in coppie nucleone-pione. Nel piano (ω, Q^2) abbiamo rette parallele alla retta corrispondente al caso elastico traslate lungo l'asse ω .

- *Regione di scattering profondamente anelastico.*

Si tratta del caso in cui sia Q^2 che ω sono molto grandi: il neutrino incidente ha un'energia sufficientemente grande da riuscire a risolvere i costituenti del nucleone. In questo caso le funzioni di struttura presentano il fenomeno dello *scaling*: risultano cioè dipendere solo dal rapporto $Q^2/2m\omega$. Alle energie in gioco nel presente lavoro di Tesi, questo canale risulta trascurabile.

2.4 Sezione d'urto elastica

Nella diffusione elastica lo stato adronico finale è costituito da un nucleone. Abbiamo cioè:

$$\nu_l + n \longrightarrow l^- + p \quad (2.20)$$

La corrente j_A^α presente nella (2.12) ha la struttura V–A. Gli elementi di matrice vettoriale e assiale si possono scrivere nel modo più generale in termini di fattori di forma nel seguente modo:

$$\langle s'p' | j_V^\alpha | sp \rangle = \bar{p}_{s'}(p') \Gamma_V^\alpha n_s(p) = \bar{N}_{s'}(p') \Gamma_V^\alpha \tau_+ N_s(p) \quad (2.21)$$

$$\langle s'p' | j_A^\alpha | sp \rangle = \bar{p}_{s'}(p') \Gamma_A^\alpha n_s(p) = \bar{N}_{s'}(p') \Gamma_A^\alpha \tau_+ N_s(p), \quad (2.22)$$

con

$$\Gamma_V^\alpha = \left(F_1 \gamma^\alpha + \frac{F_2}{2m} i \sigma^{\alpha\beta} q_\beta + F_S q^\alpha \right) \quad (2.23)$$

$$\Gamma_A^\alpha = \left(F_A \gamma^\alpha \gamma_5 + F_P q^\alpha \gamma_5 + F_T \gamma_5 i \sigma^{\alpha\beta} q_\beta \right) \quad (2.24)$$

dove N è il doppietto di isospin $(p, n)^T$ e τ_+ è l'operatore di innalzamento dell'isospin. Per ricavare le funzioni di struttura dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta} &\propto \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \langle s'p' | (j_V^\alpha - j_A^\alpha)^\dagger | sp \rangle \langle sp | (j_V^\beta - j_A^\beta) | s'p' \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \bar{p}_{s'}(p') \tilde{\Gamma}^\alpha n_s(p) \bar{n}_s(p) \Gamma^\beta p_{s'}(p') \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\not{p}' + m) \tilde{\Gamma}^\alpha (\not{p} + m) \Gamma^\beta \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

con $\Gamma^\alpha = \Gamma_V^\alpha - \Gamma_A^\alpha$ e $\tilde{\Gamma}^\alpha = \gamma_0 \Gamma^{\alpha\dagger} \gamma_0$, e uguagliare il risultato alla decomposizione (2.13).

Grazie all'ipotesi CVC¹, nella (2.23) si ha $F_S = 0$. Anche il termine con F_T nella (2.24) si considera nullo in quanto termine di *seconda classe*, ossia che trasforma sotto G-parità² in modo opposto rispetto agli altri termini, detti di *prima classe*; questo risulta essere incompatibile con il Modello Standard [20].

Le funzioni di struttura dipendono allora da quattro fattori di forma. Dato che contengono tutte una δ che esprime la condizione di elasticità (2.19), è conveniente scriverle nella forma [1]:

$$W_i = \tilde{W}_i \delta \left(\omega + \frac{q^2}{2m} \right) \quad (2.26)$$

¹Vedi appendice A

²Ricordiamo che $\mathcal{G} = \mathcal{C} e^{i\pi I_2}$, con I_2 seconda componente dell'isospin.

Risulta [1]:

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_1 &= 2 \left[-\frac{q^2}{2}(F_1 + F_2)^2 + \left(2m^2 - \frac{q^2}{2}\right) F_A^2 \right] \\
\tilde{W}_2 &= 4 \left[F_1^2 - \left(\frac{q^2}{4m^2}\right) F_2^2 + F_A^2 \right] \\
\tilde{W}_3 &= -4(F_1 + F_2)F_A \\
\tilde{W}_4 &= -2 \left[F_1 F_2 + \left(2m^2 + \frac{q^2}{2}\right) \frac{F_2^2}{4m^2} + \frac{q^2}{2} F_P^2 - 2m F_P F_A \right] \\
\tilde{W}_5 &= \frac{W_2}{2}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Sempre grazie all'ipotesi CVC, i fattori di forma F_1 e F_2 risultano essere legati ai fattori di forma elettromagnetici e vengono pertanto ricavati dai dati sulla diffusione elettrone–nucleo. Risulta in particolare:

$$F_{1,2} = F_{1,2}^p - F_{1,2}^n, \tag{2.28}$$

dove i fattori di forma del protone e del neutrone vengono ricavati rispettivamente studiando la diffusione su idrogeno e su deuterio, non essendo disponibile un bersaglio di neutroni liberi.

In luogo dei fattori di forma elettromagnetici $F_{1,2}^p$ e $F_{1,2}^n$ si usa in genere definire i fattori di forma elettrico e magnetico:

$$\begin{aligned}
G_E^{p,n} &= F_1^{p,n} + \tau F_2^{p,n} \\
G_M^{p,n} &= F_1^{p,n} + F_2^{p,n}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

con $\tau = q^2/4m^2$.

Unendo le (2.28) e (2.29) si ottiene:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{1-\tau}(G_E - \tau G_M) \\
F_2 &= \frac{1}{1-\tau}(-G_E + G_M)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

con

$$\begin{aligned}
G_E &= G_E^p \\
G_M &= G_M^p - G_M^n
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Dai dati sperimentali risulta che G_E e G_M sono ben approssimati dalla formula di dipolo:

$$\begin{aligned}
G_E &= \left(1 - \frac{q^2}{M_V^2}\right)^{-2} \\
G_M &= (\mu_p - \mu_n)G_E
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Il parametro M_V è detto massa vettoriale e vale ~ 0.84 GeV, mentre $\mu_p = 2.79$ e $\mu_n = -1.91$ sono i momenti magnetici di protone e neutrone in unità di magnetoni nucleari.

Per quanto riguarda la parte assiale, il fattore di forma F_A viene di solito parametrizzato in forma dipolare in analogia con i fattori di forma vettoriali:

$$F_A = g_A \left(1 - \frac{q^2}{M_A^2}\right)^{-2} \quad (2.33)$$

La costante g_A viene ricavata dallo studio del decadimento β ed è circa pari a -1.28 [21]. Il parametro M_A è detto massa assiale; il suo valore, determinato tramite esperimenti di diffusione neutrino-nucleone, elettroproduzione di pioni su nucleoni e cattura muonica su protone, è pari a ~ 1.03 GeV [22, 23].

Infine, il fattore di forma pseudoscalare F_P si può legare a F_A tramite l'ipotesi PCAC³.

2.5 Sezione d'urto nella regione di produzione di risonanze

Nella regione di produzione di risonanze (RES) la struttura interna del nucleone N viene eccitata in uno stato risonante R che successivamente decade in uno stato finale mesone-barione.

In questo caso nella (2.26) bisogna fare la sostituzione:

$$\delta(W^2 - m^2) \longrightarrow \mathcal{A}(W), \quad (2.34)$$

con $\mathcal{A}(W)$ distribuzione di massa della risonanza. Tale distribuzione è data com'è noto dalla formula di Breit-Wigner:

$$\mathcal{A}(W) = \frac{M_R \Gamma_R}{\pi} \frac{1}{(W^2 - M_R^2)^2 + M_R^2 \Gamma_R^2}, \quad (2.35)$$

con M_R valore centrale della massa e Γ_R larghezza di decadimento [1].

Il principale processo risonante nella diffusione neutrino-nucleone è la produzione di un pione, per la quale il contributo dominante è dato dalla risonanza $\Delta(1232)$.

Negli anni diversi autori hanno sviluppato vari modelli microscopici, che si possono raggruppare essenzialmente in tre categorie [2]. Nella prima categoria si fa una somma di ampiezze di Breit-Wigner per rappresentare i contributi risonanti [24, 25]. Nella seconda categoria si considerano sia meccanismi non risonanti sia contributi risonanti alla Breit-Wigner (si veda ad esempio [26, 27]). Nella terza categoria si aggiunge il contributo del *rescattering* adronico, vale a dire l'interazione dei prodotti di decadimento delle risonanze fra di loro e con altri nucleoni nel mezzo.

A quest'ultima categoria appartiene il modello da noi usato nel calcolo. Si tratta del modello dinamico a canali accoppiati (*dynamical coupled channels model*, DCC) sviluppato da T. Sato e T.-S. H. Lee negli anni '90 per lo scattering πN e la reazione $\gamma N \rightarrow \pi N$ (fotoproduzione di pioni su nuclei) [28]. Questo modello è stato successivamente applicato anche all'elettroproduzione [29] e alla produzione debole di mesoni [30, 31].

³Vedi appendice B

In tutti i modelli adronici le quantità chiave sono dei fattori di forma analoghi a quelli che abbiamo visto per il caso quasi-elastico, ma associati alle transizioni $N-R$. Nel caso della diffusione di neutrini i processi risonanti dominanti sono:

$$\nu_l + p \longrightarrow l^- + \Delta^{++} \quad (2.36)$$

$$\nu_l + n \longrightarrow l^- + \Delta^+ \quad (2.37)$$

L'elemento di matrice della corrente adronica viene parametrizzato nel seguente modo:

$$\langle \Delta(p') | j^\alpha(0) | N(p) \rangle = \bar{\psi}_\lambda(p') \Gamma^{\alpha\lambda} u(p), \quad (2.38)$$

dove $u(p)$ è lo spinore relativo al nucleone, $\psi_\lambda(p')$ è uno spinore di Rarita–Schwinger, che descrive una risonanza di spin $3/2$, e la funzione vertice è parametrizzata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha\beta} = & \left[\frac{C_3^V}{m} (g^{\alpha\beta} \not{q} - q^\alpha \gamma^\beta) + \frac{C_4^V}{m^2} (g^{\alpha\beta} q p' - q^\alpha p'^\beta) + \frac{C_5^V}{m^2} (g^{\alpha\beta} q p - q^\alpha p^\beta) + C_6^V g^{\alpha\beta} \right] \gamma_5 + \\ & + \frac{C_3^A}{m} (g^{\alpha\beta} \not{q} - q^\alpha \gamma^\beta) + \frac{C_4^A}{m^2} (g^{\alpha\beta} q p' - q^\alpha p'^\beta) + C_5^A g^{\alpha\beta} + \frac{C_6^A}{m^2} q^\alpha q^\beta \end{aligned} \quad (2.39)$$

In analogia con la (2.25), il tensore adronico $W^{\alpha\beta}$ sarà:

$$W^{\alpha\beta} \propto \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\tilde{\Gamma}^{\alpha\rho} \Lambda_{\rho\sigma} \Gamma^{\sigma\beta} (\not{p} + m) \right], \quad (2.40)$$

con $\Lambda_{\rho\sigma} = |\psi\rangle\langle\psi|$ proiettore di Rarita–Schwinger.

I fattori di forma vettoriali C^V vengono determinati analizzando la grande mole di dati esistenti sulla fotoproduzione e sull'elettroproduzione di pioni su nucleoni.

I fattori forma assiali C^A sono difficili da determinare a causa della scarsità di dati sperimentali. Quelli relativi alla transizione $N-\Delta$ si riescono in qualche modo a vincolare a partire dai dati ottenuti su deuterio in camera a bolle. Nel caso di una transizione $N-R$ tra nucleone e una generica risonanza R quello che si fa è utilizzare la relazione di Goldberger–Treiman⁴ per ricavare il valore dei fattori di forma a $q^2 = 0$ e assumere una certa dipendenza da q^2 , il più delle volte dipolare o dipolare modificata [2].

⁴Vedi appendice B.

Capitolo 3

Sezione d'urto neutrino–nucleo

Vogliamo ora studiare la sezione d'urto dei neutrini sui nuclei atomici. In particolare siamo interessati al processo di corrente carica¹:

$$\nu_l + A \longrightarrow l^- + X, \quad (3.1)$$

con A nucleo bersaglio, considerato in quiete, e X sistema adronico finale.

Si tratta di un problema complesso in quanto coinvolge la struttura e la dinamica nucleare. In genere i codici di simulazione Monte Carlo utilizzati nell'analisi dei dati sperimentali si basano su modelli nucleari a particelle indipendenti, in particolare il modello a *shell*, in cui i nucleoni si muovono in un campo medio, o il modello del gas di Fermi, in cui i nucleoni costituiscono un gas di Fermi degenere. Questi modelli riescono a spiegare alcuni fatti sperimentali, ma non riescono a dare una piena descrizione quantitativa dei dati. Nel calcolo effettuato in questo lavoro di Tesi la struttura nucleare è descritta da una funzione spettrale realistica calcolata utilizzando la teoria nucleare a molti corpi [32, 33]. Questo approccio consente di migliorare significativamente l'accordo con i dati sperimentali.

In questo capitolo affronteremo il calcolo della sezione d'urto di corrente carica neutrino-nucleo utilizzando l'approssimazione impulsiva, che permette la fattorizzazione del vertice adronico e l'introduzione della funzione spettrale nucleare. In questo modo il calcolo della sezione d'urto sul nucleo viene ricondotto a quello della sezione d'urto sul nucleone che abbiamo trattato nel capitolo precedente; si riescono inoltre a trattare in modo consistente i vari meccanismi di reazione. Descriveremo quali sono i canali di reazione dominanti nel range di energia rilevante per l'esperimento T2K e accenneremo al problema della loro identificazione ai fini di una corretta ricostruzione dell'energia del neutrino.

Indichiamo con A il numero di massa di un nucleo, con Z il numero atomico e con N il numero di neutroni.

¹I processi di corrente neutra non sono rilevanti per lo studio delle oscillazioni.

3.1 Struttura della sezione d'urto

La sezione d'urto del processo (3.1) può essere formalmente scritta in modo analogo alla (2.10):

$$\frac{d^2\sigma_A}{dE_{\mathbf{k}'}d\Omega_{\mathbf{k}'}} = \frac{G_F^2 V_{ud}^2 |\mathbf{k}'|}{32\pi^2 |\mathbf{k}|} L_{\alpha\beta} W_A^{\alpha\beta}, \quad (3.2)$$

Il tensore adronico, in analogia con la (2.12), avrà la seguente espressione:

$$\begin{aligned} W_A^{\alpha\beta} &= \overline{\sum_S} \sum_{S'} \int d^3P' \langle PS | J_A^{\alpha\dagger} | P'S' \rangle \langle P'S' | J_A^\beta | PS \rangle \delta^{(4)}(P + q - P') \\ &= \sum_X \langle 0 | J_A^{\alpha\dagger} | X \rangle \langle X | J_A^\beta | 0 \rangle \delta^{(4)}(P + q - P'), \end{aligned} \quad (3.3)$$

con $P = (E_P, \mathbf{P}) = (M_A, \mathbf{0})$ e $P' = (E_{P'}, \mathbf{P}')$ 4-impulsi rispettivamente del nucleo bersaglio e del sistema adronico finale, S e S' i relativi spin e $|0\rangle$ stato fondamentale del nucleo bersaglio; la sommatoria su X sta ad indicare sia le somme sugli spin che l'integrale sull'impulso finale.

Se l'impulso trasferito è sufficientemente basso ($|\mathbf{q}| \lesssim 0.5$ GeV), il calcolo di $W_A^{\alpha\beta}$ può essere fatto nell'ambito della teoria nucleare a molti corpi (*Nuclear Many Body Theory*, NMBT) usando funzioni d'onda non relativistiche per descrivere gli stati iniziali e finali. Questo non può essere fatto per valori di $|\mathbf{q}|$ più alti, in particolare in corrispondenza di un'energia del fascio incidente attorno a ~ 1 GeV. In questo regime lo stato finale adronico e l'operatore di corrente debole nucleare, che dipendono entrambi dall'impulso trasferito, non possono essere descritti nell'ambito dell'approssimazione non relativistica, e sono necessarie delle assunzioni che semplifichino il problema [19, 34, 35].

3.2 Approssimazione impulsiva

Nel range di energia che ci interessa è applicabile l'*approssimazione impulsiva* (IA), basata essenzialmente su due assunzioni [19, 34, 35]:

- poiché la risoluzione spaziale della particella sonda è $\lambda \sim 1/|\mathbf{q}|$, se l'impulso trasferito è sufficientemente grande — cioè se λ è molto minore della distanza media tra i nucleoni nel nucleo bersaglio — la diffusione su un nucleo si riduce alla somma incoerente dei processi di diffusione sui singoli nucleoni, considerati comunque *legati* e non liberi;
- non c'è interazione fra il sistema adronico prodotto nella collisione e il nucleo residuo che rincula, ossia i due sistemi evolvono in maniera indipendente (assenza di interazioni nello stato finale: *Final State Interactions*, FSI)

Sotto queste condizioni la corrente adronica si riduce alla somma di correnti a un corpo:

$$J_A^\alpha \longrightarrow \sum_i j_i^\alpha \quad (3.4)$$

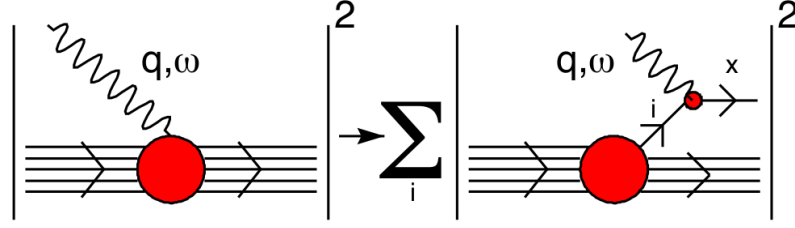


Figura 3.1. Rappresentazione diagrammatica del processo $\nu_l + A \rightarrow l^- + X$ nell'approssimazione impulsiva [19].

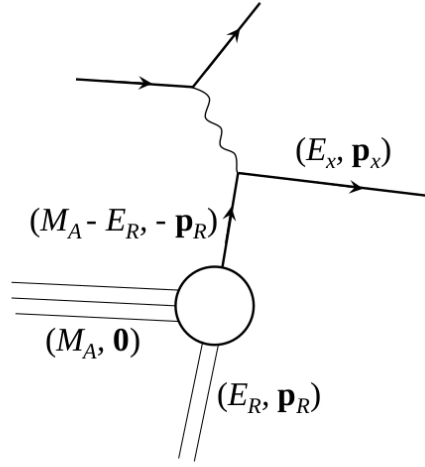


Figura 3.2. Variabili cinematiche adroniche.

e lo stato adronico finale si può scrivere come il prodotto diretto tra il nuovo stato adronico prodotto, di impulso \mathbf{p}_x , e lo stato che descrive il nucleo residuo, avente impulso $\mathbf{p}_R = \mathbf{q} - \mathbf{p}_x$:

$$|X\rangle \longrightarrow |x, \mathbf{p}_x\rangle \otimes |\mathcal{R}, \mathbf{p}_R\rangle \quad (3.5)$$

Il tensore adronico (3.3) diventa:

$$W_A^{\alpha\beta} = \sum_{x, \mathcal{R}} \int d^3 p_x d^3 p_R \sum_i \langle 0 | j_i^{\alpha\dagger} | x, \mathbf{p}_x \rangle |\mathcal{R}, \mathbf{p}_R\rangle \langle \mathbf{p}_R, \mathcal{R} | \langle \mathbf{p}_x, x | j_i^\beta | 0 \rangle \delta^{(4)}(P + q - P') \quad (3.6)$$

Introduciamo ora un insieme completo di stati di nucleone libero $|N, -\mathbf{p}_R\rangle$ e inseriamo nella (3.6) due somme di completezza:

$$W_A^{\alpha\beta} = \sum_{x, \mathcal{R}} \int d^3 p_x d^3 p_R \frac{m}{E_R} \sum_i \langle 0 | N, -\mathbf{p}_R \rangle \langle N, -\mathbf{p}_R | j_i^{\alpha\dagger} | x, \mathbf{p}_x \rangle |\mathcal{R}, \mathbf{p}_R\rangle \times \langle \mathbf{p}_R, \mathcal{R} | \langle \mathbf{p}_x, x | j_i^\beta | N, -\mathbf{p}_R \rangle \langle N, -\mathbf{p}_R | 0 \rangle \delta^{(4)}(P + q - P'), \quad (3.7)$$

dove il fattore m/E_R tiene conto della normalizzazione covariante implicita dello stato $|N, -\mathbf{p}_R\rangle$ all'interno dell'elemento di matrice della corrente.

Detta ω l'energia trasferita e ricordando che siamo nel sistema di riferimento di

quiete del nucleo bersaglio, abbiamo:

$$W_A^{\alpha\beta} = \sum_{x, \mathcal{R}} \int d^3 p_x d^3 p_{\mathcal{R}} |\langle 0 | \mathcal{R}, \mathbf{p}_{\mathcal{R}}; N, -\mathbf{p}_{\mathcal{R}} \rangle|^2 \frac{m}{E_{\mathcal{R}}} \sum_i \langle N, -\mathbf{p}_{\mathcal{R}} | j_i^{\alpha\dagger} | x, \mathbf{p}_x \rangle \times \\ \times \langle \mathbf{p}_x, x | j_i^\beta | N, -\mathbf{p}_{\mathcal{R}} \rangle \delta(M_A + \omega - E_{\mathcal{R}} - E_x) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{\mathcal{R}} - \mathbf{p}_x) \quad (3.8)$$

Usiamo ora l'identità

$$\delta(\omega + M_A - E_{\mathcal{R}} - E_x) = \int dE \delta(M_A - E_{\mathcal{R}} - m + E) \delta(\omega + m - E - E_x) \quad (3.9)$$

e ridefiniamo $\mathbf{p}_{\mathcal{R}} \rightarrow -\mathbf{p}$:

$$W_A^{\alpha\beta} = \sum_{x, \mathcal{R}} \int dE d^3 p_x d^3 p |\langle 0 | \mathcal{R}, -\mathbf{p}; N, \mathbf{p} \rangle|^2 \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sum_i \langle N, \mathbf{p} | j_i^{\alpha\dagger} | x, \mathbf{p}_x \rangle \\ \times \langle \mathbf{p}_x, x | j_i^\beta | N, \mathbf{p} \rangle \delta(M_A - E_{\mathcal{R}} - m + E) \delta(\omega + m - E - E_x) \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}_x) \\ = \sum_{x, \mathcal{R}} \int dE d^3 p |\langle 0 | \mathcal{R}, -\mathbf{p}; N, \mathbf{p} \rangle|^2 \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sum_i \langle N, \mathbf{p} | j_i^{\alpha\dagger} | x, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle \\ \times \langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, x | j_i^\beta | N, \mathbf{p} \rangle \delta(M_A - E_{\mathcal{R}} - m + E) \delta(\omega + m - E - E_x) \quad (3.10)$$

Definiamo la *funzione spettrale* del nucleo bersaglio:

$$P(\mathbf{p}, E) = \sum_{\mathcal{R}} |\langle 0 | \mathcal{R}, -\mathbf{p}; N, \mathbf{p} \rangle|^2 \delta(M_A - E_{\mathcal{R}} - m + E), \quad (3.11)$$

che dà la distribuzione di probabilità di rimuovere un nucleone di impulso \mathbf{p} dal nucleo bersaglio lasciando il nucleo residuo con energia $E_{\mathcal{R}} = M_A - m + E$.

Il tensore adronico diventa:

$$W_A^{\alpha\beta} = \sum_i \int d^3 p dE \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} P(\mathbf{p}, E) W_i^{\alpha\beta}(\tilde{q}, \tilde{p}), \quad (3.12)$$

dove si avrà $P(\mathbf{p}, E) = P_p(\mathbf{p}, E)$ se l' i -esimo nucleone è un protone, $P(\mathbf{p}, E) = P_n(\mathbf{p}, E)$ se è un neutrone. Nella materia nucleare simmetrica si ha $P_p(\mathbf{p}, E) = P_n(\mathbf{p}, E)$.

Il tensore $W_i^{\alpha\beta}(\tilde{q}, \tilde{p})$ ha la seguente espressione:

$$W_i^{\alpha\beta}(\tilde{q}, \tilde{p}) = \sum_x \langle N, \mathbf{p} | j_i^{\alpha\dagger} | x, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, x | j_i^\beta | N, \mathbf{p} \rangle \delta(\tilde{\omega} + E_{\mathbf{p}} - E_x), \quad (3.13)$$

analoga alla (2.12), ma con una importante differenza. Dal confronto con la (3.10) si vede infatti che è stato posto

$$\omega + m - E \rightarrow \tilde{\omega} + E_{\mathbf{p}}, \quad (3.14)$$

cioè il tensore (3.13) descrive l'interazione debole di un nucleone *libero*, dove però l'energia trasferita nel processo di diffusione non è ω ma $\tilde{\omega} = \omega + m - E - E_{\mathbf{p}}$. Ne segue banalmente che $W_i^{\alpha\beta}$ non dipende da p e q ma da \tilde{p} e \tilde{q} :

$$\begin{cases} p = (M_A - E_{\mathcal{R}}, \mathbf{p}) \\ q = (\omega, \mathbf{q}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \tilde{p} = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \\ \tilde{q} = (\omega + M_A - E_{\mathcal{R}} - E_{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) \end{cases} \quad (3.15)$$

Naturalmente deve risultare:

$$p + q = \tilde{p} + \tilde{q} \quad (3.16)$$

In questo modo si tiene conto del fatto che una parte $\delta\omega$ dell'energia trasferita va in energia di eccitazione del sistema spettatore, e il processo di diffusione viene descritto come se avvenisse nel vuoto con energia traferita $\tilde{\omega} = \omega - \delta\omega$ [35].

Inserendo la (3.12) nella (3.2) abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_A}{dE_{\mathbf{k}'}d\Omega_{\mathbf{k}'}} &= \frac{G_F^2 V_{ud}^2 |\mathbf{k}'|}{32\pi^2 |\mathbf{k}|} L_{\alpha\beta} \sum_i \int d^3p dE \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} P(\mathbf{p}, E) W_i^{\alpha\beta}(\tilde{q}, \tilde{p}) \\ &= \sum_i \int d^3p dE \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} P(\mathbf{p}, E) \frac{G_F^2 V_{ud}^2 |\mathbf{k}'|}{32\pi^2 |\mathbf{k}|} L_{\alpha\beta} W_i^{\alpha\beta}(\tilde{q}, \tilde{p}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

La sezione d'urto (3.2) si può quindi scrivere

$$\frac{d^2\sigma_A}{dE_{\mathbf{k}'}d\Omega_{\mathbf{k}'}} = \sum_i \int dE d^3p P(\mathbf{p}, E) \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \frac{d^2\sigma_i}{dE_{\mathbf{k}'}d\Omega_{\mathbf{k}'}} \quad (3.18)$$

dove $d^2\sigma_i/dE_{\mathbf{k}'}d\Omega_{\mathbf{k}'}$ è la sezione d'urto di diffusione su nucleone che abbiamo visto nel capitolo (2).

3.3 La funzione spettrale nucleare

Nel formalismo che abbiamo introdotto la dinamica nucleare è descritta dalla funzione spettrale:

$$P(\mathbf{p}, E) = \sum_{\mathcal{R}} |\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(\mathbf{p})|^2 \delta(M_A - E_{\mathcal{R}} - m + E), \quad (3.19)$$

che dà la distribuzione di probabilità di rimuovere un nucleone dal nucleo bersaglio lasciando il nucleo residuo con energia $E_{\mathcal{R}} = M_A - m + E$.

L'ampiezza $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}(\mathbf{p}) = \langle 0 | \mathcal{R}, -\mathbf{p}; N, \mathbf{p} \rangle$ è una caratteristica intrinseca del nucleo bersaglio, indipendente dal 4-impulso trasferito, e pertanto calcolabile in approssimazione non relativistica.

Nel modello a shell, in cui i nucleoni sono particelle indipendenti che si muovono in un campo medio, la funzione spettrale si riduce a:

$$P_{\text{SM}}(\mathbf{p}, E) = \sum_{n \in \{F\}} |\phi_n(\mathbf{p})|^2 \delta(E - E_n), \quad (3.20)$$

con $\phi_n(\mathbf{p})$ funzione d'onda di singola particella nello spazio degli impulsi ed E_n energia corrispondente. La somma è estesa a tutti gli stati occupati appartenenti al mare di Fermi [1, 34]. Nel caso del modello del gas di Fermi i nucleoni sono particelle libere; tutti gli stati di singola particella sono occupati con probabilità 1 fino a un impulso pari all'impulso di Fermi p_F , mentre tutti gli stati con $|\mathbf{p}| > p_F$ sono vuoti. La funzione spettrale è quindi:

$$P_{\text{FG}}(\mathbf{p}, E) = \frac{3}{4\pi p_F^3} \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \delta(E - E_{\mathbf{p}} + \bar{\epsilon}), \quad (3.21)$$

dove $E_{\mathbf{p}}$ è l'energia di un nucleone libero di impulso \mathbf{p} e $\bar{\epsilon}$ è un'energia di legame media [1].

Le (3.20) e (3.21) sono approssimazioni piuttosto buone per $|\mathbf{p}| \lesssim 250$ MeV (ordine di grandezza tipico di p_F) ed E minore delle energie necessarie per rimuovere un nucleone dai livelli del modello a shell. Tuttavia, se si vanno a utilizzare modelli nucleari realistici, in cui si tiene conto degli effetti delle correlazioni tra nucleoni, si vede che la funzione spettrale si estende fino a grandi valori di energia e impulso, dove le (3.20) e (3.21) sono nulle. Gli effetti delle correlazioni possono essere trattati in modo consistente nell'ambito della NMBT, nella quale il nucleo è visto come un insieme di A nucleoni descritto dall'Hamiltoniana non relativistica:

$$H = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{j>i} v_{ij} + \sum_{k>j>i} V_{ijk} \quad (3.22)$$

La parte a lungo raggio del potenziale v_{ij} , tipicamente corrispondente a $r_{ij} > m_{\pi}^{-1}$, si ottiene dalla teoria di Yukawa dell'interazione mediata dallo scambio di un pione. La parte a medio e corto raggio è determinata fenomenologicamente, utilizzando le proprietà osservate del sistema di due nucleoni, sia nel suo unico stato legato — il nucleo di deuterio, o deutone — che negli stati di scattering a energie fino alla soglia di produzione dei pioni. L'introduzione del potenziale a tre corpi V_{ijk} , tale che $\langle V_{ijk} \rangle \ll \langle v_{ij} \rangle$, permette di riprodurre accuratamente l'energia dello stato fondamentale e degli stati legati di tre nucleoni, i nuclei ${}^3\text{H}$ e ${}^3\text{He}$.

Nel modello a shell quello che si fa è sostituire i termini d'interazione nella (3.22) con un campo medio, mentre nel modello del gas di Fermi le interazioni si trascurano del tutto. Le linee spettroscopiche previste dal modello a shell risultano ben visibili negli spettri ottenuti dagli esperimenti di scattering, ma la relativa intensità è sensibilmente inferiore rispetto a quanto previsto. Ciò è dovuto principalmente al fatto che le correlazioni dinamiche fra nucleoni, trascurate nel modello a shell, danno luogo a processi di scattering virtuali che portano all'eccitazione dei nucleoni coinvolti fino a energie superiori all'energia di Fermi. La NMBT, tenendo conto di queste correlazioni, riesce a ottenere un ottimo accordo con i dati sperimentali.

Il calcolo della funzione spettrale nella NMBT presenta un grado di complessità rapidamente crescente con A , pertanto è stato svolto solo per $A \leq 4$. Tuttavia, grazie alle semplificazioni associate all'invarianza per traslazioni, sono disponibili risultati molto accurati anche per la materia nucleare simmetrica [32, 36].

Le funzioni spettrali per i nuclei dal carbonio ($A = 12$) all'oro ($A = 197$) sono state calcolate usando la *Local Density Approximation* (LDA) [33]. In quest'approccio $P(\mathbf{p}, E)$ viene divisa in due parti, corrispondenti rispettivamente a nucleoni di basso impulso e di alto impulso [19]:

$$P(\mathbf{p}, E) = P_{\text{SM}}(\mathbf{p}, E) + P_{\text{CORR.}}(\mathbf{p}, E) \quad (3.23)$$

I nucleoni di basso impulso occupano gli stati del modello a shell, e la funzione spettrale viene scritta nella forma:

$$P_{\text{SM}}(\mathbf{p}, E) = \sum_{n \in \{F\}} Z_n |\phi_n(\mathbf{p})|^2 F_n(E - E_n) \quad (3.24)$$

I fattori $Z_n < 1$ e le funzioni F_n tengono conto della larghezza finita dei livelli e descrivono gli effetti di interazioni residue non incluse nell'approssimazione di campo

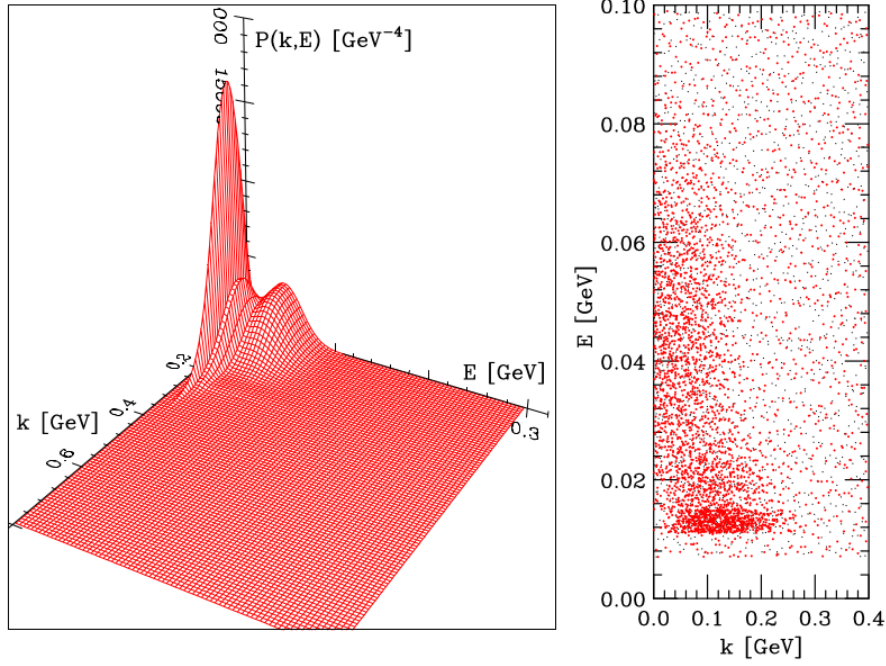


Figura 3.3. Plot tridimensionale e *scatter plot* della funzione spettrale dell'ossigeno ottenuta da Benhar et al. usando l'approccio LDA [35].

medio. In assenza di queste interazioni si ha $Z_n \rightarrow 1$ e $F_n(E - E_n) \rightarrow \delta(E - E_n)$ e si ottiene la (3.20).

La parte dovuta alle correlazioni viene ricavata dalla corrispondente quantità calcolata per la materia nucleare:

$$P_{\text{corr.}}(\mathbf{p}, E) = \int d^3r \rho_A(\mathbf{r}) P_{\text{corr.}}^{\text{NM}}(\mathbf{p}, E; \rho = \rho_A(\mathbf{r})), \quad (3.25)$$

dove $\rho_A(\mathbf{r})$ è la distribuzione di densità nucleare e $P_{\text{corr.}}^{\text{NM}}(\mathbf{p}, E; \rho = \rho_A(\mathbf{r}))$ si riferisce alla materia nucleare alla densità ρ . In figura 3.3 vediamo rappresentata la funzione spettrale dell'ossigeno calcolata con questo metodo [35].

L'approssimazione LDA si basa sull'ipotesi che la dinamica nucleare a corto raggio, dominata dalle correlazioni che danno luogo ai contributi a grande impulso, non sia influenzata da effetti di superficie e di shell. La validità di questa ipotesi appare chiara se si guarda la distribuzione di impulso dei nucleoni:

$$n(\mathbf{p}) = \int dE [Z P_p(\mathbf{p}, E) + (A - Z) P_n(\mathbf{p}, E)] \quad (3.26)$$

I risultati dei calcoli teorici ([37, 38]) mostrano che la distribuzione di impulso per nucleone $n(\mathbf{p})/A$ diventa praticamente indipendente da A per \mathbf{p} grande ($\gtrsim 300$ MeV). Un esempio di questo andamento è mostrato nella figura 3.4 per ossigeno e l'oro [19]. Questa caratteristica varrà anche per la parte di funzione spettrale dovuta alle correlazioni; si può quindi usare il risultato ottenuto per la materia nucleare, $P_{\text{corr.}}^{\text{NM}}$, per approssimare $P_{\text{corr.}}$ per nuclei finiti [1, 34].

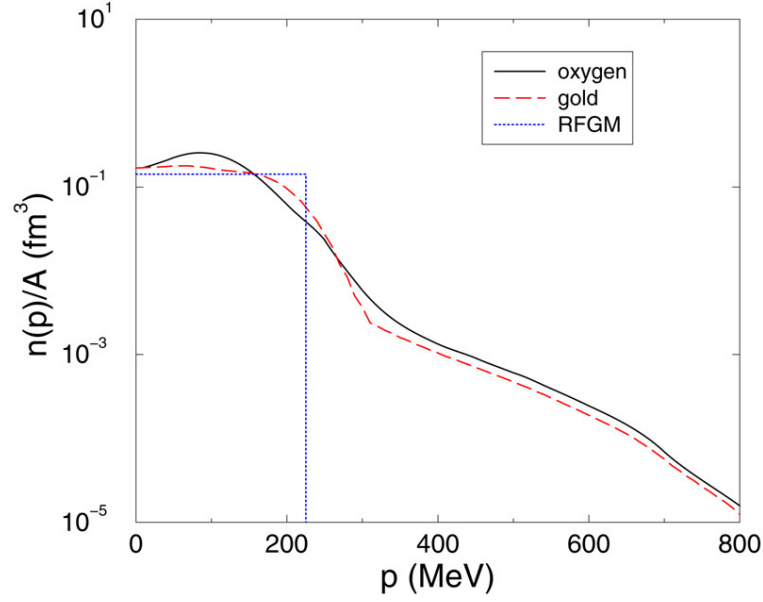


Figura 3.4. Distribuzione di impulso per nucleone nello stato fondamentale dell'ossigeno e dell'oro. Viene mostrata per confronto l'analogia distribuzione per un gas di Fermi con $p_F = 225$ MeV e $E_B = 25$ MeV [19].

Da notare che nell'ambito dell'approssimazione impulsiva vengono trascurate le correlazioni *statistiche*, che nascono dall'antisimmetrizzazione del nucleone espulso rispetto ai nucleoni spettatori. Questo perché il *Pauli blocking* ha un effetto trascurabile sulla sezione d'urto differenziale per $|\mathbf{q}| \gtrsim 500$ MeV. Se si vuole tener conto di questo effetto, benché piccolo, un modo semplice e ragionevole di farlo è effettuare la sostituzione:

$$P(\mathbf{p}, E) \longrightarrow P(\mathbf{p}, E)\theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - \bar{p}_F), \quad (3.27)$$

con \bar{p}_F impulso di Fermi medio [1, 19].

3.4 Regioni cinematiche

Vediamo quali tipi di processi contribuiscono alla sezione d'urto neutrino-nucleo. In figura 3.5 vediamo schematizzata la risposta di un nucleo atomico a una sonda elettrodebole in funzione dell'energia trasferita ω .

Quando l'energia trasferita è molto piccola, di pochi MeV, vengono eccitati i livelli nucleari discreti e successivamente le cosiddette risonanze giganti. Quando ω è dell'ordine di poche centinaia di MeV si entra nella regione della diffusione quasi-elastica (*Quasi-Elastic Scattering*, QE), seguita dalla regione di produzione di risonanze (RES). Per $\omega \gtrsim 1$ GeV si raggiunge la regione di diffusione profondamente anelastica (*Deep Inelastic Scattering*, DIS), il cui contributo viene trascurato in questa Tesi.

Nel piano (ω, Q^2) ci sarà una suddivisione analoga a quella di cui abbiamo parlato nella sezione 2.3 e che vediamo illustrata nella figura 3.6.

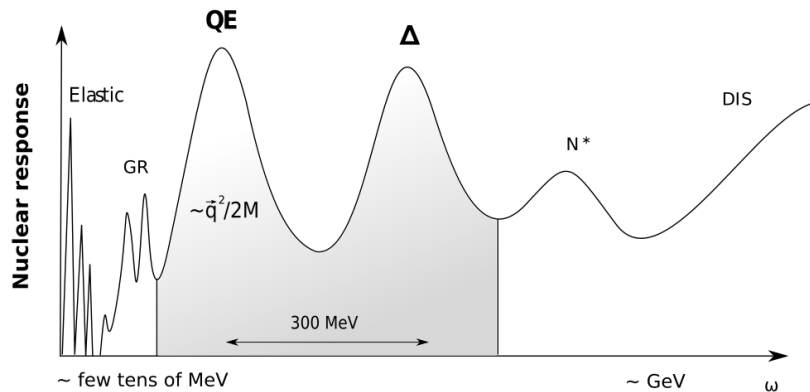


Figura 3.5. Risposta nucleare a una sonda elettrodebole in funzione dell'energia trasferita [39].

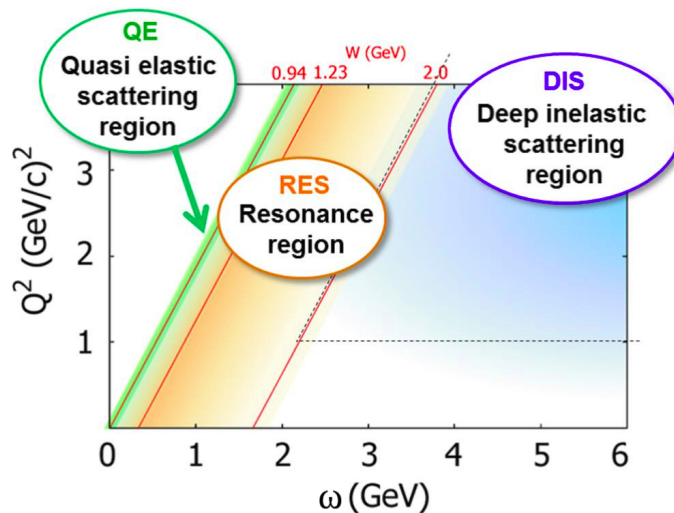


Figura 3.6. Regioni cinematiche dell'interazione neutrino-nucleo [2].

3.5 CCQE

Si parla di diffusione quasi-elastica quando il nucleone bersaglio è espulso dal nucleo (*single nucleon knock-out*); lo stato adronico finale è composto quindi da un nucleo residuo e da un nucleone. Il processo può essere di corrente carica (Charged Current Quasi-Elastic, CCQE) o di corrente neutra (Neutral Current Quasi Elastic, NCQE). Negli esperimenti volti a studiare le oscillazioni dei neutrini ci si concentra sul CCQE, per svariati motivi [40]:

- Si tratta del processo dominante per energie attorno a 1 GeV.
- Ha una topologia semplice da identificare.
- Le proprietà del neutrino possono essere dedotte da quelle del leptone carico uscente. Si può così determinare la famiglia leptonica di appartenenza del neutrino, cosa che non è possibile fare in un processo di corrente neutra.

Nel caso di un neutrino di sapore l avremo il seguente processo CCQE:

$$v_l + A \longrightarrow l^- + p + (A - 1), \quad (3.28)$$

che corrisponde al processo elementare (2.1).

In base a quanto visto nella sezione 3.2, le funzioni di struttura si otterranno dalle (2.27) semplicemente sostituendo q^2 con \tilde{q}^2 .

La diffusione è *quasi*-elastica poiché è la somma incoerente di urti su nucleoni che non sono liberi ma legati all'interno del nucleo e hanno un impulso di Fermi $\Delta p \sim R^{-1}$, con R raggio nucleare [41]. Questo corrisponde a un picco nella sezione d'urto molto allargato rispetto alla diffusione su un nucleone libero.

3.6 Ricostruzione dell'energia del neutrino

Le reazioni di tipo CCQE vengono utilizzate dagli attuali esperimenti per ricostruire l'energia del neutrino; sono in pratica i *signal events* degli esperimenti di oscillazione [18]. La probabilità di oscillazione dipende infatti esplicitamente dall'energia del neutrino (si veda la (1.54)), la cui corretta conoscenza è pertanto fondamentale.

Applicando la conservazione del 4-impulso al processo (2.1) si ottiene:

$$E_\nu = \frac{m_p^2 - m_l^2 - E_n^2 + 2E_l E_n - 2\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{p}_n + |\mathbf{p}_n|^2}{2(E_n - E_l + |\mathbf{k}_l| \cos \theta_l - |\mathbf{p}_n| \cos \theta_n)}, \quad (3.29)$$

dove per maggiore chiarezza abbiamo indicato le varie particelle con dei pedici. Le grandezze $|\mathbf{k}_l|$ e θ_l vengono misurate, mentre \mathbf{p}_n ed E_n sono ignote. Pertanto E_ν non è univocamente determinata ma presenta una certa distribuzione, che riflette la distribuzione in energia e impulso del nucleone bersaglio, e dipende quindi dal modello usato per descrivere lo stato fondamentale del nucleo.

Nell'analisi dei dati sperimentali spesso quello che si fa è assumere che il nucleone sia a riposo e porre $|\mathbf{p}_n| = 0$ e $E_n = m_n - \epsilon$ [40, 42]:

$$E_\nu = \frac{2(m_n - \epsilon)E_l + 2m_n\epsilon - \epsilon^2 - m_l^2}{2(m_n - \epsilon - E_l + |\mathbf{k}_l| \cos \theta_l)}, \quad (3.30)$$

con $\epsilon \sim 20$ MeV per il carbonio e l'ossigeno. Questo metodo introduce però un grande errore sistematico nell'analisi dei dati. Si tratta di un problema che è stato analizzato negli ultimi anni usando diversi modelli. Ne risulta che l'energia del neutrino ricostruita è in genere sottostimata, anche di molto. A titolo di esempio riportiamo in figura 3.7 il confronto, effettuato in [43], tra la distribuzione di energia calcolata a partire dalla funzione spettrale dell'ossigeno e quella calcolata utilizzando il modello del gas di Fermi con $p_F = 225$ MeV ed energia di rimozione $\epsilon = 27$ MeV. Le frecce puntano ai valori ottenuti dalla (3.30). Le distribuzioni predette dal FG sono più piccate attorno ai valori di E_ν ricostruiti, mentre quelle ottenute dalla funzione spettrale di [35] sono spostate verso energie più alte di circa ~ 20 MeV e presentano delle code che si estendono fino a valori molto alti di E_ν .

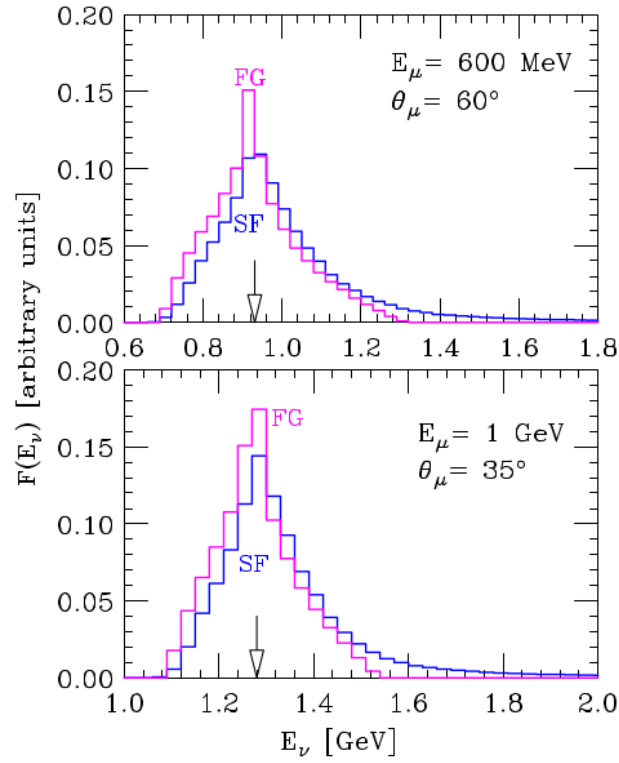


Figura 3.7. Distribuzione di energia del neutrino per due diversi valori delle variabili cinematiche del muone. La distribuzione è calcolata in due diversi modi: i) campionando i valori di $|\mathbf{p}_n|$ e E_n secondo la distribuzione di probabilità associata alla funzione spettrale dell'ossigeno (SF) ii) utilizzando il modello del gas di Fermi (FG). Le frecce puntano ai valori dati dalla (3.30) [43].

3.7 $CC1\pi$ e $CCQE$ -like

Il processo $CC1\pi$, ossia la produzione di un pione in un processo di corrente carica, fornisce il secondo maggior contributo alla sezione d'urto neutrino-nucleo nel range di energia che ci interessa [18]. La produzione di pioni è principalmente di tipo risonante, cioè avviene per decadimento di una risonanza prodotta nel vertice adronico; la risonanza Δ è quella che dà il contributo di gran lunga maggiore. Anche in questo caso, naturalmente, grazie all'approssimazione impulsiva vale quanto detto nella sezione 2.5 a proposito della sezione d'urto neutrino-nucleone, a patto di sostituire i 4-impulsi p e q con le rispettive variabili tildate.

Il $CC1\pi$ risulta essere il maggior segnale di fondo per il $CCQE$. Infatti se un pione prodotto viene assorbito o non rivelato, l'evento è erroneamente identificato come $CCQE$. Si parla in questo caso di eventi $CCQE$ -like. Per quanto visto nella sezione precedente, è chiaro che la non corretta identificazione degli eventi conduce a una non corretta ricostruzione dell'energia del neutrino. Si capisce quindi come comprendere il $CC1\pi$ in modo appropriato sia di fondamentale importanza negli esperimenti di oscillazione.

Capitolo 4

Risultati numerici

In questo capitolo descriviamo il nostro calcolo numerico ed esponiamo i risultati. Si tratta del primo calcolo della sezione d'urto inclusiva doppio-differenziale di corrente carica neutrino-nucleo, integrata sul flusso incidente, che tiene conto in modo consistente della dinamica nucleare nei vari canali di reazione. Come descritto nei precedenti capitoli, i processi dominanti sono la diffusione quasi-elastica e la produzione di pioni. Includendo entrambi i contributi, il nostro calcolo risulta essere direttamente confrontabile con i dati sperimentali. Facciamo riferimento in particolare alle misure effettuate dalla collaborazione T2K nel *near detector* [3, 4]. Data l'importanza del CCQE, di cui abbiamo parlato nel capitolo 3, analizziamo innanzitutto questo canale separatamente, confrontando il nostro calcolo con i dati di T2K riportati in [4]. È importante sottolineare che, a livello sperimentale, c'è il problema degli *stopped pions*, ossia i pioni che vengono assorbiti e che quindi danno luogo a eventi erroneamente identificati come CCQE. Per questo motivo la collaborazione T2K, nel classificare gli eventi, non parla di CCQE, ma di $CC0\pi$. Successivamente passiamo a esporre i risultati del nostro calcolo completo, dato dalla somma di sezione d'urto quasi-elastica e anelastica, e a confrontarli con i dati riportati in [3].

4.1 Calcolo numerico della sezione d'urto

Siamo interessati al confronto con le misure effettuate dall'esperimento T2K nel *near detector*. Il fascio incidente è costituito principalmente da neutrini muonici. Il *target* effettivo è costituito da uno scintillatore plastico, il polistirene (C_8H_8); ci interessa quindi la sezione d'urto sul carbonio¹.

L'esperimento misura la sezione d'urto inclusiva differenziale in funzione delle variabili cinematiche del muone finale, in particolare il suo impulso $|\mathbf{p}_\mu|$ e il coseno dell'angolo di diffusione θ_μ . Dato che i neutrini provengono dal decadimento in volo di pioni e kaoni, il fascio non è monoenergetico, ma ha uno spettro di energia $\Phi(E_\nu)$ che vediamo in figura 4.1.

¹Il target naturalmente ha in realtà una composizione chimica complicata: oltre al carbonio (86.1%) e all'idrogeno (7.4%) sono presenti ossigeno (3.7%) e piccole quantità di altri elementi (Ti, Si, N); il contributo di elementi diversi dal carbonio risulta tuttavia trascurabile [4].

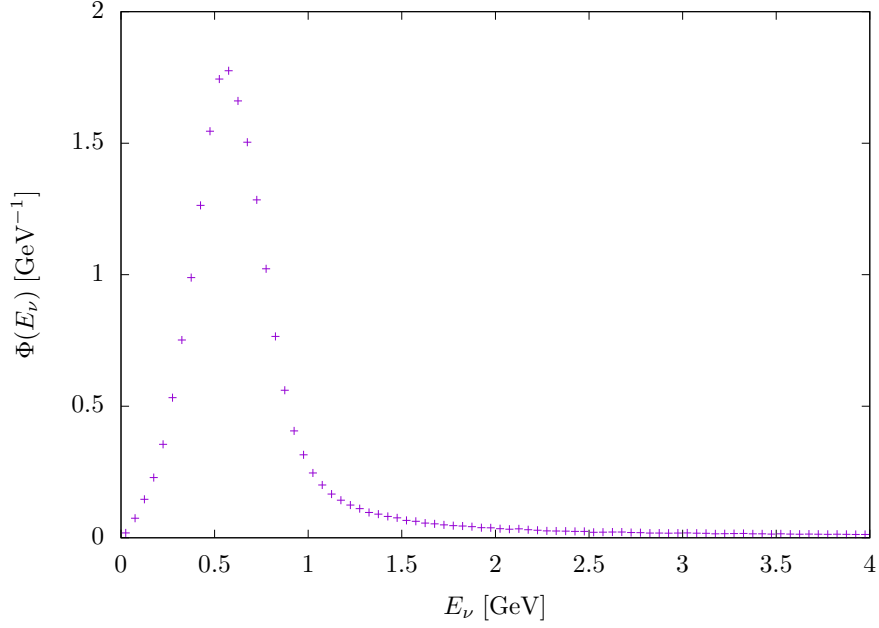


Figura 4.1. Flusso incidente normalizzato dell'esperimento T2K.

La grandezza che dobbiamo calcolare è quindi la sezione d'urto differenziale integrata sul flusso:

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d|\mathbf{p}_\mu|d\cos\theta_\mu} \right)^{\text{f.i.}} = \int dE_\nu \Phi(E_\nu) \frac{1}{\Delta|\mathbf{p}_\mu|\Delta\cos\theta_\mu} \int_{\Delta\cos\theta_\mu} d\cos\theta_\mu \int_{\Delta|\mathbf{p}_\mu|} d|\mathbf{p}_\mu| \frac{d^2\sigma_A}{d|\mathbf{p}_\mu|d\cos\theta_\mu}(E_\nu, |\mathbf{p}_\mu|, \cos\theta_\mu), \quad (4.1)$$

dove $\Phi(E_\nu)$ è normalizzato a 1 e σ_A è la sezione d'urto sul nucleo, data dalla (3.18):

$$\frac{d^2\sigma_A}{d|\mathbf{p}_\mu|d\cos\theta_\mu}(E_\nu, |\mathbf{p}_\mu|, \cos\theta_\mu) = N \int dE d^3p P(\mathbf{p}, E) \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \frac{d^2\sigma_N}{d|\mathbf{p}_\mu|d\cos\theta_\mu}(\mathbf{p}, E, E_\nu, |\mathbf{p}_\mu|, \cos\theta_\mu), \quad (4.2)$$

con σ_N sezione d'urto sul singolo nucleone, data dalla (2.10), e $P(\mathbf{p}, E)$ funzione spettrale del carbonio.

Nella (4.1) le quantità $\Delta|\mathbf{p}_\mu|$ e $\Delta\cos\theta_\mu$ indicano la larghezza del singolo *bin* nelle variabili $|\mathbf{p}_\mu|$ e $\cos\theta_\mu$.

L'integrazione sull'impulso nella (4.2) si può scrivere:

$$d^3p = |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d\cos\alpha d\phi, \quad (4.3)$$

dove α è l'angolo tra \mathbf{p} e \mathbf{q} .

Risulta conveniente passare dall'integrazione in $d\cos\alpha$ a un'integrazione nella massa

invariante W dello stato adronico finale $|x, \mathbf{p} + \mathbf{q}\rangle$.

Dette M_{A-1} ed E_{A-1} la massa e l'energia del nucleo residuo, abbiamo:

$$W^2 = E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}^2 - |\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 = (\tilde{\omega} + E_{\mathbf{p}})^2 - |\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 = (\tilde{\omega} + E_{\mathbf{p}})^2 - |\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{q}|^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \alpha \quad (4.4)$$

da cui

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{-W^2 - |\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{q}|^2 + (\tilde{\omega} + E_{\mathbf{p}})^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \\ &= \frac{-W^2 - |\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{q}|^2 + (\omega + M_A - E_{A-1})^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \\ &= \frac{-W^2 - |\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{q}|^2 + (\omega + M_A)^2 + E_{A-1}^2 - 2(\omega + M_A)E_{A-1}}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \\ &= \frac{-W^2 + s + M_{A-1}^2 - 2(\omega + M_A)E_{A-1}}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

con $s = (\omega + M_A)^2 - |\mathbf{q}|^2$ massa invariante del sistema adronico finale totale $|x, \mathbf{p} + \mathbf{q}\rangle |\mathcal{R}, -\mathbf{p}\rangle$.

Quindi:

$$\int d^3p = 2\pi \int |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| \left| \frac{\partial \cos \alpha}{\partial W} \right| dW = 2\pi \int |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| \frac{W}{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} dW = \frac{2\pi}{|\mathbf{q}|} \int dW d|\mathbf{p}| W |\mathbf{p}| \quad (4.6)$$

Imponendo la condizione $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ si ricavano gli estremi di integrazione in $|\mathbf{p}|$:

$$|\mathbf{p}|^{\pm} = \frac{1}{2s} \left| \Lambda |\mathbf{q}| \pm (\omega + M_A) [\Lambda^2 - 4sM_{A-1}^2]^{1/2} \right|, \quad (4.7)$$

con $\Lambda = s + M_{A-1}^2 - W^2$. L'estremo superiore per l'integrazione in E si trova imponendo che l'argomento della radice quadrata nella (4.7) sia non negativo:

$$s + M_{A-1}^2 - W^2 - 2\sqrt{s}M_{A-1} \geq 0 \implies E \leq \sqrt{s} - M_A - W + m \quad (4.8)$$

L'integrale da calcolare è quindi il seguente:

$$\frac{d^2\sigma_A}{d|\mathbf{p}_\mu| d\cos\theta_\mu} = \frac{2\pi}{|\mathbf{q}|} \sum_i \int_{W_{\text{th}}}^{W_{\text{max}}} W dW \int_{p^-}^{p^+} |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| \int_0^{E_{\text{max}}} dE P(\mathbf{p}, E) \frac{d^2\sigma_i}{d|\mathbf{p}_\mu| d\cos\theta_\mu}. \quad (4.9)$$

Nel caso del canale quasi-elastico conviene integrare su $E_x = E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}$ anziché su W . L'integrale su E_x si fa infatti in modo molto semplice sfruttando la δ presente nella (3.13), e si riduce a un fattore moltiplicativo:

$$\int dE_x E_x \delta(\omega + M_A - E_{A-1} - E_x) = \omega + M_A - E_{A-1} \quad (4.10)$$

4.2 Risultati e confronto con i dati sperimentali

4.2.1 Sezione d'urto quasi-elastica

Abbiamo calcolato la (4.1) nel canale quasi-elastico, utilizzando le funzioni di struttura (2.27). Nelle figure 4.2 e 4.3 riportiamo i nostri risultati e li confrontiamo con i dati riportati da T2K in [4].

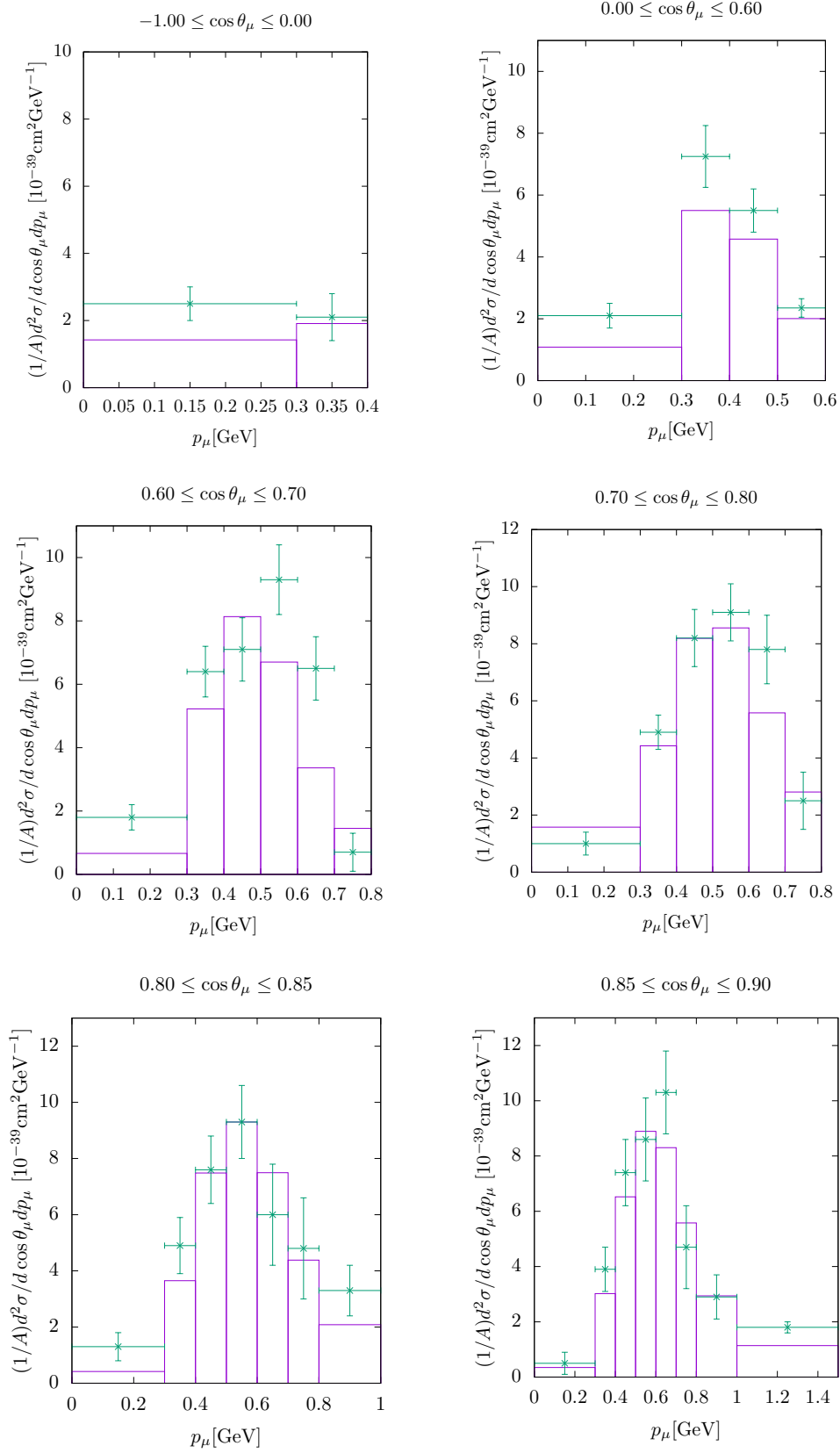


Figura 4.2. Sezione d'urto differenziale quasi-elastica per nucleone in funzione dell'impulso del muone finale – Bin 1÷6 in $\cos\theta_\mu$ (si veda la tabella 4.1); in viola i risultati del nostro calcolo, in verde i dati dell'esperimento T2K riportati in [4].

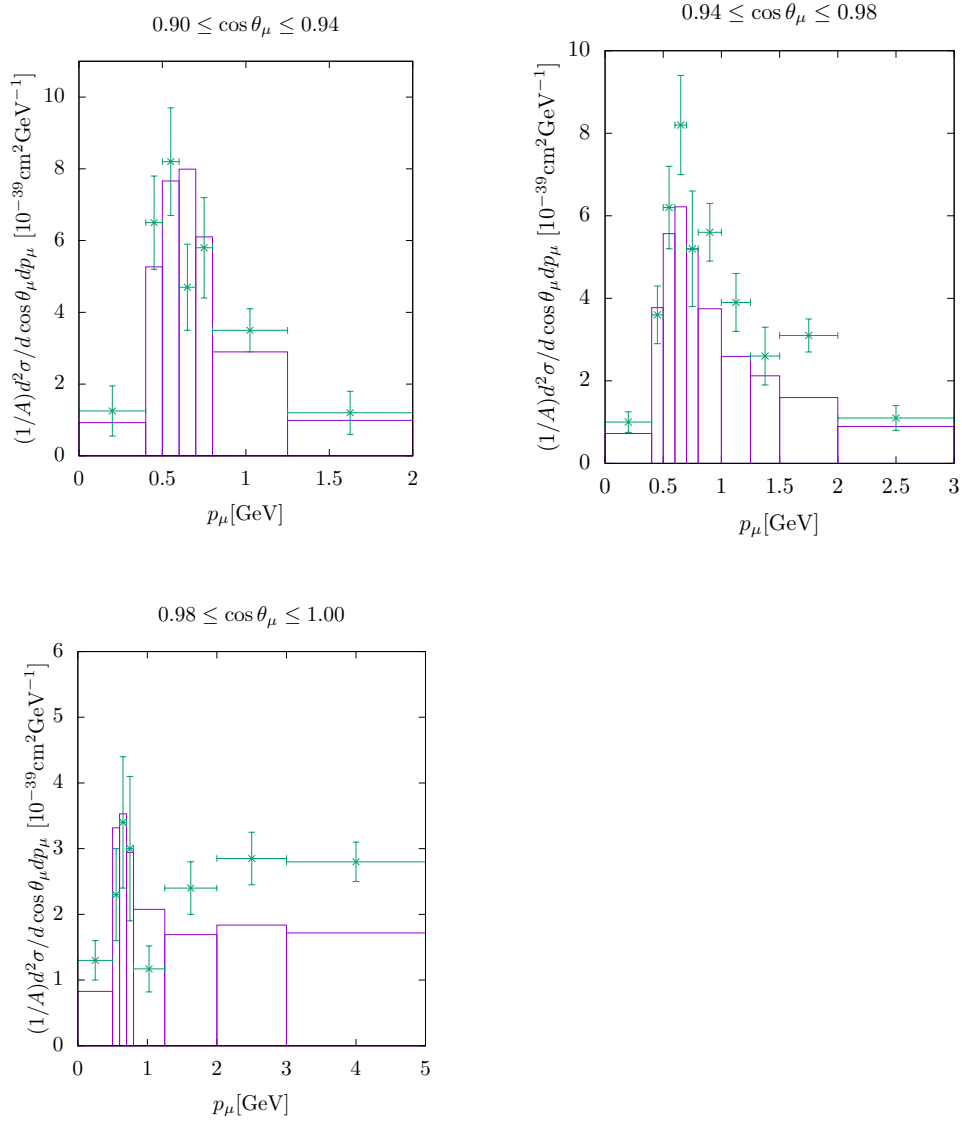


Figura 4.3. Sezione d'urto differenziale quasi-elastica per nucleone in funzione dell'impulso del muone finale – Bin 7÷9 in $\cos \theta_\mu$ (si veda la tabella 4.1); in viola i risultati del nostro calcolo, in verde i dati dell'esperimento T2K riportati in [4].

Tabella 4.1. *Binning* utilizzato dalla collaborazione T2K per l'analisi dati riportata in [4].

$\cos \theta_\mu$	$ \mathbf{p}_\mu $ [GeV]
-1, 0	0, 0.3, 0.4
0, 0.6	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6
0.6, 0.7	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8
0.7, 0.8	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8
0.8, 0.5	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1
0.85, 0.9	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1, 1.5
0.9, 0.94	0, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.25, 2
0.94, 0.98	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1, 1.25, 1.5, 2, 3
0.98, 1	0, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.25, 2, 3, 5

Il *binning* utilizzato per l'integrazione nelle variabili cinematiche del muone finale è riportato nella tabella 4.1.

Osserviamo che l'accordo tra calcolo teorico e dati sperimentali ha una dipendenza sia dall'impulso del muone che dal coseno dell'angolo di scattering. In particolare il calcolo teorico sottostima la sezione d'urto per angoli molto piccoli ($0.98 < \cos \theta_\mu < 1$) e grandi valori di $|\mathbf{p}_\mu|$, quindi bassa energia trasferita ω . Per angoli più grandi questo contributo è invece meno facilmente individuabile. Si può osservare inoltre come il calcolo teorico non riproduca in diversi casi il punto di massimo della sezione d'urto.

Contributo delle correnti a due corpi

L'eccesso osservato di eventi $CC0\pi$ è molto probabilmente dovuto al contributo di stati finali *CCQE-like*. Si tratta di stati con due particelle e due lacune (2p2h), che sperimentalmente non possono essere distinti dagli stati 1p1h. Uno stato finale 1p1h è uno stato formato dal nucleone espulso e dal nucleo residuo in uno stato legato. Uno stato 2p2h è costituito dal nucleone espulso e dal nucleo residuo in cui è presente un nucleone nel continuo. Gli stati 2p2h possono essere prodotti essenzialmente tramite tre meccanismi:

- *Initial State Correlations* (ISC)
- *Final State Interactions* (FSI)
- *Meson Exchange Currents* (MEC)

La corrente nucleare si può scrivere come somma di correnti a uno e due corpi:

$$J_A^\mu = \sum_i j_i^\mu + \sum_{i < j} j_{ij} = J_1 + J_2 \quad (4.11)$$

Il termine a un corpo corrisponde all'approssimazione impulsiva; gli stati 2p2h possono essere eccitati tramite operatori a un corpo e a due corpi, dando luogo a contributi alla sezione d'urto che interferiscono fra di loro [42]:

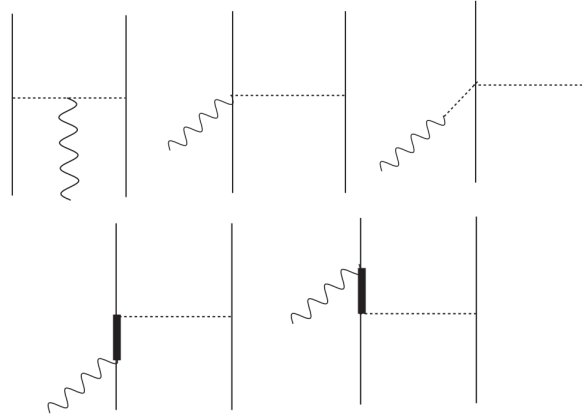


Figura 4.4. Processi che contribuiscono alla corrente a due corpi; le linee continue indicano nucleoni, le linee doppie indicano una risonanza Δ , quelle ondulate il bosone vettore [46].

$$|\langle 2p2h | J | 0 \rangle|^2 = |\langle 2p2h | J_1 | 0 \rangle|^2 + |\langle 2p2h | J_2 | 0 \rangle|^2 + 2\Re \langle 2p2h | J_1 | 0 \rangle^* \langle 2p2h | J_2 | 0 \rangle \quad (4.12)$$

Un'analisi pienamente consistente del ruolo degli stati finali 2p2h deve tener conto di tutti i meccanismi che possono portare a questo tipo di stati e dell'interferenza tra i contributi a uno e a due corpi [44].

Nell'ambito dell'approssimazione impulsiva si tiene conto delle ISC utilizzando funzioni spettrali realistiche; l'effetto principale risulta essere una coda nella sezione d'urto che si estende verso alti valori dell'energia trasferita.

Nei processi inclusivi ad alto 4-impulso traferito, le FSI danno in generale un contributo piccolo, portando essenzialmente a una redistribuzione della sezione d'urto dal picco quasi-elastico verso la coda, e a uno spostamento del picco [45].

Il maggior contributo a stati finali 2p2h è dato dalle MEC, ossia da processi che coinvolgono un mesone scambiato tra due nucleoni, che vediamo schematizzati nella figura 4.4.

L'importanza del contributo delle correnti a due corpi, da tempo riconosciuta nella diffusione di elettroni [47], è stata di recente confermata in [48]. In figura 4.5 riportiamo il calcolo effettuato da Lovato et al. nel caso di angoli molto piccoli; risulta particolarmente evidente il contributo delle correnti a due corpi per alti valori di $|\mathbf{p}_\mu|$, consistentemente con quanto da noi ottenuto.

4.2.2 Sezione d'urto inclusiva: CCQE+CC1 π

Abbiamo successivamente calcolato la sezione d'urto inclusiva, somma dei contributi CCQE e CC1 π . Per la parte anelastica abbiamo utilizzato le funzioni di struttura del modello dinamico di Sato-Lee applicato alla produzione debole di mesoni [31], valido per $1.1 \lesssim W \leq 2.1$ GeV e $Q^2 \leq 3$ GeV². Nelle figure 4.6 e 4.7 riportiamo i nostri risultati e li confrontiamo con i dati riportati da T2K in [3].

Il *binning* utilizzato per l'integrazione nelle variabili cinematiche del muone finale è riportato nella tabella 4.2.

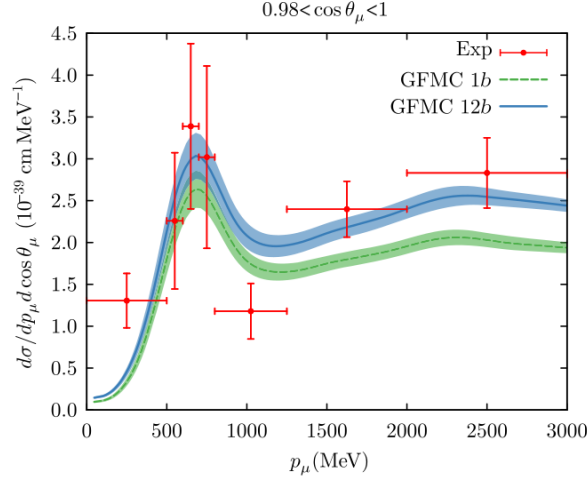


Figura 4.5. Sezione d'urto differenziale in funzione dell'impulso del muone finale per $0.98 < \cos \theta_\mu < 1$, calcolata da Lovato et al. con il metodo Monte Carlo, e confrontata con i dati di T2K [48].

Tabella 4.2. *Binning* utilizzato dalla collaborazione T2K per l'analisi dati riportata in [3].

$\cos \theta_\mu$	$ \mathbf{p}_\mu $ [GeV]
-1, -0.25	0, 30
-0.25, 0.25	0, 0.3, 30
0.25, 0.45	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 30
0.45, 0.6	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 30
0.6, 0.71	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.75, 1, 30
0.71, 0.8	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.85, 1.1, 30
0.8, 0.87	0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.85, 1.1, 1.5, 30
0.87, 0.92	0, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.85, 1.1, 1.5, 2.1, 30
0.92, 0.96	0, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.85, 1.1, 1.5, 2.1, 3, 30
0.96, 0.985	0, 0.5, 0.7, 1, 1.5, 2.3, 3.5, 30
0.985, 1	0, 0.7, 1.5, 2.5, 3.5, 4.8, 30

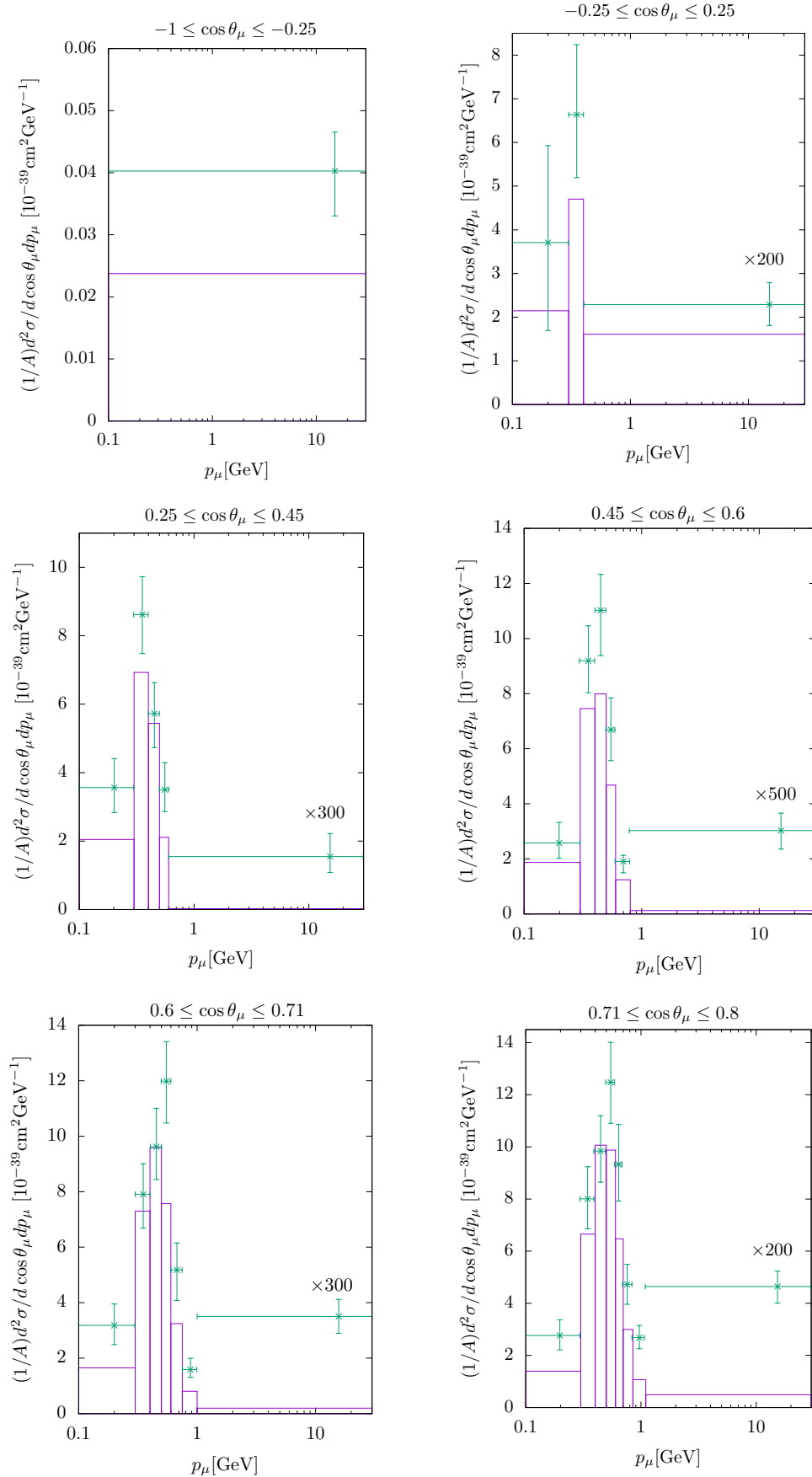


Figura 4.6. Sezione d'urto differenziale per nucleone in funzione dell'impulso del muone finale – Bin 1÷6 in $\cos\theta_\mu$ (si veda la tabella 4.2); in viola i risultati del nostro calcolo, in verde i dati dell'esperimento T2K riportati in [3].

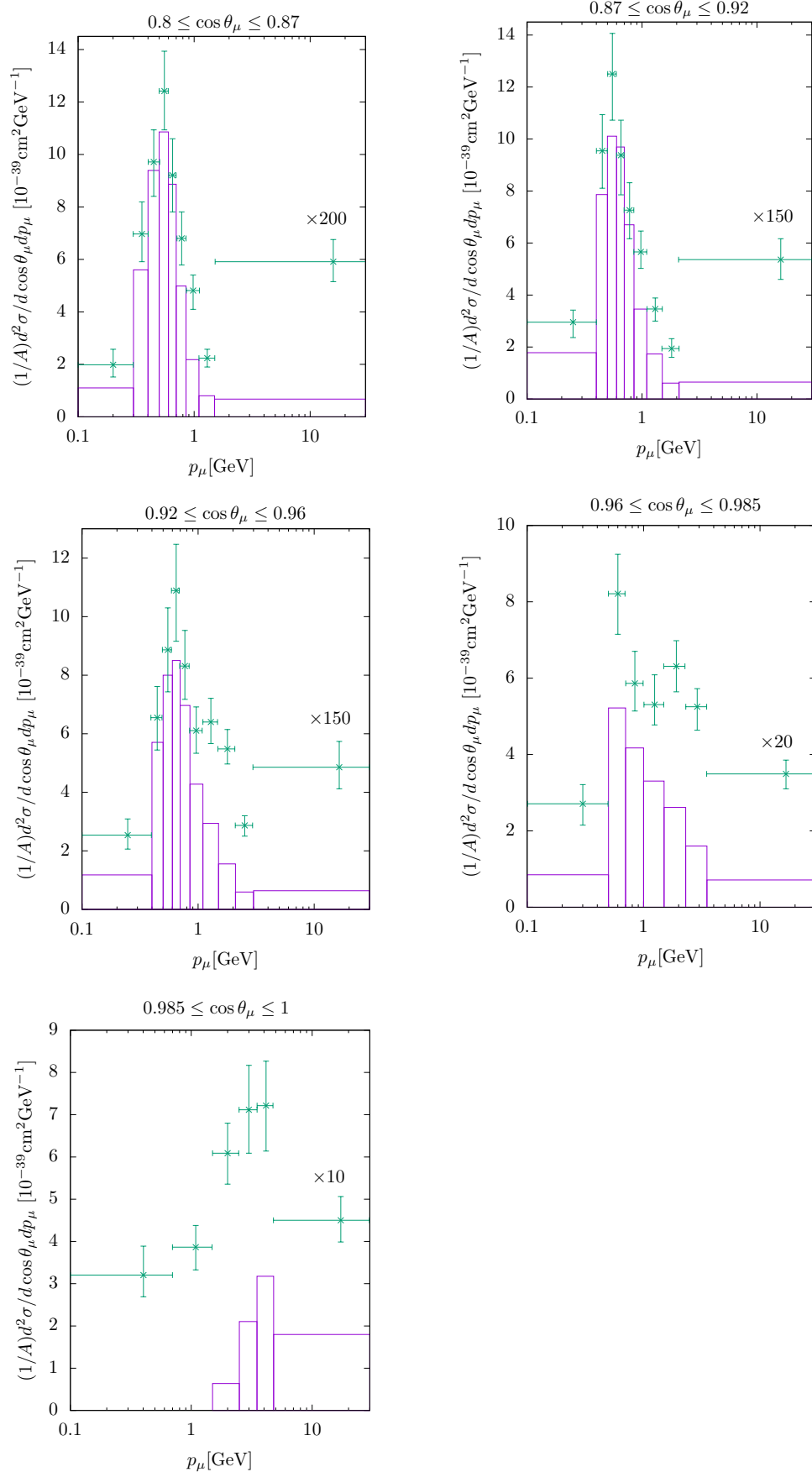


Figura 4.7. Sezione d'urto differenziale per nucleone in funzione dell'impulso del muone finale – Bin 7÷11 in $\cos \theta_\mu$ (si veda la tabella 4.2); in viola i risultati del nostro calcolo, in verde i dati dell'esperimento T2K riportati in [3].

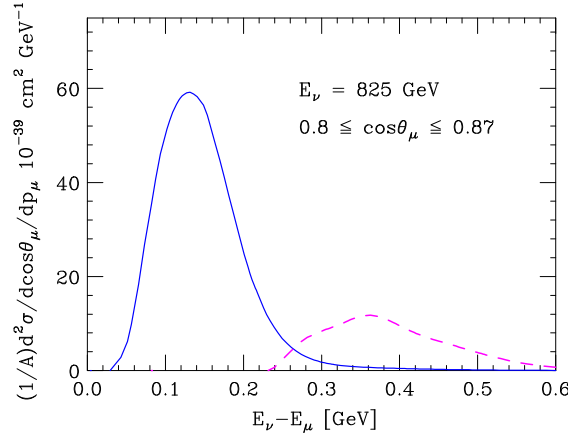


Figura 4.8. Sezione d'urto differenziale per nucleone in funzione dell'energia trasferita per un valore fissato dell'energia del neutrino.

L'accordo con i dati sperimentali risulta essere visibilmente peggiore rispetto al solo CCQE. C'è quindi probabilmente un problema riguardante il modo in cui stiamo trattando la produzione di pioni. In base all'analisi del solo CCQE, possiamo affermare che questa discrepanza non può essere dovuta al contributo di stati finali 2p2h, particolarmente rilevante principalmente per angoli molto piccoli. Possiamo ipotizzare che il modello di Sato-Lee non sia completamente adeguato nella regione cinematica da noi trattata. Un'altra possibilità è che ci possa essere un contributo rilevante della diffusione profondamente anelastica (DIS), che non includiamo nel nostro calcolo. L'inclusione del DIS presenta dei problemi non banali. Infatti non c'è una vera separazione tra la regione di formazione di risonanze e quella del DIS, bensì queste due regioni sono legate in modo non triviale dalla *quark-hadron duality* [50, 49] Ne segue che se i due contributi vengono sommati in modo incoerente si ha il problema del *double counting*.

Il problema dell'integrale sul flusso

Nelle figure 4.6 e 4.7 si vede che il picco quasi-elastico e il picco di produzione della risonanza Δ non sono ben distinti. Questo è dovuto all'integrale sul flusso incidente. Le sezioni d'urto elettrone-nucleo vengono di solito studiate per un valore fissato dell'energia del fascio incidente e dell'angolo di scattering, in funzione dell'energia trasferita ω . In questo modo i diversi meccanismi di reazione, corrispondenti a diversi valori di ω , risultano chiaramente identificabili; in particolare il picco quasi-elastico e il picco corrispondente alla risonanza Δ sono ben visibili e separati.

Nel nostro caso, se facciamo un'analisi a energia incidente fissata otteniamo un risultato analogo; ne mostriamo un esempio nella figura 4.8.

Il fatto che il fascio incidente non abbia in realtà un'energia definita, ma presenti una certa distribuzione, fa sì che una misura dell'energia del leptone finale non fornisca una misura di ω ; pertanto diversi meccanismi di reazione possono contribuire alla sezione d'urto differenziale per valori fissati delle variabili cinematiche del leptone.

Conclusioni

In questa Tesi abbiamo effettuato il primo calcolo consistente della sezione d'urto doppio-differenziale inclusiva di corrente carica neutrino-carbonio, integrata sul flusso incidente dell'esperimento T2K.

Oltre a effettuare misure di oscillazione, T2K utilizza il *near detector* per studiare le interazioni dei neutrini. Queste misure, interessanti di per sé, sono utili per ridurre gli errori sistematici derivanti dalle incertezze dovute alla sezione d'urto nell'estrazione dei parametri di oscillazione.

Abbiamo iniziato la trattazione descrivendo il fenomeno delle oscillazioni dei neutrini e facendo una breve panoramica sull'attuale situazione sperimentale. Abbiamo poi descritto il calcolo della sezione d'urto neutrino-nucleone, e successivamente il modo in cui da questa si ottiene la sezione d'urto neutrino-nucleo grazie all'approssimazione impulsiva (IA). Il fascio di neutrini di T2K presenta una distribuzione di energia centrata attorno a ~ 600 MeV. A queste energie i processi dominanti sono la diffusione quasi-elastica e la produzione risonante di pioni. La potenza dell'approccio basato sull'IA sta nella possibilità di effettuare la fattorizzazione tra lo stato fondamentale del nucleo, trattabile accuratamente in teoria non relativistica con il formalismo della funzione spettrale, e il vertice d'interazione, che va trattato relativisticamente. In questo modo si riesce a includere nel calcolo i diversi canali di reazione in modo consistente.

Abbiamo confrontato i nostri risultati con i dati dell'esperimento T2K. Inizialmente abbiamo analizzato la sola sezione d'urto quasi-elastica, trovando un buon accordo con i dati tranne che per angoli molto piccoli. Abbiamo poi considerato la sezione d'urto inclusiva, somma del contributo quasi-elastico e del contributo derivante dalla produzione di un pione. In questo caso l'accordo con i dati risulta visibilmente peggiore in tutta la regione cinematica. In futuro verrà studiata la possibilità di ottenere un miglior accordo includendo nel calcolo il contributo delle correnti a due corpi e delle interazioni nello stato finale (FSI). Entrambi questi contributi possono essere inseriti in modo consistente nel calcolo grazie al formalismo della funzione spettrale [45, 46].

I risultati presentati in questa Tesi sono discussi in un articolo attualmente in fase di stesura.

Appendice A

Ipotesi CVC e fattori di forma vettoriali

Vogliamo vedere come l'ipotesi della corrente vettoriale conservata (*Conserved Vector Current*) implichi delle relazioni tra i fattori di forma vettoriali presenti nella corrente debole e i fattori di forma elettromagnetici.

La corrente elettromagnetica si può come ben noto scrivere come somma della corrente di ipercarica (isoscalare) e della terza componente dell'isospin (isovettore):

$$J_{EM}^\alpha = \frac{1}{2}J_Y + J_3^\alpha = J_S^\alpha + J_V^\alpha \quad (\text{A.1})$$

In termini di fattori di forma:

$$J_{EM}^\alpha = \bar{p} \Gamma_p^\alpha p + \bar{n} \Gamma_n^\alpha n, \quad (\text{A.2})$$

con

$$\Gamma_{p,n}^\alpha = F_1^{p,n} \gamma^\alpha + \frac{F_2^{p,n}}{2m} i\sigma^{\alpha\beta} q_\beta \quad (\text{A.3})$$

Se esprimiamo J_{EM}^α in termini del doppietto di isospin N abbiamo:

$$J_{EM}^\alpha = \frac{1}{2} \bar{N} (\Gamma_S^\alpha + \Gamma_V^\alpha \tau_3) N = \frac{1}{2} (\bar{p} \Gamma_S^\alpha p + \bar{n} \Gamma_S^\alpha n) + \frac{1}{2} (\bar{p} \Gamma_V^\alpha p - \bar{n} \Gamma_V^\alpha n), \quad (\text{A.4})$$

con

$$\Gamma_{S,V}^\alpha = F_1^{S,V} \gamma^\alpha + \frac{F_2^{S,V}}{2m} i\sigma^{\alpha\beta} q_\beta \quad (\text{A.5})$$

Dal confronto tra la (A.2) e la (A.4) si vede che [51]:

$$\begin{aligned} \Gamma_p^\alpha &= \frac{1}{2}(\Gamma_S^\alpha + \Gamma_V^\alpha) & \longrightarrow & \Gamma_S^\alpha = \Gamma_p^\alpha + \Gamma_n^\alpha \\ \Gamma_n^\alpha &= \frac{1}{2}(\Gamma_S^\alpha - \Gamma_V^\alpha) & & \Gamma_V^\alpha = \Gamma_p^\alpha - \Gamma_n^\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

e quindi:

$$F_{1,2}^S = F_{1,2}^p + F_{1,2}^n \quad (\text{A.7})$$

$$F_{1,2}^V = F_{1,2}^p - F_{1,2}^n \quad (\text{A.8})$$

Le correnti deboli cariche J_{\pm}^{α} si scrivono invece:

$$J_{\pm}^{\alpha} = \frac{1}{2} \bar{N} \Gamma_{\pm}^{\alpha} (\tau_1 \pm i\tau_2) N \quad (\text{A.9})$$

In funzione dei fattori di forma, e omettendo il pedice \pm , abbiamo per la parte vettoriale e quella assiale:

$$\Gamma_V^{\alpha} = \left(F_1 \gamma^{\alpha} + \frac{F_2}{2m} i\sigma^{\alpha\beta} q_{\beta} + F_S q^{\alpha} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma_A^{\alpha} = \left(F_A \gamma^{\alpha} \gamma_5 + F_P q^{\alpha} \gamma_5 + F_T \gamma_5 i\sigma^{\alpha\beta} q_{\beta} \right) \quad (\text{A.11})$$

L'ipotesi consiste nell'assumere che J_V^{α} e le parti vettoriali delle J_{\pm}^{α} formino un tripletto di isospin: si possano cioè ottenere l'una dall'altra tramite una semplice rotazione nello spazio dell'isospin.

Se l'isospin è una buona simmetria possiamo quindi identificare la parte vettoriale della (A.9) con la parte isovettoriale della (A.4) e porre:

$$\Gamma_V = \Gamma_{\nu} = \Gamma_p - \Gamma_n, \quad (\text{A.12})$$

da cui

$$\begin{cases} F_{1,2} = F_{1,2}^p - F_{1,2}^n \\ F_S = 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Appendice B

Ipotesi PCAC e fattori di forma assiali

L'ipotesi PCAC (*Partially Conserved Axial Current*) permette di legare il fattore di forma pseudoscalare al fattore di forma assiale, nonché di calcolare quest'ultimo per 4-impulso trasferito nullo. Vediamo come.

Nella diffusione neutrino-nucleone, andando a considerare le correzioni dovute alle interazioni forti, si considera dominante il contributo dovuto allo scambio di un pione (*pion pole dominance*). L'ampiezza del processo avrà la forma [20]

$$\mathcal{M} \sim (\text{vertice } \pi^- \rightarrow \nu_l l^-) \times (\text{propagatore del pione}) \times (\text{vertice } n \rightarrow p \pi^-) \quad (\text{B.1})$$

Per covarianza di Lorentz, la parte adronica dell'ampiezza di decadimento del pione sarà del tipo [52]:

$$\langle 0 | j_A^\alpha(x) | \pi \rangle \sim i f_\pi q^\alpha e^{-iqx}, \quad (\text{B.2})$$

dove la quantità f_π è detta costante di decadimento del pione e contribuisce solo la corrente assiale in quanto il pione ha $J^P = 0^-$. Abbiamo quindi:

$$\mathcal{M} \sim i f_\pi q^\alpha \bar{l} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_l \frac{1}{q^2 - m_\pi^2} i g_{\pi NN} \sqrt{2} \bar{p} \gamma_5 n \quad (\text{B.3})$$

D'altra parte deve essere [52]:

$$\mathcal{M} \sim \bar{l} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_l \bar{p} \Gamma^\alpha n \quad (\text{B.4})$$

Dal confronto tra le (B.3), (B.4) e (2.24) risulta:

$$F_P(q^2) = - \frac{\sqrt{2} f_\pi g_{\pi NN}}{q^2 - m_\pi^2} \quad (\text{B.5})$$

Calcoliamo ora la divergenza della (B.2):

$$\langle 0 | \partial_\alpha j_A^\alpha(x) | \pi \rangle \sim i f_\pi m_\pi^2 e^{-iqx}, \quad (\text{B.6})$$

Dato che il pione è di gran lunga l'adrone più leggero, possiamo fare l'approssimazione $m_\pi \approx 0$, da cui:

$$\langle 0 | \partial_\alpha j_A^\alpha(x) | \pi \rangle \approx 0 \quad (\text{B.7})$$

L'ipotesi PCAC consiste nell'assumere che la (B.7) valga in senso operatoriale, cioè indipendentemente dagli elementi di matrice adronici che andiamo a considerare [51].

Nel caso della transizione (2.22) avremo:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \langle r'p' | j_A^\alpha(x) | rp \rangle &= \partial_\alpha e^{-i(p'-p)x} \langle r'p' | j_A^\alpha(0) | rp \rangle = \\ &= \bar{p}_{r'}(p') \left(F_A(q^2) \not{q} \gamma_5 + F_P(q^2) q^2 \gamma_5 \right) n_r(p) \approx 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Applicando l'equazione di Dirac al primo termine si ottiene:

$$-2mF_A(q^2) + F_P(q^2)q^2 \approx 0 \quad (\text{B.9})$$

Usando la (B.5):

$$\lim_{m_\pi \rightarrow 0} \left(-2mF_A(q^2) - \frac{\sqrt{2}f_\pi g_{\pi NN}}{q^2 - m_\pi^2} q^2 \right) = 0 \quad (\text{B.10})$$

Andando a calcolare questa relazione per $q^2 = 0$ otteniamo la relazione di Goldberger-Treiman:

$$F_A(0) = -\frac{f_\pi g_{\pi NN}}{\sqrt{2}m} \quad (\text{B.11})$$

Questa relazione è notevole in quanto è ben verificata sperimentalmente e lega quantità relative alle interazioni forti ($g_{\pi NN}$) con quantità relative alle interazioni deboli ($f_\pi, F_A(0)$).

Bibliografia

- [1] O. BENHAR et al. «Neutrino–nucleus interactions and the determination of oscillation parameters». In: *Physics Reports* 700 (2017), pp. 1–47.
- [2] S. X. NAKAMURA et al. «Towards a unified model of neutrino–nucleus reactions for neutrino oscillation experiments». In: *Reports on Progress in Physics* 80, 056301 (2017).
- [3] K. ABE et al. «Measurement of inclusive double-differential ν_μ charged-current cross section with improved acceptance in the T2K off-axis near detector». In: *Physical Review D* 98, 012004 (2018).
- [4] K. ABE et al. «Measurement of double-differential muon neutrino charged-current interactions on C_8H_8 without pions in the final state using the T2K off-axis beam». In: *Physical Review D* 93, 112012 (2016).
- [5] Y. FUKUDA et al. «Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos». In: *Physical Review Letters* 81.8 (1998), pp. 1562–1567.
- [6] Q. R. AHMAD et al. «Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory». In: *Physical review letters* 89, 011301 (2002).
- [7] P. A. ZYLA et al. «Review of Particle Physics». In: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2020, 083C01 (2020).
- [8] C. GIUNTI e M. LAVEDER. «Neutrino mixing». In: *arXiv preprint hep-ph/0310238* (2003).
- [9] C. GIUNTI e C. W. KIM. *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford university press, 2007.
- [10] M. V. DIWAN et al. «Long-baseline neutrino experiments». In: *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 66 (2016), pp. 47–71.
- [11] P. F. de SALAS et al. «2020 Global reassessment of the neutrino oscillation picture». In: *arXiv preprint arXiv:2006.11237* (2020).
- [12] C. GIGANTI. «Latest results from T2K and T2K Phase II». In: *arXiv preprint arXiv:1803.11513* (2018).
- [13] K. ABE et al. «Indication of electron neutrino appearance from an accelerator-produced off-axis muon neutrino beam». In: *Physical Review Letters* 107, 041801 (2011).

- [14] K. ABE et al. «Precise measurement of the neutrino mixing parameter θ_{23} from muon neutrino disappearance in an off-axis beam». In: *Physical review letters* 112, 181801 (2014).
- [15] K. ABE et al. «Constraint on the matter–antimatter symmetry-violating phase in neutrino oscillations». In: *Nature* 580 (2020), pp. 339–344.
- [16] *Sito ufficiale della collaborazione T2K*. URL: <https://t2k-experiment.org/>.
- [17] F. MANDL e G. SHAW. *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons, 1994.
- [18] T. J. LEITNER. «Neutrino–nucleus interactions in a coupled-channel hadronic transport model». Tesi di Dottorato in Fisica, Justus Liebig Universität Gießen, 2009.
- [19] O. BENHAR e D. MELONI. «Total neutrino and antineutrino nuclear cross sections around 1 GeV». In: *Nuclear Physics A* 789.1-4 (2007), pp. 379–402.
- [20] E. D. COMMINS e P. H. BUCKSBAUM. *Weak interactions of leptons and quarks*. Cambridge University Press, 1983.
- [21] B. MÄRKISCH et al. «Measurement of the weak axial-vector coupling constant in the decay of free neutrons using a pulsed cold neutron beam». In: *Physical Review Letters* 122, 242501.24 (2019), p. 242501.
- [22] H. BUDD, A. BODEK e J. ARRINGTON. «Modeling quasi-elastic form factors for electron and neutrino scattering». In: *arXiv preprint hep-ex/0308005* (2003).
- [23] V. BERNARD, L. ELOUADRHIRI e U. MEISSNER. «Axial structure of the nucleon». In: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 28.1 (2002), R1.
- [24] O. LALAKULICH e E. A. PASCHOS. «Resonance production by neutrinos: $J=3/2$ resonances». In: *Physical Review D* 71, 074003 (2005).
- [25] O. LALAKULICH, E. A. PASCHOS e G. PIRANISHVILI. «Resonance production by neutrinos: the second resonance region». In: *Physical Review D* 74, 014009 (2006).
- [26] D. REIN e L. M. SEHGAL. «Neutrino-excitation of baryon resonances and single pion production». In: *Annals of Physics* 133 (1981), pp. 79–153.
- [27] D. REIN. «Angular distribution in neutrino-induced single pion production processes». In: *Zeitschrift für Physik C: Particles and Fields* 35 (1987), pp. 43–64.
- [28] T. SATO e T.-S.H. LEE. «Meson-exchange model for πN scattering and $\gamma N \rightarrow \pi N$ reaction». In: *Physical Review C* 54, 052660 (1996).
- [29] T. SATO e T.-S. H. LEE. «Dynamical study of the Δ excitation in $N(e, e'\pi)$ reactions». In: *Physical Review C* 63, 055201 (2001).
- [30] T. SATO, D. UNO e T.-S. H. LEE. «Dynamical model of weak pion production reactions». In: *Physical Review C* 67, 065201 (2003).
- [31] S. X. NAKAMURA, H. KAMANO e T. SATO. «Dynamical coupled-channels model for neutrino-induced meson productions in resonance region». In: *Physical Review D* 92, 074024 (2015).

- [32] O. BENHAR, A. FABROCINI e S. FANTONI. «The nucleon spectral function in nuclear matter». In: *Nuclear Physics A* 505.2 (1989), pp. 267–299.
- [33] O. BENHAR et al. «Spectral function of finite nuclei and scattering of GeV electrons». In: *Nuclear Physics A* 579.3-4 (1994), pp. 493–517.
- [34] O. BENHAR, D. DAY e I. SICK. «Inclusive quasielastic electron-nucleus scattering». In: *Reviews of Modern Physics* 80.1 (2008), pp. 189–224.
- [35] O. BENHAR et al. «Electron- and neutrino- nucleus scattering in the impulse approximation regime». In: *Physical Review D* 72, 053005 (2005).
- [36] A. RAMOS, A. POLLS e W. H. DICKHOFF. «Single-particle properties and short-range correlations in nuclear matter». In: *Nuclear Physics A* 503.1 (1989), pp. 1–52.
- [37] R. SCHIAVILLA, V. R. PANDHARIPANDE e R. B. WIRINGA. «Momentum distributions in $A=3$ and 4 nuclei». In: *Nuclear Physics A* 449.2 (1986), pp. 219–242.
- [38] O. BENHAR, V. R. PANDHARIPANDE e S. C. PIEPER. «Electron-scattering studies of correlations in nuclei». In: *Reviews of modern physics* 65.3 (1993), p. 817.
- [39] C. PRAET. «Modeling quasi-free neutrino-nucleus reactions for accelerator-based experiments». Tesi di Dottorato in Fisica, Ghent University, 2009.
- [40] G. T. GARVEY et al. «Recent advances and open questions in neutrino-induced quasi-elastic scattering and single photon production». In: *Physics Reports* 580 (2015), pp. 1–45.
- [41] W. E. BURCHAM, M. JOBES e E. M. HENLEY. *Nuclear and Particle Physics*. Longman Burnt Mill, 1995.
- [42] O. BENHAR. «Neutrino cross sections and oscillation parameters». In: *Nuclear and Particle Physics Proceedings* 265 (2015), pp. 159–164.
- [43] O. BENHAR e D. MELONI. «Impact of nuclear effects on the determination of the nucleon axial mass». In: *Physical Review D* 80.073003 (2009).
- [44] O. BENHAR e N. ROCCO. «Nuclear effects in neutrino interactions and their impact on the determination of oscillation parameters». In: *Advances in High Energy Physics* 2013 (2013).
- [45] A. M. ANKOWSKI, O. BENHAR e M. SAKUDA. «Improving the accuracy of neutrino energy reconstruction in charged-current quasielastic scattering off nuclear targets». In: *Physical Review D* 91, 033005 (2015).
- [46] N. ROCCO et al. «Neutrino-nucleus cross section within the extended factorization scheme». In: *Physical Review C* 99, 025502 (2019).
- [47] A. DE PACE et al. «The 2p–2h electromagnetic response in the quasielastic peak and beyond». In: *Nuclear Physics A* 726.3-4 (2003), pp. 303–326.
- [48] A. LOVATO et al. «Ab Initio Study of (ν_l, l^-) and $(\bar{\nu}_l, l^+)$ Inclusive Scattering in ^{12}C : Confronting the MiniBooNE and T2K CCQE Data». In: *Physical Review X* 10, 031068 (2020).

- [49] K. MATSUI, T. SATO e T.-S. H. LEE. «Quark–hadron duality and parity violating asymmetry of electroweak reactions in the Δ region». In: *Physical Review C* 72, 025204 (2005).
- [50] W. MELNITCHOUK, R. ENT e C. E. KEPPEL. «Quark–hadron duality in electron scattering». In: *Physics reports* 406.3-4 (2005), pp. 127–301.
- [51] M. D. SCADRON. *Advanced quantum theory*. World Scientific Publishing Company, 2006.
- [52] J. D. WALECKA. *Theoretical nuclear and subnuclear physics*. World Scientific, 2004.
- [53] O. BENHAR. «How much nuclear physics do we need, to understand the neutrino–nucleus cross section?» In: *arXiv preprint arXiv:0906.3144* (2009).
- [54] F. CHIRIANO. «Studio della sezione d’urto di diffusione dei neutrini τ su Argon». Tesi di Laurea Magistrale in Fisica, Sapienza Università di Roma, 2018.
- [55] P. COLETTI. «Descrizione degli effetti nucleari nell’analisi delle misure di oscillazioni di neutrino». Tesi di Laurea Specialistica in Fisica, Sapienza Università di Roma, 2010.
- [56] E. VAGNONI, O. BENHAR e D. MELONI. «Inelastic Neutrino–Nucleus Interactions within the Spectral Function Formalism». In: *Physical Review Letters* 118, 142502 (2017).
- [57] A. W. THOMAS e W. WEISE. *The structure of the nucleon*. Wiley Online Library, 2001.
- [58] C. A. BERTULANI. *Nuclear physics in a nutshell*. Princeton University Press, 2007.
- [59] S. BRAIBANT, G. GIACOMELLI e M. SPURIO. *Particelle e interazioni fondamentali: il mondo delle particelle*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [60] P. B. PAL. «Dirac, Majorana, and Weyl fermions». In: *American Journal of Physics* 79.5 (2011), pp. 485–498.
- [61] E. VAGNONI. «Theoretical description and reconstruction of neutrino interactions and systematic uncertainties of long-baseline oscillation experiments». Tesi di Dottorato in Fisica, Università degli Studi Roma Tre, 2016.
- [62] M. E. PESKIN e D. V. SCHROEDER. *An introduction to quantum field theory*. Addison–Wesley Publishing Company, 1995.
- [63] H. GEORGI. *Weak interactions and modern particle theory, revised and updated*. 2009.
- [64] T.-S. H. LEE e W. ROBERTS. *N* Physics – Proceedings of the Fourth CE-BAF/INT Workshop*. 1997.
- [65] T. ERICSON e W. WEISE. *Pions and Nuclei*. 1988.
- [66] H. KAMANO et al. «Nucleon resonances within a dynamical coupled–channels model of πN and γN reactions». In: *Physical Review C* 88, 035209 (2013).

- [67] C.-M. JEN et al. «Numerical implementation of lepton–nucleus interactions and its effect on neutrino oscillation analysis». In: *Physical Review D* 90, 093004 (2014).
- [68] R. MACHLEIDT. «The meson theory of nuclear forces and nuclear structure». In: *Advances in Nuclear Physics* 19 (1989). A cura di J. W. NEGELE e E. VOGT.
- [69] B. POVH et al. *Particles and nuclei*. Springer–Verlag, 1995.
- [70] E. A. PASCHOS, J.-Y. YU e M. SAKUDA. «Neutrino production of resonances». In: *Physical Review D* 69, 014013 (2004).
- [71] O. BENHAR, P. COLETTI e D. MELONI. «Electroweak nuclear response in the quasielastic regime». In: *Physical review letters* 105, 132301 (2010).
- [72] A. BIZZETI. *Dispensa sulle oscillazioni di neutrino*. 2006.
- [73] L. MAIANI e O. BENHAR. *Meccanica quantistica relativistica: introduzione alla teoria quantistica dei campi*. Editori Riuniti, 2012.
- [74] G. ALTARELLI e K. WINTER. *Neutrino mass*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [75] K. ABE et al. «The T2K experiment». In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 659.1 (2011), pp. 106–135.
- [76] K. ABE et al. «Measurement of the inclusive ν_μ charged current cross section on carbon in the near detector of the T2K experiment». In: *Physical Review D* 87, 092003 (2013).
- [77] A. L. FETTER e J. D. WALECKA. *Quantum theory of many-particle systems*. Courier Corporation, 2012.
- [78] O. BENHAR. «Many-Body Theory of the Electroweak Nuclear Response». In: *International Journal of Modern Physics E* 18 (2008).
- [79] W. H. DICKHOFF e D. VAN NECK. *Many-body Theory exposed! - Propagator description Of Quantum Mechanics in many-body systems*. World Scientific, 2005.