



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Effetti nucleari nelle oscillazioni dei neutrini

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Candidato

Erica Vagnoni
Matricola 1210264

Relatori

Prof. Omar Benhar Noccioli
Dr. Davide Meloni

Anno Accademico 2012/2013

Tesi non ancora discussa

Effetti nucleari nelle oscillazioni dei neutrini

Tesi di Laurea Magistrale. Sapienza – Università di Roma

© 2013 Erica Vagnoni. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ e la classe Sapthesis.

Email dell'autore:

Indice

Introduzione	vi
1 Proprietà del neutrino	1
1.1 Il neutrino di Dirac	1
1.2 Il neutrino di Majorana	3
1.3 Mixing dei neutrini	3
1.4 Il meccanismo See-Saw	5
1.5 La matrice di massa	6
1.6 Oscillazioni di neutrino nel vuoto	10
2 Interazioni neutrino-nucleone	17
2.0.1 La sezione d'urto quasi elastica	19
2.0.2 Produzione di risonanze	23
2.0.3 Scattering profondamente anelastico	26
3 Elementi di dinamica nucleare	31
3.1 Interazione nucleone-nucleone	31
3.2 Teoria di Yukawa	33
3.3 Teoria a molti corpi non relativistica	35
3.4 Modello del gas di Fermi	37
3.5 Modello a shell	38
4 Interazioni neutrino-nucleo	40
4.1 La funzione spettrale	45
5 Applicazioni	52
5.1 L'esperimento $\text{NO}\nu\text{A}$	53
5.2 Risultati	56
Conclusioni	60
A Simmetrie CPT, CP e T	61
A.1 CPT	61
A.2 CP	61
A.3 T	62
B Probabilità di transizione per due neutrini	64

C	Potenziali fenomenologici nucleone-nucleone	67
D	Estremi di integrazione per il calcolo della sezione d'urto quasi elastica	69
	Bibliografia	70

Introduzione

Nel Modello Standard della Fisica delle particelle elementari, il neutrino è un fermione a massa nulla. Il fenomeno delle oscillazioni di neutrini, proposto per la prima volta da Bruno Pontecorvo negli anni '50 in analogia alle oscillazioni dei mesoni K , implica invece che i neutrini di flavour definito, osservati nelle interazioni deboli, sono combinazioni di autostati di massa differenti.

Gli esperimenti che si propongono di misurare le oscillazioni dei neutrini si basano sull'osservazione di interazioni neutrino-nucleo. L'uso dei nuclei atomici come rivelatori, in apparati di grandi dimensioni, è necessario per raggiungere un rate accettabile di eventi caratterizzati da una sezione d'urto molto piccola, dell'ordine di 10^{-38} cm² per neutrini di energia intorno ad 1 GeV. L'interpretazione dei segnali osservati pone però problemi assai complessi, in quanto richiede la conoscenza quantitativa della risposta nucleare alle interazioni deboli.

Dato il livello di precisione degli esperimenti in corso, e di quelli progettati per i prossimi anni, la descrizione degli effetti nucleari è unanimemente considerata la principale fonte di errore sistematico.

In questa Tesi abbiamo affrontato lo studio degli effetti nucleari nella diffusione di neutrini con energia nel range $0.5 \text{ GeV} \div 3.5 \text{ GeV}$, rilevante per molti esperimenti. Abbiamo esaminato i tre diversi processi associati ad interazioni di corrente carica che forniscono i contributi dominanti alla sezione d'urto totale in questa regione cinematica: la diffusione quasi elastica, in cui l'adrone prodotto al vertice di interazione è un nucleone, la produzione di risonanze e lo scattering profondamente anelastico.

Il formalismo che abbiamo utilizzato si basa sull'uso dell'*Approssimazione Impulsiva*, applicabile quando il momento trasferito nel processo di diffusione, \mathbf{q} , è tale che la risoluzione spaziale della sonda, $\lambda \sim 1/|\mathbf{q}|$, è molto minore della distanza media tra i nucleoni all'interno del nucleo. In queste condizioni l'interazione con la sonda coinvolge solo un nucleone, mentre tutti gli altri hanno il ruolo "di spettatori", e la sezione d'urto nucleare si riduce alla somma incoerente delle sezioni d'urto dei processi elementare neutrino-nucleone. La semplificazione principale che deriva da tale assunzione è la possibilità di considerare le particelle prodotte nel vertice di interazione ed il sistema residuo come sistemi che evolvono in maniera indipendente l'uno dall'altro, trascurando le correlazioni dovute al principio di Pauli, che richiede l'antisimmetrizzazione dello stato finale, e le possibili interazioni tra la particella che interagisce con il neutrino e i nucleoni spettatori. Come vedremo, nello schema che abbiamo utilizzato, la dinamica nucleare può essere descritta in modo accurato attraverso la funzione spettrale, $P(\mathbf{k}, E)$, che fornisce la probabilità di rimuovere un nucleone di impulso \mathbf{k} dal bersaglio nucleare lasciando il sistema residuo in uno stato di energia E .

La Tesi è strutturata come segue.

Nel Capitolo 1 introdurremo le nozioni principali della Fisica del neutrino massivo. In particolare, analizzeremo la descrizione del neutrino secondo le teorie di Dirac e di Majorana, e discuteremo le implicazioni per il fenomeno delle oscillazioni dei neutrini.

La trattazione dello processo elementare di diffusione neutrino-nucleone, il cui studio è propedeutico alla descrizione della diffusione neutrino-nucleo, verrà affrontata nel Capitolo 2.

Nel Capitolo 3 discuteremo gli aspetti fondamentali dei modelli della dinamica nucleare e la descrizione dei nuclei nell'ambito della teoria a molti corpi non relativistica. In particolare, vedremo come i problemi dovuti alla complessità dell'interazione nucleone-nucleone possono essere semplificati attraverso l'uso di modelli a particelle indipendenti, come il modello a shell o il modello a gas di Fermi, e metteremo in evidenza i limiti di tali modelli.

Nel Capitolo 4 i concetti e i risultati introdotti nei Capitoli 2 e 3 verranno utilizzati per derivare l'espressione della sezione d'urto neutrino-nucleo in approssimazione impulsiva, i cui elementi fondamentali sono la funzione spettrale del nucle bersaglio e la sezione d'urto neutrino-nucleone. Nello stesso Capitolo presenteremo i risultati dei calcoli numerici che abbiamo effettuato, che comprendono le sezioni d'urto totali di diffusione su carbonio nei canali quasi elastico, di produzione di risonanze e profondamente anelastico.

Infine, nel Capitolo 5 viene analizzato l'impatto della descrizione della dinamica nucleare sul segnale misurato osservato negli esperimenti. Utilizzando il software **GLOBES**, che permette di simulare specifiche condizioni sperimentali, abbiamo calcolato le rate di eventi attesi nel caso dell'esperimento **NO ν A** (*NUMI Off-Axis ν_e Appearance Experiment*), in fase di progettazione al Fermi National Accelerator Laboratory, e confrontato le predizioni del modello a gas di Fermi con i risultati ottenuti usando un modello dinamico più realistico.

Capitolo 1

Proprietà del neutrino

Nel Modello Standard delle interazioni elettrodeboli delle particelle elementari [1, 2, 3], il neutrino è considerato un leptone a massa nulla, facente parte di un doppietto di isospin con il leptone carico del flavour corrispondente (e, μ, τ). Il neutrino non ha carica elettrica, e dunque non può interagire attraverso lo scambio di un fotone. Esso interagisce solo debolmente, come ad esempio nell'interazione elementare con i quark, la cui ampiezza, nel limite di bassa energia, si ottiene dalla Lagrangiana effettiva [4, 5, 6]

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2} \frac{1}{M_W^2} \left[\bar{\ell} \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \nu \right] \left[\bar{u} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \gamma_\mu d \right] + \text{h.c.} \quad (1.1)$$

dove ℓ, ν, d, u sono i campi fermionici associati rispettivamente al leptone carico, al neutrino corrispondente e ai quark d e u , mentre g e M_W sono la costante di accoppiamento delle interazioni deboli e la massa del bosone mediatore carico W . La proprietà cruciale delle interazioni deboli è che il bosone W si accoppia solo con stati a elicità sinistrorsa dei fermioni.

I neutrini sono dunque descritti da uno spinore a due componenti a chiralità definita (sinistrorsi). I neutrini destrorsi, dato che non interagiscono con la materia, vengono definiti sterili.

Gli esperimenti sul decadimento β e sulle oscillazioni hanno mostrato che la massa dei neutrini non è nulla, anche se inferiore di ordini di grandezza rispetto alla massa dell'elettrone.

Nel seguito vedremo che il neutrino massivo può essere descritto attraverso la teoria di Dirac, in cui particella e antiparticella sono differenti, oppure attraverso la teoria di Majorana, in cui particella e antiparticella coincidono.

1.1 Il neutrino di Dirac

Nella teoria di Dirac, l'equazione che descrive le particelle fermioniche

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0, \quad (1.2)$$

è derivata dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x). \quad (1.3)$$

Risulta possibile introdurre l'operatore di chiralità, che distingue gli stati fisici in destrorsi e sinistrorsi definiti come segue

$$\mathcal{P}_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad \mathcal{P}_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (1.4)$$

dove $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ è la matrice chirale¹. Attraverso l'uso dei proiettori di chiralità è possibile introdurre le proiezioni chirali dei campi $\psi_{L,R}(x) = \mathcal{P}_{L,R}\psi(x)$, che rappresentano le autofunzioni di γ_5 con autovalori ± 1 . Inoltre, applicandoli all'equazione di Dirac otteniamo le

$$i\cancel{\partial}\psi_R(x) = m\psi_L(x), \quad (1.5)$$

$$i\cancel{\partial}\psi_L(x) = m\psi_R(x); \quad (1.6)$$

che nel limite di massa nulla diventano due equazioni disaccoppiate, ovvero le equazioni di Weyl²

$$i\cancel{\partial}\psi_R(x) = 0, \quad (1.7)$$

$$i\cancel{\partial}\psi_L(x) = 0. \quad (1.8)$$

Nell'ambito del Modello Standard, in cui vengono considerati privi di massa, i neutrini sono descritti dalle equazioni (1.7) e (1.8), le cui soluzioni sono campi fermionici a due componenti.

Nella teoria di Dirac il neutrino massivo può essere generato attraverso il meccanismo di Higgs, che da massa ai quark e ai leptoni carichi del Modello Standard.

L'estensione al Modello Standard necessaria è l'introduzione del neutrino destrorso, in presenza del quale il meccanismo di Higgs genera il termine di massa dei neutrini

$$\mathcal{L}^D = -m_D \bar{\nu}\nu = -m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) = -\frac{yv}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L), \quad (1.9)$$

dove y è la costante di accoppiamento di Yukawa e v è il valore di aspettazione sul vuoto del campo di Higgs ($v = 246$ GeV); mentre ν_L e ν_R denotano i neutrini left-handed e right-handed, definiti come

$$\nu_L \equiv \mathcal{P}_L\nu = \frac{1 - \gamma_5}{2}\nu \quad ; \quad \nu_R \equiv \mathcal{P}_R\nu = \frac{1 + \gamma_5}{2}\nu. \quad (1.10)$$

Si noti che il termine di massa del neutrino nella (1.9) è proporzionale a v come avviene per la generazione della massa dei leptoni carichi e dei quark. Quello che non si riesce a spiegare è come mai la massa del neutrino sia svariati ordini di grandezza inferiore rispetto a quella del leptone carico più leggero.

¹Gli operatori di chiralità soddisfano le relazioni

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_R &= 1, \\ \mathcal{P}_L\mathcal{P}_R &= \mathcal{P}_R\mathcal{P}_L = 0, \\ \mathcal{P}_{L,R}^2 &= \mathcal{P}_{L,R}. \end{aligned}$$

²Nel limite di massa nulla la chiralità coincide con l'operatore di elicità, definito come

$$\hat{h} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|}.$$

1.2 Il neutrino di Majorana

Nel 1937, Ettore Majorana [7] scoprì che non è necessario uno spinore a quattro componenti per descrivere un fermione massivo neutro, come avviene nella teoria di Dirac. Risulta sufficiente uno spinore a sole due componenti, a patto di imporre la cosiddetta condizione di Majorana

$$\psi = \psi^c = \mathcal{C}\gamma_0^T \psi^* , \quad (1.11)$$

con \mathcal{C} operatore di coniugazione di carica³. L'imposizione di tale condizione equivale a considerare il fatto che particella e antiparticella coincidano. Applicando ora alla (1.11) l'operatore di proiezione \mathcal{P}_L introdotto in precedenza nella (1.4), quello che si ottiene è

$$\psi_L = \psi_R^c \quad (1.12)$$

ovvero si ha che ψ_L e ψ_R non sono indipendenti. Possiamo dunque scrivere il campo fermionico solo attraverso le due componenti indipendenti dello spinore ψ_L (o ψ_R). La Lagrangiana di massa per i fermioni di Majorana prende dunque la forma

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2}m_M \bar{\nu}_L^c \nu_L + \text{h.c.} = -\frac{1}{2}m_M (\bar{\nu}_L^c \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_L^c) . \quad (1.13)$$

Si noti la presenza del fattore 1/2, che ci permette di ottenere le corrette equazioni del moto. Il termine di massa nella (1.13), al contrario di quello della (1.9), non è invariante per trasformazioni di gauge globali sotto $U(1)$: $\nu_L \rightarrow \exp\{i\phi\}\nu_L$; infatti sotto tale trasformazione la (1.13) diventa

$$\mathcal{L}^M \longrightarrow -\frac{1}{2}m_M (e^{2i\phi} \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + e^{-2i\phi} \nu_L^\dagger \mathcal{C} \nu_L^*) ; \quad (1.14)$$

questo implica che nella teoria di Majorana la conservazione del numero leptonico totale può essere violato.

1.3 Mixing dei neutrini

Dal Modello Standard sappiamo che il neutrino ν_L esiste, essendo presente nella Lagrangiana delle interazioni deboli a corrente carica. Per quanto riguarda il campo chirale ν_R , non sappiamo se esiste ma esso rientra nelle simmetrie del Modello Standard. Nel caso generale in cui esistano sia neutrini destrorsi che sinistrorsi e in cui si abbia una sola famiglia, il termine di massa avrà sia un contributo alla Dirac (1.9), sia un contributo alla Majorana (1.13), per ciascuno dei campi ν_L e ν_R , per cui la forma più generale che la Lagrangiana di massa può assumere è

³L'operatore coniugazione di carica soddisfa le relazioni

$$\mathcal{C}\gamma^{\mu T}\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu \quad ; \quad \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} \quad ; \quad \mathcal{C}^T = -\mathcal{C} .$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{mass} &= \mathcal{L}^D + \mathcal{L}_R^M + \mathcal{L}_L^M = \\ &= -m_D(\overline{\nu}_L\nu_R + \overline{\nu}_R\nu_L) - \frac{m_R}{2}(\overline{\nu}_R^c\nu_R + \overline{\nu}_R\nu_R^c) - \frac{m_L}{2}(\overline{\nu}_L^c\nu_L + \overline{\nu}_L\nu_L^c).\end{aligned}\quad (1.15)$$

La (1.15) può essere riscritta nella forma

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\nu}_L^c & \nu_R \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} + \text{h.c.}, \quad (1.16)$$

con M matrice di massa, data da

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Dalla (1.16) risulta chiaro che i campi chirali ν_L e ν_R non hanno massa definita a causa dei termini fuori diagonale m_D della matrice di massa. Per ottenere i campi dei neutrini massivi, è necessario diagonalizzare la matrice di massa M . La matrice M è una matrice simmetrica complessa e può essere diagonalizzata con una trasformazione unitaria ($U^\dagger = U^{-1}$)⁴ sui campi chirali del tipo

$$N_L = U n_L \quad (1.18)$$

dove N_L sono autostati di interazione, mentre n_L sono autostati di massa con

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Per ottenere i campi fermionici a massa definita, è necessario richiedere che

$$U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

con m_1 e m_2 reali e positivi.

Usando ora la trasformazione (1.18), la Lagrangiana di massa può essere riscritta come

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{mass} &= \frac{1}{2} N_L^T \mathcal{C}^\dagger M N_L + \text{h.c.} \rightarrow \\ \mathcal{L}_{mass} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 m_k \nu_{kL}^T \mathcal{C}^\dagger \nu_{kL} + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 m_k \overline{\nu}_k \nu_k,\end{aligned}\quad (1.21)$$

avendo definito il campo del neutrino di Majorana massivo

$$\nu_k \equiv \nu_{kL} + \nu_{kL}^c = \nu_{kL} + \mathcal{C} \overline{\nu}_{kL}^T; \quad \nu_k \equiv \nu_k^c. \quad (1.22)$$

⁴ L'unitarietà della U deriva dal fatto che gli autostati devono essere normalizzati

$$\begin{aligned}\nu_\alpha = U_{\alpha i} \nu_i &\Rightarrow \langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}; \quad \langle \nu_i | \nu_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = U U^\dagger \langle \nu_i | \nu_j \rangle \\ &\Rightarrow U U^\dagger = \mathbb{1}\end{aligned}$$

Dunque attraverso la diagonalizzazione della matrice di massa più generale che si possa considerare, ottenuta includendo sia termini alla Dirac che alla Majorana, si arriva al risultato che il termine di massa è della teoria di Majorana.

Limitiamoci ora al caso in cui la matrice di massa sia reale e positiva⁵. In questo caso possiamo scomporre la matrice U nel prodotto di una matrice di rotazione per una matrice diagonale ρ

$$U = \mathcal{R}(\theta)\rho = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

con $|\rho_k|^2 = 1$. La matrice $\mathcal{R}(\theta)$ è tale che

$$\mathcal{R}^T M \mathcal{R} = \begin{pmatrix} m'_1 & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

dove m'_1 e m'_2 sono gli autovalori della matrice di massa, dati da

$$m'_{2,1} = \frac{1}{2} \left[m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right] \quad (1.25)$$

e l'angolo di mixing che compare nella (1.23) è dato da

$$\tan(2\theta) = \frac{2m_D}{m_R - m_L}. \quad (1.26)$$

Le fasi della matrice ρ vengono scelte consistentemente con la richiesta che le masse fisiche siano reali e positive, infatti

$$U^T M U = \rho \mathcal{R}^T M \mathcal{R} \rho = \begin{pmatrix} \rho_1^2 m'_1 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 m'_2 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

quindi le masse sono date da

$$m_k = \rho_k^2 m'_k \quad (1.28)$$

con $\rho_2^2 = 1$ (essendo, dalla (1.25), m'_2 sempre positivo), mentre $\rho_1^2 = 1$ se $m'_1 > 0$ oppure $\rho_1^2 = -1$ se $m'_1 < 0$.

1.4 Il meccanismo See-Saw

La Lagrangiana di massa (1.21) contiene tre differenti masse, che nell'ambito del Modello Standard, dovranno soddisfare alcune relazioni che derivano dalle seguenti considerazioni

- il termine di massa m_D è permesso poiché esso deriva dal meccanismo di Higgs⁶;

⁵Una matrice di massa reale corrisponde al caso in cui m_D sia reale, mentre per m_L e m_R non ci sono problemi dato che possono essere scelti reali e positivi con una opportuna ridefinizione della fase dei campi ν_L e ν_R .

⁶Poiché m_D deriva dal meccanismo di Higgs, sarà ragionevole aspettarsi che il suo ordine di grandezza sia lo stesso del leptone carico associato.

- il neutrino ν_L fa parte di un doppietto di isospin debole con terza componente pari ad un $1/2$; di conseguenza il termine che compare nella (1.15), $\overline{\nu_L^c} \nu_L$, per il neutrino massivo sinistrorso alla Majorana ha $I_3 = 1$. Dunque fa parte di un tripletto di isospin debole che non è invariante sotto $SU(2)_L$, gruppo di simmetria del Modello Standard sotto cui tutti i termini della Lagrangiana devono essere invarianti;
- il neutrino ν_R è singoletto di isospin debole di conseguenza, al contrario di m_D e m_L , non è connesso al valore di aspettazione del vuoto del Higgs, per cui è possibile assumere un valore arbitrariamente grande⁷.

Quanto detto può essere riassunto nelle condizioni

$$m_L = 0 \quad ; \quad |m_D| \ll m_R \quad (1.29)$$

quindi, dalla (1.25), si ha che

$$m_1 \approx \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_D \quad , \quad m_2 \approx m_R \quad , \quad \tan(2\theta) \approx 2 \frac{m_D}{m_R} \ll 1 \quad , \quad \rho_1^2 = -1 \quad (1.30)$$

dunque quello che ci aspettiamo è che se a ν_2 è associata una massa molto grande (dell'ordine di m_R), di conseguenza ν_1 sarà molto leggero, poiché il valore della sua massa è soppresso rispetto a m_D a causa del rapporto m_D^2/m_R . Questo è il meccanismo See-Saw [8, 9, 10]: tanto più m_2 è grande, tanto più m_1 risulterà soppressa rispetto a m_D .

Dalla (1.30) notiamo anche che l'angolo di mixing è molto piccolo, questo implica che

$$\nu_{1L} \approx -\nu_L \quad , \quad \nu_{2L} \approx \nu_R^c, \quad (1.31)$$

ovvero ν_1 è composto per lo più da neutrini attivi ν_L , mentre ν_2 da neutrini sterili. In definitiva il meccanismo See-Saw fornisce una possibile spiegazione sul perché la massa del neutrino sia molto più piccola rispetto agli altri fermioni del Modello Standard.

1.5 La matrice di massa

Vogliamo affrontare in questa sezione il problema della diagonalizzazione della matrice di massa nel caso più realistico in cui si abbiano tre famiglie di neutrini. Secondo il Modello Standard infatti esistono tre differenti flavour di neutrini che partecipano alle interazioni deboli.

⁷Non potendo m_R essere stimato all'interno del Modello Standard, si ritiene che esso sia generato da effetti di altissima energia all'interno di determinate teorie che hanno il Modello Standard come limite di bassa energia. In tale limite è ragionevole aspettarsi che m_R abbia un valore corrispondente alla scala di rottura del gruppo più ampio. Una stima possibile è

$$m_R = \frac{m_D^2}{m_\nu} \sim \frac{(\langle \phi_0 \rangle)^2}{m_\nu} \sim \frac{(246/\sqrt{2})^2}{10^{-9}} \sim 10^{15} \text{ GeV} .$$

In aggiunta ai tre campi left-handed ν_{eL} , $\nu_{\mu L}$ e $\nu_{\tau L}$ che descrivono i neutrini di flavour, consideriamo i tre corrispondenti campi right-handed ν_{eR} , $\nu_{\mu R}$ e $\nu_{\tau R}$. Il numero di campi destrorsi non è vincolato da risultati sperimentali poiché, essendo sterili, non vengono coinvolti nelle interazioni deboli.

Il termine di massa più generale è sempre alla Dirac-Majorana

$$\mathcal{L}_{mass} = \mathcal{L}^D + \mathcal{L}_R^M + \mathcal{L}_L^M \quad (1.32)$$

dove il termine di massa alla Dirac è

$$\mathcal{L}^D = - \sum_{s=s_1, s_2, s_3} \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{sR} M_{s\alpha}^D \nu_{\alpha L} + \text{h.c.} , \quad (1.33)$$

e l'indice s si riferisce ai differenti neutrini sterili. I termini di massa alla Majorana sono

$$\mathcal{L}_L^M = - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{\alpha L}^c M_{\alpha\beta}^L \nu_{\beta L} + \text{h.c.} , \quad (1.34)$$

$$\mathcal{L}_R^M = - \frac{1}{2} \sum_{s, s'=s_1, s_2, s_3} \bar{\nu}_{sR}^c M_{ss'}^R \nu_{s'R} + \text{h.c.} . \quad (1.35)$$

Le tre matrici di massa M^D , M^L ed M^R sono complesse, ed inoltre le matrici dei termini di massa di Majorana sono simmetriche.

Riscrivendo i campi di neutrini nella forma

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nu_R^c = \begin{pmatrix} \nu_{s_1 R}^c \\ \nu_{s_2 R}^c \\ \nu_{s_3 R}^c \end{pmatrix} , \quad (1.36)$$

e sostituendo nella Lagrangiana di massa otteniamo

$$\mathcal{L}_{mass} = - \frac{1}{2} \bar{N}_L M N_L + \text{h.c.} = - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^L & M^{DT} \\ M^D & M^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (1.37)$$

dove la matrice di massa di Dirac-Majorana

$$M = \begin{pmatrix} M^L & M^{DT} \\ M^D & M^R \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

è una matrice 6×6 . Per poter trovare gli autovalori è necessario diagonalizzare tale matrice con una trasformazione unitaria sul vettore dei campi

$$N_L = \mathbb{U} n_L, \quad \text{con} \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \vdots \\ \nu_{6L} \end{pmatrix} , \quad (1.39)$$

dove \mathbb{U} è una matrice 6×6 che lega gli autostati di flavour N_L agli autostati di massa n_L . Tale matrice è scelta tale che

$$\mathbb{U}^T M \mathbb{U} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_6 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

con m_k ($k = 1 \dots 6$) reali e positivi. In questo modo il termine di massa di Dirac-Majorana (1.37) diventa

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 m_k \bar{\nu}_{kL}^c \nu_{kL} + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 m_k \bar{\nu}_k \nu_k . \quad (1.41)$$

dove

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_6 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

sono i campi di Majorana, tali da soddisfare le condizioni (1.22)

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^c = \nu_{kL} + \mathcal{C} \bar{\nu}_{kL}^T, \quad \text{con} \quad \nu_k^c = \nu_k . \quad (1.43)$$

Quindi anche nel caso in cui la Lagrangiana contenga termini del tipo $\mathcal{L}_{mass} = \mathcal{L}^D + \mathcal{L}_R^M + \mathcal{L}_L^M$, come visto in precedenza nel caso di una famiglia, i neutrini risultano essere particelle di Majorana. La relazione di mixing di neutrini sterili ed attivi si scrive esplicitamente come

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^6 \mathbb{U}_{\alpha k} \nu_{kL} \quad \alpha = e, \mu, \tau ; \quad \nu_{sR}^c = \sum_{k=1}^6 \mathbb{U}_{sk} \nu_{kL} \quad s = s_1, s_2, s_3 . \quad (1.44)$$

il che implica la possibilità di oscillazione da neutrini attivi a neutrini sterili, essendo entrambi combinazione degli stessi campi massivi.

Per procedere con la parametrizzazione, vogliamo prima generalizzare al caso di tre famiglie di neutrini il meccanismo See-Saw discusso in precedenza. Consideriamo il caso in cui $M^L = 0$ e gli autovalori di M^D siano trascurabili rispetto a quelli di M^R . In questo modo possiamo riscrivere la matrice \mathbb{U} come segue

$$\mathbb{U} = \mathbb{W} \mathbb{V} , \quad (1.45)$$

dove \mathbb{V} e \mathbb{W} sono matrici unitarie a meno di correzioni di ordine $M^D (M^R)^{-1}$; in particolar modo la matrice \mathbb{W} ⁸ è tale che sia possibile la diagonalizzazione a blocchi

$$\mathbb{W}^T M \mathbb{W} \approx \begin{pmatrix} M_{light} & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix} , \quad (1.46)$$

⁸La forma esplicita della matrice \mathbb{W} è:

$$\mathbb{W} = 1 - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M^{D\dagger} [M^R M^{R\dagger}]^{-1} M^D & 2M^{D\dagger} M^{R\dagger -1} \\ -2M^{R-1} M^D & M^{R-1} M^D M^{D\dagger} M^{R\dagger -1} \end{pmatrix}$$

dove le matrici 3×3 M_{light} e M_{heavy} sono date da

$$M_{light} \approx -M^{D\dagger} M^{R-1} M^D \quad , \quad M_{heavy} \approx M^R . \quad (1.47)$$

La (1.47) realizza il meccanismo See-Saw nel caso di tre famiglie; si ha quindi che tanto più sono grandi gli autovalori di M_{heavy} , tanto più risulteranno piccoli gli autovalori di M_{light} . I termini fuori diagonale della matrice \mathbb{W} sono dell'ordine $M^D (M^R)^{-1}$, si ha quindi che M_{light} e M_{heavy} risultano disaccoppiate per processi di bassa energia. Quindi, i due blocchi della (1.46) vengono ulteriormente diagonalizzati attraverso \mathbb{V}

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \mathbf{V} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

che porta alla diagonalizzazione

$$\mathbf{U}^\dagger M_{light} \mathbf{U} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) , \quad (1.49)$$

$$\mathbf{V}^\dagger M_{light} \mathbf{V} = \text{diag}(m_{R1}, m_{R2}, m_{R3}) . \quad (1.50)$$

Dunque la fenomenologia del mixing per quanto riguarda i neutrini attivi è descritta dalla matrice \mathbf{U} secondo la

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{U}_{\alpha k} \nu_{kL} , \quad \alpha = e, \mu, \tau . \quad (1.51)$$

La matrice unitaria 3×3 \mathbf{U} , ha nove parametri indipendenti reali, di cui tre sono angoli di mixing e sei sono delle fasi⁹. Tale matrice è l'analogo della matrice CKM di mescolamento dei quark, con l'ovvia differenza che nel nostro caso dobbiamo trattare dei neutrini di Majorana.

Nel caso della matrice CKM, delle sei fasi che compaiono, solo una è rilevante poiché le altre cinque possono essere eliminate tramite una ridefinizione dei campi dei quark tali da lasciare invariata la Lagrangiana. Un ragionamento analogo può essere fatto nel caso di neutrini di Dirac. Nel nostro caso, di queste sei fasi, tre possono essere eliminate tramite una trasformazione di fase dei campi leptonici carichi¹⁰, che nella Lagrangiana di interazione, invariante sotto tale trasformazione, compaiono accoppiati con i campi di neutrini

$$\mathcal{L}_{CC}^I = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1}^3 \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^\mu \mathbf{U}_{\alpha k} \nu_{kL} W_\mu^\dagger + \text{h.c.} . \quad (1.52)$$

⁹In generale, nel caso di matrici unitarie $N \times N$, si ha che i parametri indipendenti sono

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} N(N-1) \quad \text{angoli} \\ & \frac{1}{2} (N-1)(N-2) \quad \text{fasi} . \end{aligned}$$

¹⁰La trasformazione di fase agente sui campi leptonici carichi che permette di eliminare tre delle sei fasi è

$$\ell_\alpha \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \ell_\alpha .$$

Delle tre fasi rimanenti, due vengono fattorizzate in una matrice diagonale e vengono dette fasi di Majorana essendo presenti solo nel caso in cui il neutrino sia di Majorana. Nel caso di neutrini di Dirac tali fasi potrebbero essere cancellate con una ridefinizione dei campi massivi, essendo il termine di massa di Dirac invariante sotto trasformazioni di fase¹¹. Per questo motivo l'ultima fase rimanente viene detta di Dirac. In definitiva, dunque, la matrice \mathbf{U} può essere riscritta

$$\mathbf{U} = U^D D^M \quad (1.53)$$

dove U^D contiene la cosiddetta fase di Dirac, mentre D^M contiene le fasi di Majorana. La parametrizzazione che spesso viene usata per la matrice U^D è la seguente

$$U^D = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

dove abbiamo indicato $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$, $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$ con θ_{ij} angoli di mixing ($0 < \theta_{ij} < \pi/2$), δ_{13} è la fase di violazione di CP di Dirac. Per quanto riguarda la matrice diagonale D^M essa può essere parametrizzata come

$$D^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda_{31}} \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

dove λ_{21} e λ_{31} sono le fasi di violazione di CP di Majorana.

La matrice unitaria 3×3 (1.53) è anche nota come matrice di Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (**PMNS**).

1.6 Oscillazioni di neutrino nel vuoto

L'oscillazione di neutrino è un fenomeno in cui si ha che un neutrino, creato in un determinato flavour, diventa un neutrino con un flavour differente [11]

$$\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta . \quad (1.56)$$

Per la derivazione dell'espressione della probabilità di oscillazione di neutrino è importante sottolineare il fatto che negli esperimenti di oscillazione i neutrini sono ultrarelativistici. I processi in cui i neutrini vengono osservati sono interazioni in corrente carica, come ad esempio $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, od anche interazioni elastiche del tipo $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$. Nel Modello Standard tali reazioni sono mediate rispettivamente da

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{-g}{2\sqrt{2}} J_{CC}^\mu W_\mu + \text{h.c.} ; \quad J_{CC}^\mu = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} \quad (1.57)$$

¹¹In questo caso si avrebbe una trasformazione sui campi di neutrini massivi della forma

$$\nu_\alpha \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \nu_\alpha .$$

$$\mathcal{L}_{NC} = \frac{-g}{2 \cos \theta_W} J_{NC}^\mu Z_\mu + \text{h.c.} ; \quad J_{NC}^\mu = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} . \quad (1.58)$$

dove g è la costante di accoppiamento, θ_W è l'angolo di Weinberg, mentre Z_μ e W_μ sono i bosoni mediatori rispettivamente per i processi in corrente neutra e carica. In entrambi i casi, l'energia minima richiesta è dell'ordine del MeV: per superare la soglia di produzione nel primo caso o per avere un segnale distinguibile dal fondo nel secondo. Il limite superiore alla massa del neutrino è dell'ordine dell'eV, dunque dal confronto con le energie in gioco si ha che i neutrini misurati sono sempre particelle relativistiche.

Per poter trovare la probabilità di transizione di questo tipo di processi, consideriamo la reazione

$$A \rightarrow B + \alpha^+ + \nu_\alpha , \quad (1.59)$$

con $\alpha = e, \mu, \tau$. Tale tipo di processo descrive la creazione di un neutrino di flavour α con l'antileptone associato. Lo stato di neutrino prodotto $|\nu_\alpha\rangle$ di sapore definito è dato dalla combinazione lineare degli autostati di massa $|\nu_k\rangle$, ovvero

$$|\nu_\alpha\rangle \propto \sum_k |\nu_k\rangle \langle \nu_k, \alpha^+ | j_{CC}^\rho | 0 \rangle J_\rho^{A \rightarrow B} , \quad (1.60)$$

dove abbiamo indicato con j_{CC}^ρ la corrente carica debole del processo e con $J_\rho^{A \rightarrow B}$ la corrente responsabile della transizione da A a B . Facendo ora riferimento alla (1.51), trascurando gli effetti di massa del neutrino nei processi di assorbimento e produzione, possiamo porre

$$\langle \nu_k, \alpha^+ | j_{CC}^\rho | 0 \rangle J_\rho^{A \rightarrow B} \propto \mathbf{U}_{\alpha k}^* , \quad (1.61)$$

cosicché, con le opportune normalizzazioni, otteniamo

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle . \quad (1.62)$$

Invertendo la (1.62), otteniamo gli autostati di massa in funzione di quelli d'interazione

$$|\nu_k\rangle = \sum_\alpha \mathbf{U}_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle . \quad (1.63)$$

Inserendo tale relazione nell'espressione della corrente carica della (1.57) si arriva al risultato

$$J_{CC}^\mu = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1}^3 \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^\mu \mathbf{U}_{\alpha k} \nu_{kL} , \quad (1.64)$$

da cui segue che la matrice di mescolamento compare solo nei processi in corrente carica, mentre le correnti neutre sono diagonali e mostrano l'assenza di *flavor changing neutral current* (**FCNC**).

I neutrini massivi $|\nu_k\rangle$ sono autostati dell'Hamiltoniana libera

$$\mathcal{H}|\nu_k\rangle = E_k |\nu_k\rangle \quad (1.65)$$

dove gli autovalori in energia sono $E_k = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_k^2}$. L'equazione di Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\nu_k(t)\rangle = \mathcal{H} |\nu_k(t)\rangle, \quad (1.66)$$

prescrive che che gli stati del neutrino massivo evolvano nel tempo nella forma di onda piana

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle. \quad (1.67)$$

Applicando la (1.67) alla (1.62), si ha che per gli stati di flavour vale la seguente relazione di evoluzione temporale

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle, \quad (1.68)$$

con E_k energia del neutrino massivo di tipo k e $|\nu_\alpha\rangle$ tale da soddisfare la condizione iniziale $|\nu_\alpha(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle$. Inserendo la (1.63) nella (1.68), otteniamo

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} \mathbf{U}_{\beta k} |\nu_\beta\rangle. \quad (1.69)$$

Dato che la matrice \mathbf{U} non è diagonale, dopo un tempo t lo stato di flavour definito evolve in una sovrapposizione di stati di flavour differenti, a causa del processo di mixing. L'ampiezza di transizione tra due stati di flavour differenti, in un tempo t è data da

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(L, t) \rangle = \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} e^{-iE_k t}, \quad (1.70)$$

da cui segue che la probabilità di transizione è

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \left| A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \right|^2 = \sum_{k,j} \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}. \quad (1.71)$$

Data la natura ultrarelativistica del neutrino, gli autovalori in energia E_k possono essere approssimati dalla¹²

$$E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E} \quad (1.72)$$

dove E è l'energia del neutrino nel limite di massa nulla, ovvero $E = |\vec{p}|$. In tale limite si trova che

$$E_k - E_j \simeq \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} \quad (1.73)$$

¹²Infatti

$$E_k = \sqrt{|\vec{p}_k|^2 + m_k^2} = |\vec{p}_k| \sqrt{\left(1 + \frac{m_k^2}{|\vec{p}_k|^2}\right)} \simeq |\vec{p}_k| \left(1 + \frac{m_k^2}{2|\vec{p}_k|^2}\right) \simeq E + \frac{m_k^2}{2E}$$

avendo considerato lo sviluppo in serie nella massa del neutrino e nell'ultimo passaggio il limite di massa nulla, tale per cui $E = |\vec{p}|$.

dove $\Delta m_{kj}^2 \equiv m_k^2 - m_j^2$ è la differenza del quadrato delle masse.

La probabilità di transizione, dunque, può essere riscritta nella forma

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_{k,j} \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 t}{2E}\right). \quad (1.74)$$

Negli esperimenti sull'oscillazione di neutrini il tempo t non può essere misurato. Ciò che si conosce è la distanza L che viene percorsa dalla sorgente al detector. Essendo i neutrini particelle ultrarelativistiche, essi si propagano circa alla velocità della luce, dunque è possibile considerare l'approssimazione $t = L$, cosicché

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_{k,j} \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right). \quad (1.75)$$

Dalla (1.75) si nota che, detta ϕ_{kj} fase di oscillazione del neutrino

$$\phi_{kj} = -\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}, \quad (1.76)$$

essa dipende dall'energia e dalla distanza percorsa, quantità dipendenti dall'esperimento in esame, e dalla differenza di massa quadratica Δm_{kj}^2 . Dunque i parametri che intervengono nelle oscillazioni di neutrini sono gli elementi della matrice di mixing e la differenza dei quadrati delle masse.

La probabilità di oscillazione (1.75) dipende dagli elementi della matrice di mixing \mathbf{U} attraverso il prodotto

$$\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*, \quad (1.77)$$

il quale non dipende dalla parametrizzazione specifica della matrice di mixing o dalla scelta delle fasi. Infatti il prodotto (1.77) è invariante sotto trasformazioni di fase del tipo

$$\mathbf{U}_{\alpha k} \longrightarrow e^{i\psi_\alpha} \mathbf{U}_{\alpha k} e^{i\phi_k}, \quad (1.78)$$

da cui segue che la (1.77) non dipende da quelle fasi che possono essere fattorizzate a destra o a sinistra della matrice di mixing.

Nel caso di neutrini di Majorana, come visto in precedenza nella (1.53), la matrice di mixing contiene, oltre ad una fase di Dirac analoga a quella della matrice CKM del mescolamento dei quark, due fasi di Majorana che compaiono in una matrice diagonale, tale che la matrice di mescolamento dei neutrini può essere scritta come

$$\mathbf{U}_{\alpha k} = U_{\alpha k}^D e^{i\lambda_k}. \quad (1.79)$$

Dunque, dalle considerazioni appena fatte, quello che si ottiene è che la (1.77) è indipendente dalle fasi di Majorana. In particolare la violazione di CP e T nelle oscillazioni dei neutrini dipende solo dalla fase di Dirac. Chiaramente le oscillazioni tra diversi sapori si manifestano per $L > 0$ poiché, dalla relazione di unitarietà

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k} \mathbf{U}_{\beta k}^* = \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.80)$$

si ha che

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L = 0, E) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.81)$$

La probabilità di transizione (1.75) soddisfa le regole di conservazione di probabilità

$$\sum_{\beta} P_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}}(L, E) = 1 \quad (1.82)$$

$$\sum_{\alpha} P_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}}(L, E) = 1 \quad (1.83)$$

che derivano dall'unitarietà della matrice di mixing (1.80). Risulta utile riscrivere la probabilità di oscillazione (1.75) separando la parte reale dalla parte immaginaria del prodotto (1.77). Dalla relazione di unitarietà si ha

$$\sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 = \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{k>j} \text{Re}[\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}] \quad (1.84)$$

che permette di riscrivere la probabilità di oscillazione nel seguente modo

$$\begin{aligned} P_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}}(L, E) = & \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \text{Re}[\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) + \\ & + 2 \sum_{k>j} \text{Im}[\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}] \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right). \end{aligned} \quad (1.85)$$

L'espressione della probabilità di oscillazione (1.85), considerando l'espressione della matrice di mixing (1.53), può essere riscritta considerando il comportamento sotto trasformazioni di CP, ovvero

$$P_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}}(L, E) = P_{CP}(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) + P_{\mathcal{CP}}(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}), \quad (1.86)$$

dove i due differenti contributi possono essere espressi come

$$\begin{aligned} P_{CP}(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) = P_{CP}(\bar{\nu}_{\alpha} \rightarrow \bar{\nu}_{\beta}) = \\ = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \text{Re}[\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right), \end{aligned} \quad (1.87)$$

$$P_{\mathcal{CP}}(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) = -P_{\mathcal{CP}}(\bar{\nu}_{\alpha} \rightarrow \bar{\nu}_{\beta}) = \quad (1.88)$$

$$= 2 \sum_{j>k} \text{Im}[\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*] \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right). \quad (1.89)$$

Si ottiene così

$$P_{\bar{\nu}_{\alpha} \rightarrow \bar{\nu}_{\beta}}(L, E) = P_{\nu_{\beta} \rightarrow \nu_{\alpha}}(L, E) = P_{CP}(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}) - P_{\mathcal{CP}}(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}), \quad (1.90)$$

avendo fatto ricorso all'invarianza sotto CPT¹³. Nel caso $\alpha = \beta$ non si avrebbe violazione di CP dal momento che gli elementi della matrice di mixing sarebbero reali. Se invece $\alpha \neq \beta$ è possibile osservare il termine di violazione di CP.

Consideriamo il caso, semplice ma istruttivo, in cui si abbia mixing tra sole due famiglie di neutrini, ovvero vi siano due stati di flavour ν_{α} e ν_{β} che sono combinazione

¹³Si veda l'Appendice A.

lineare dei neutrini massivi ν_1 e ν_2 . La matrice di mixing \mathbf{U} può essere parametrizzata come segue

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

così che la probabilità di transizione che si deriva è¹⁴

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right). \quad (1.92)$$

A causa della piccola sezione d'urto dei neutrini, affinché si abbia un segnale statisticamente differente dal fondo, nella (1.92) si deve avere

$$\frac{\Delta m^2 L}{4E} \gtrsim 0.1 \div 1. \quad (1.93)$$

Gli esperimenti possono essere classificati in relazione alla sensibilità rispetto ai differenti valori di Δm^2 , scegliendo opportunamente il rapporto L/E :

- **Esperimenti Short-baseline (SBL).** Questa tipologia è tale che $L/E \lesssim 1 \text{ eV}^{-2}$. Si ha che la distanza tra sorgente e rivelatore garantisce un numero di eventi per unità di tempo relativamente grande e questo permette di apprezzare eventi per i quali $\Delta m^2 L/4E \gtrsim 0.1$ che danno una sensibilità sulle differenze di massa pari a $\Delta m^2 \gtrsim 0.1 \text{ eV}^2$.
- **Esperimenti Long-baseline (LBL) e esperimenti con neutrini atmosferici.** In questi esperimenti $L/E \lesssim 10^4 \text{ eV}^{-2}$. Le oscillazioni di flavor risultano misurabili per $\Delta m^2 L/4E \gtrsim 1$, corrispondenti a $\Delta m^2 \gtrsim 10^{-4} \text{ eV}^2$.
- **Esperimenti Very long-baseline (VLBL) ed esperimenti con neutrini solari.** In questo caso si ha $L/E \approx 3 \times 10^5 \text{ eV}^{-2}$ che corrisponde a una sensibilità $\Delta m^2 \gtrsim 3 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$.

Gli esperimenti con neutrini atmosferici e solari hanno misurato due differenti splitting in massa

$$\Delta m_{atm}^2 = m_2^2 - m_1^2 = (2.35_{-0.09}^{+0.12}) \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (1.94)$$

$$|\Delta m_{sol}^2| = |m_3^2 - (m_1^2 + m_2^2)/2| = (7.58_{-0.26}^{+0.22}) \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (1.95)$$

si noti che $\Delta m_{atm}^2 \gg |\Delta m_{sol}^2|$. Tali dati sono compatibili con due differenti ordinamenti in massa: gerarchia normale e gerarchia inversa. Nel primo caso $|\Delta m_{sol}^2|$ corrisponde alla differenza tra gli autovalori di massa più leggeri, mentre nel secondo caso $|\Delta m_{sol}^2|$ corrisponde alla differenza tra le masse più pesanti.

¹⁴Si veda l'Appendice B.

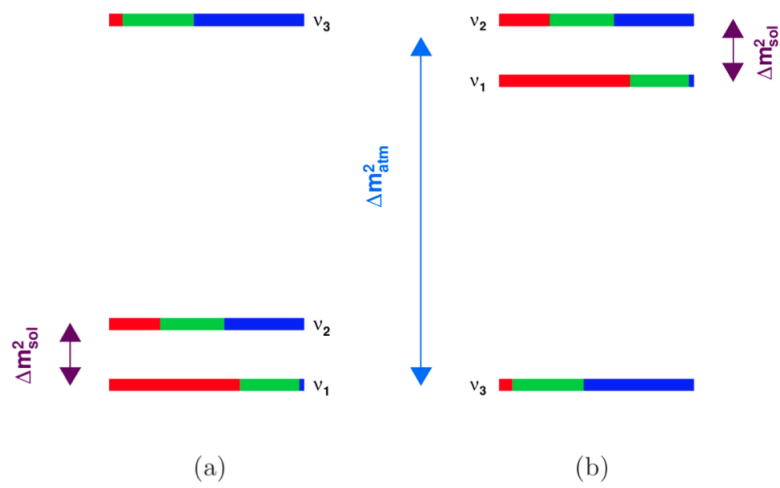


Figura 1.1. Schema dei due tipi di ordinamento che si possono avere: a destra si ha l'ordinamento inverso, mentre a sinistra si ha l'ordinamento normale. Gli elettroni, i muoni e i tau vengono rappresentati rispettivamente con il colore rosso, verde e blu.

Capitolo 2

Interazioni neutrino-nucleone

In questa sezione vogliamo affrontare il problema del calcolo della sezione d'urto di un processo di scattering tra neutrino e nucleone in corrente carica [12, 13, 14]. Indicando con ℓ il generico flavour, consideriamo il processo, mostrato in Figura 2.1

$$\nu_\ell(k) + N(p) \rightarrow \ell^-(k') + X(p') . \quad (2.1)$$

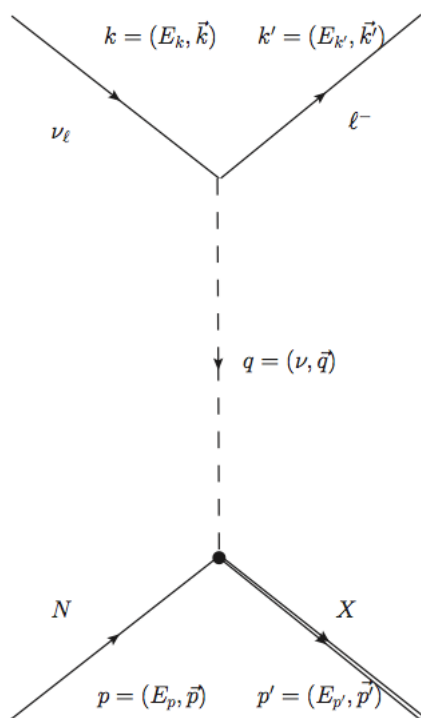


Figura 2.1. Diagramma dell'interazione neutrino-nucleone.

L'ampiezza di transizione invariante per reazioni in corrente carica che coinvolgono un neutrino, può essere scritta come

$$\mathcal{M} = \frac{G_F V_{ud}}{\sqrt{2}} \bar{u}_\ell(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_\ell}(k) \langle X(p') | J^\mu(0) | N(p) \rangle , \quad (2.2)$$

dove abbiamo indicato con u e \bar{u} gli spinori di Dirac delle particelle leptoniche, G_F è la costante di Fermi e V_{ud} è l'elemento della matrice CKM che accoppia i quark u e d .

La sezione d'urto non polarizzata risulterà proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza di transizione mediata sullo spin delle particelle iniziali e sommata sugli spin delle particelle finali

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \sum_{\sigma_i, \sigma_f} \frac{1}{2} \sum_{S_i, S_f} |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{2} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} , \quad (2.3)$$

ovvero proporzionale alla contrazione tra il tensore adronico $W_{\mu\nu}$ e quello leptonic $L^{\mu\nu}$. In generale, possiamo scrivere la sezione d'urto doppiamente differenziale nel seguente modo

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{k'}} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{16\pi^2} \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

con $d\Omega = d\phi d\cos\theta$, dove θ è l'angolo tra il neutrino incidente e il leptone uscente e \vec{k} , \vec{k}' sono gli impulsi spaziali dei leptoni.

Il tensore leptonic risulta completamente determinato dalle variabili cinematiche dei leptoni avendo trascurato i termini proporzionali alla massa del neutrino

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \sum_{S_f, S_i} [\bar{u}_\ell(k') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_\ell}(k)] [\bar{u}_{\nu_\ell}(k') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_\ell(k)] \\ &= Tr[(\not{k}' + m) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^\nu (1 - \gamma^5)] \\ &= 8[k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} k \cdot k' + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho k'_\sigma] , \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove m è la massa del leptone carico. Nel caso di antineutrini, il termine proporzionale al tensore totalmente antisimmetrico $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ prende un segno negativo.

Per quanto riguarda il tensore adronico, rispetto al caso elettromagnetico, lo studio è più complesso dato che non è possibile sfruttare la conservazione della parità e della corrente. Il tensore adronico, in termini della corrente, assume la forma

$$W^{\mu\nu} = \sum_X \langle N(p) | J^{\mu\dagger}(0) | X(p') \rangle \langle X(p') | J^\nu(0) | N(p) \rangle \delta(E_k + E_p - E_{k'} - E_{p'}) . \quad (2.6)$$

La forma più generale che si può considerare è funzione di sei differenti funzioni di struttura tra loro indipendenti

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta \frac{W_3}{2M^2} + q^\mu q^\nu \frac{W_4}{M^2} + \\ &+ (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) \frac{W_5}{M^2} + i(p^\mu q^\nu - q^\mu p^\nu) \frac{W_6}{2M^2} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

con M massa del nucleone. Le funzioni di struttura W_i sono reali e dipendenti dal quadrimpulso trasferito q^2 , $p^2 = M^2$ e dal prodotto scalare $p \cdot q$. Nella diffusione su adroni liberi, i termini di $L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$ proporzionali a W_4 , W_5 e W_6 sono nulli. Nel caso di diffusione su nucleoni legati, che discuteremo nel seguito, i termini in W_4 e W_5 danno un contributo non nullo, mentre il termine in W_6 è sempre nullo, come richiesto dall'invarianza sotto CP.

2.0.1 La sezione d'urto quasi elastica

Vogliamo esaminare il caso in cui si abbia scattering quasi elastico tra un neutrino e un nucleone, in corrente carica come mostrato in Figura 2.2

$$\nu_\ell(k) + n(p) \rightarrow \ell^-(k') + p(p') . \quad (2.8)$$

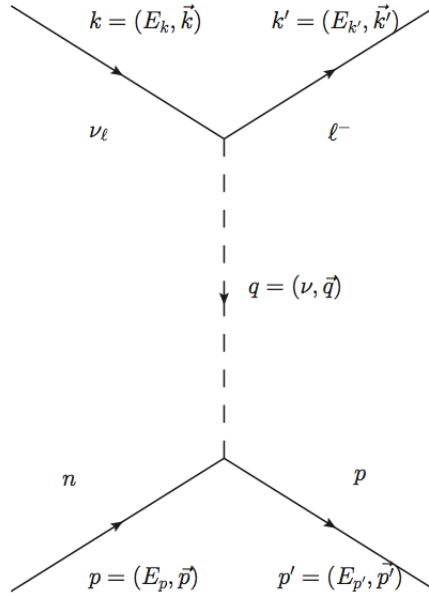


Figura 2.2. Diagramma dell'interazione neutrino-neutrone.

Per tale processo, la forma assunta dall'ampiezza invariante è

$$\mathcal{M} = \frac{G_F V_{ud}}{\sqrt{2}} \bar{u}_\ell(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_\ell}(k) \times \quad (2.9)$$

$$\bar{u}_p(p') \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + i F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2M} + F_A(q^2) \gamma^\mu \gamma^5 + F_P(q^2) \frac{2M}{m_\pi^2} q^\mu \gamma^5 \right] u_n(p) .$$

con m_π massa del pione e le F_i sono i fattori di forma che specificheremo nel seguito. Per quanto riguarda il tensore leptónico, esso coincide con la (2.5). Il tensore adronico della (2.7), può essere semplificato immediatamente; tenendo solo i termini

che danno contributo non nullo alla contrazione con $L_{\mu\nu}$, esso può essere riscritto nella forma

$$W^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}W_1 + p^\mu p^\nu \frac{W_2}{M^2} - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta \frac{W_3}{M^2}, \quad (2.10)$$

dove le W_i , nel caso quasi elastico che stiamo considerando, possono essere riscritte nella forma

$$W_i = \tilde{W}_i \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m}\right). \quad (2.11)$$

Per quanto riguarda le funzioni di struttura \tilde{W}_i che compaiono nella (2.10), esse possono essere espresse tramite i fattori di forma.

La corrente adronica responsabile della transizione $n \rightarrow p$, ovvero

$$j_{CC}^\mu = \langle p(p') | j^\mu(0) | n(p) \rangle \quad (2.12)$$

ha una struttura **V-A** della forma

$$j^\mu = j_V^\mu - j_A^\mu \quad (2.13)$$

con j_A^μ corrente assiale e j_V^μ corrente vettoriale.

L'espressione più generale con cui possono esprimersi i contributi assiali e vettoriali è la seguente

$$j_V^\mu = j_V^{\mu+} = \bar{N}(p') \Gamma_V^\mu \tau^+ N(p) \quad (2.14)$$

$$j_A^\mu = j_A^{\mu+} = \bar{N}(p') \Gamma_A^\mu \tau^+ N(p) \quad (2.15)$$

con p e p' momenti dei nucleoni iniziali e finali, mentre Γ_V^μ e Γ_A^μ sono dati da

$$\Gamma_V^\mu = \gamma^\mu F_1 + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \frac{F_2}{2M} + \frac{q^\mu}{M} F_S \quad (2.16)$$

$$\Gamma_A^\mu = \gamma^\mu \gamma^5 F_A + i\gamma^5 \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{M} F_T + q^\mu \gamma^5 F_P \frac{2M}{m_\pi^2} \quad (2.17)$$

e τ^+ è l'operatore di innalzamento di isospin che agisce sul doppietto $N = (n, p)^T$ e F_i sono i fattori di forma dipendenti dal quadrato del quadrimomento trasferito q^2 ; $F_{1,2}$ sono i fattori di forma vettoriali detti di Dirac e di Pauli rispettivamente, F_S quello scalare, mentre F_A , F_T e F_P sono rispettivamente i fattori di forma assiale, tensoriale e pseudoscalare.

L'ipotesi CVC permette di porre $F_S(q^2) = 0$ e di mettere in relazione il fattore di forma vettoriale con i fattori di forma elettromagnetici del protone e del neutrone, misurabili dagli esperimenti di diffusione di leptoni carichi su idrogeno e deuterio

$$F_1 = F_1^p - F_1^n \quad (2.18)$$

$$F_2 = F_2^p - F_2^n. \quad (2.19)$$

D'altro canto, l'ipotesi PCAC mette in relazione $F_A(q^2)$ con $F_P(q^2)$ in modo tale che si ottiene $F_P(q^2) = 2M^2 F_A(q^2)/(m_\pi^2 - q^2)$. Infine, poiché le correnti di seconda

classe sono incompatibili con il Modello Standard delle interazioni elettrodeboli, poniamo $F_T(q^2) = 0$ ¹.

Possiamo riesprimere i fattori di forma di Dirac e Pauli, F_1 e F_2 , in funzione dei fattori di forma di Rosembluth

$$G_E = F_1(q^2) - \tau F_2(q^2) \quad (2.20)$$

$$G_M = F_1(q^2) + F_2(q^2) \quad (2.21)$$

con $\tau \equiv q^2/(4M^2)$.

La parametrizzazione in termini di dipolo fornisce una buona rappresentazione dei dati sperimentali disponibili per $Q^2 \lesssim 1 \text{ GeV}^2$, tale per cui si ha

$$G_E = \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{m_V^2}\right)^2} \quad (2.22)$$

$$G_M = 4.71 G_E \quad (2.23)$$

con m_V massa vettoriale, il cui valore è ricavato da un fit dei dati e risulta essere $m_V = 0.71 \text{ GeV}$. Quindi le espressioni che si ricavano per i fattori di forma sono le seguenti

$$F_1(q^2) = \frac{1}{1 - \tau} \left[G_E(q^2) - \tau G_M(q^2) \right] \quad (2.24)$$

$$F_2(q^2) = \frac{1}{1 - \tau} \left[-G_E(q^2) + G_M(q^2) \right] \quad (2.25)$$

$$F_A(q^2) = \frac{g_A}{\left(1 - \frac{q^2}{m_A^2}\right)^2} \quad (2.26)$$

$$F_P(q^2) = \frac{2M^2}{(m_\pi^2 - q^2)} F_A \quad (2.27)$$

dove la costante assiale è $g_A = -1.26$, mentre la massa assiale, $m_A = 1.026 \text{ GeV}$, in linea di principio si può ottenere da processi di scattering di neutrino su deutone; si tratta però di esperimenti a bassa statistica dunque risulta peggio conosciuta rispetto a m_V .

Dunque dall'espressione del tensore adronico, utilizzando i risultati appena introdotti e l'identità di Gordon², diventa

¹Le correnti di prima e seconda classe sono caratterizzate da un diverso comportamento sotto G-parità

$$\begin{aligned} G J_V^\mu G^{-1} &= J_V^\mu; & G J_{V.s.c.}^\mu G^{-1} &= -J_{V.s.c.}^\mu \\ G J_A^\mu G^{-1} &= -J_A^\mu; & G J_{A.s.c.}^\mu G^{-1} &= -J_{A.s.c.}^\mu \end{aligned}$$

con $G = C e^{-i\tau_2\pi}$, dove C è l'operatore coniugazione di carica e τ_2 è la matrice di isospin.

²Identità di Gordon

$$2m\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')[(p+p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(p) .$$

$$W^{\mu\nu} = \text{Tr} \left\{ (\not{p}' + M) \left[\gamma^\mu (1 - r\gamma^5) - \frac{R}{2M} \tilde{p}^\mu \right] \times \right. \quad (2.28)$$

$$\left. \times (\not{p} + M) \left[\gamma^\nu (1 - r\gamma^5) - \frac{R}{2M} \tilde{p}^\nu \right] \right\} (F_1 + F_2)^2$$

con

$$\tilde{p}^\mu = (p + p')^\mu \quad (2.29)$$

$$r = -\frac{F_A}{F_1 + F_2} \quad (2.30)$$

$$R = \frac{F_M}{F_1 + F_2} . \quad (2.31)$$

avendo anche trascurato il termine pseudoscalare F_P nella (2.17).

La forma che assume il tensore adronico, sviluppando la traccia, è la seguente

$$W^{\mu\nu} = \left\{ -2g^{\mu\nu} \left[r^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - \frac{q^2}{4M^2} \right] \right. \quad (2.32)$$

$$+ 2\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} \left[1 + r^2 + R^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - 2R \right]$$

$$+ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p_\rho p_\sigma}{2M^2} (4r)$$

$$+ \frac{q^\mu q^\nu}{M^2} \left[\frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - R \right]$$

$$\left. + \frac{p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu}{M^2} \left[1 + r^2 + R^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} - 2R \right) \right] \right\} (F_1 + F_2)^2$$

da cui possiamo ricavare, identificando i diversi termini della (2.32) con la (2.10), la forma delle cinque funzioni di struttura

$$\tilde{W}_1 = 2[F_A^2(1 + \tau) + \tau(F_1 + F_2)^2] \quad (2.33)$$

$$\tilde{W}_2 = 2[F_A^2 + F_1^2 + \tau F_2^2] \quad (2.34)$$

$$\tilde{W}_3 = 4F_A(F_1 + F_2) \quad (2.35)$$

$$\tilde{W}_4 = \frac{1}{2}[F_M^2(1 + \tau) - 2F_2(F_1 + F_2)] \quad (2.36)$$

$$\tilde{W}_5 = \frac{W_2}{2} . \quad (2.37)$$

Quello che rimane da fare è la contrazione col tensore leptonic, ma prima di procedere ci poniamo nel sistema di riferimento in cui il nucleone è in quiete, ovvero

$$p^\mu = (M, 0) , \quad (2.38)$$

$$k^\mu = (E, \mathbf{k}) , \quad (2.39)$$

$$k'^\mu = (E', \mathbf{k}') \quad (2.40)$$

in tal modo la contrazione dei due tensori si riduce nella forma

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = & 2EE' \left\{ \tilde{W}_1(1 - v' \cos \theta) + \tilde{W}_2 \frac{1 + v' \cos \theta}{2} \right. \\ & \left. + \tilde{W}_3 \left[- \frac{E + E'}{M} \frac{1 + v' \cos \theta}{2} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (2.41)$$

con $v' = |\vec{k}'|/E_{k'}$. Si noti che, avendo trascurato i termini proporzionali alla massa del leptone nella contrazione i termini proporzionali a W_4 e W_5 sono nulli. Dunque la sezione d'urto doppiamente differenziale che si ottiene è

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = & \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{16\pi^2} \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = \\ = & \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{16\pi^2} \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} 2EE' \left\{ \tilde{W}_1(1 - v' \cos \theta) + \tilde{W}_2 \frac{1 + v' \cos \theta}{2} \right. \\ & \left. + \tilde{W}_3 \left[- \frac{E + E'}{M} \frac{1 + v' \cos \theta}{2} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.0.2 Produzione di risonanze

Nel range di energie che stiamo considerando, oltre allo scattering quasi elastico, dobbiamo considerare la produzione di risonanze [12, 15]. Infatti la produzione di un pione, assieme allo scattering quasi elastico e quello profondamente anelastico, che vedremo nel seguito, contribuiscono alla sezione d'urto totale neutrino-nucleone. La produzione di un pione deriva per lo più dalla produzione di risonanze, ed il contributo dominante si ha dalla Δ^{++} . Il processo che prenderemo in considerazione è il seguente

$$\nu_\ell(k) + p(p) \rightarrow \ell^-(k') + \Delta^{++}(p') \rightarrow \ell^- + p + \pi^+ . \quad (2.43)$$

Nel calcolo della sezione d'urto, il tensore leptonic (2.5) rimane invariato, per quello adronico avremo

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2M} \sum \langle p | J_\mu(0) | \Delta \rangle \langle \Delta | J_\nu(0) | p \rangle \delta(W^2 - M_R^2) \quad (2.44)$$

dove la sommatoria implica la somma su tutti gli stati di polarizzazione delle Δ e sulla media degli spin del target, W^2 rappresenta il quadrato della massa invariante adronica ed M_R è la massa della risonanza. Ovviamente la (2.44) può essere espressa in termini delle funzioni di struttura come nella (2.7) ma, a differenza del caso quasi elastico, le funzioni di struttura dipenderanno da due variabili: il quadrimpulso trasferito q^2 e la massa invariante W^2 .

Risulta possibile riscrivere la delta di Dirac della conservazione dell'energia nella (2.44) in termini del fattore di Breit-Wigner

$$\delta(W^2 - M_R^2) = \frac{M_R \Gamma_R}{\pi} \frac{1}{(W^2 - M_R^2)^2 - M_R^2 \Gamma_R^2} \quad (2.45)$$

dove Γ_R indica l'ampiezza di decadimento. In questi termini risulterà idoneo riscrivere la sezione d'urto doppiamente differenziale in termini della massa invariante, ovvero

$$\frac{d^2\sigma}{dW dQ^2} = \frac{\pi W}{M E E'} \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \quad (2.46)$$

L'elemento di matrice adronica della (2.44) sarà differente a seconda delle risonanza che si vogliono considerare. La parametrizzazione spesso usata in letteratura è la seguente

$$\langle \Delta^{++} | J^\nu(0) | p \rangle = \sqrt{3} \bar{\psi}_\lambda(p') d^{\lambda\nu} u(p) \quad (2.47)$$

dove

$$\begin{aligned} d^{\lambda\nu} = & g^{\lambda\nu} \left[\frac{C_3^V}{M} \not{q} + \frac{C_4^V}{M^2} (p' \cdot q) + \frac{C_5^V}{M^2} (p \cdot q) + C_6^V \right] \gamma^5 + \\ & - q^\lambda \left[\frac{C_3^V}{M} \gamma^\nu + \frac{C_4^V}{M^2} p'^\nu + \frac{C_5^V}{M^2} p^\nu \right] \gamma^5 + \\ & + g^{\lambda\nu} \left[\frac{C_3^A}{M} \not{q} + \frac{C_4^A}{M^2} (p' \cdot q) \right] - q^\lambda \left[\frac{C_3^A}{M} \gamma^\nu + \frac{C_4^A}{M^2} p'^\nu \right] + g^{\lambda\nu} C_5^A + q^\lambda q^\nu \frac{C_6^A}{M^2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

dove l'apice A indica i fattori di forma assiali, mentre l'apice V quelli vettoriali. Si fa inoltre ricorso nel successivo calcolo del tensore adronico agli operatori di proiezione di Rarita e Schwinger, definiti come

$$\begin{aligned} |\psi_\Delta\rangle \langle \psi_\Delta| & \equiv S^{\sigma\rho} = \\ & = [\not{p}' + M_R] \left[-g^{\sigma\rho} + \frac{1}{3} \gamma^\sigma \gamma^\rho + \frac{1}{3M_R} (\gamma^\sigma p'^\rho - p'^\sigma \gamma^\rho) + \frac{2}{3M_R^2} p'^\sigma p'^\rho \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

quindi il tensore adronico assume la forma

$$W_{\mu\nu} = \frac{3}{2} \frac{1}{2M} \text{Tr}[\bar{d}_{\mu\sigma} S^{\sigma\lambda} d_{\lambda\nu} (\not{p} + M)] \delta(W^2 - M_R^2) \quad (2.50)$$

dove $\bar{d}^{\mu\sigma} = \gamma_0 (d^\dagger)^{\mu\sigma} \gamma_0$ ed il fattore 3 rappresenta il coefficiente di isospin della Δ mentre il fattore 1/2 deriva dalla media sugli spin dello stato iniziale.

Per la determinazione di tali fattori di forma ($C_i^{A,V}$), esistono due differenti approcci: il primo è basato sulla parametrizzazione del vertice di interazione neutrino-nucleone-risonanza attraverso dei fattori di forma fenomenologici, il secondo invece è il modello di Rein e Segal basato sul modello a quark di Feynman, Kislinger e Randal.

Prendendo in considerazione il primo schema, la determinazione dei fattori di forma deriva per lo più da principi generali e risultati sperimentali. L'ipotesi CVC ci permette subito di porre

$$C_6^V = 0 ; \quad (2.51)$$

inoltre ci dice anche che le componenti di un multipletto di isospin hanno lo stesso fattore di forma, quindi per il neutrino nel canale di corrente carica è possibile mettere in relazione i fattori di forma della Δ^{++} con quelli della Δ^+ , infatti³

$$\langle \Delta^{++} | J_\mu(0) | p \rangle = \sqrt{3} \langle \Delta^+ | J_\mu(0) | n \rangle . \quad (2.52)$$

Per processi che coinvolgono antineutrini si ottengono relazioni analoghe⁴, infatti la forma del tensore adronico rimane invariato come nella (2.44), e si ha

$$\langle \Delta^- | J_\mu(0) | n \rangle = \sqrt{3} \langle \Delta^0 | J_\mu(0) | p \rangle . \quad (2.53)$$

Per i restanti fattori di forma vettoriali si può considerare il fatto che essi sono gli stessi che intervengono nell'elettroproduzione, ed assumendo che il contributo dominante sia quello del dipolo magnetico quello che si trova è

$$C_5^V = 0 , \quad C_4^V = -C_3^V \frac{M}{W} . \quad (2.54)$$

dove C_3^V è l'unico fattore di forma che rimane indipendente, la cui parametrizzazione deriva dai dati sperimentali dei processi di elettroproduzione

$$C_3^V = \frac{C_3^V(0)}{\left[1 + \frac{Q^2}{M_V^2}\right]^2} \frac{1}{1 + \frac{Q^2}{4M_V^2}} \quad (2.55)$$

con $C_3^V(0) = 1.95$ e $M_V = 0.84$ GeV.

Per quanto riguarda i fattori di forma assiali si ha che il contributo dominante deriva da C_5^A , il cui valore è connesso a C_6^A dall'ipotesi PCAC attraverso la relazione

$$C_6^A = C_5^A(0) \frac{M^2}{Q^2 + m_\pi^2} , \quad \text{con} \quad C_5^A(0) = \frac{f_\pi g_\Delta}{\sqrt{3}} = 1.2 \quad (2.56)$$

con $f_\pi = 0.97 m_\pi$ e $g_\Delta = 15,3$ GeV⁻¹. Dunque la parametrizzazione usata è

$$C_5^A = \frac{C_5^A(0)}{\left[1 + \frac{Q^2}{M_A^2}\right]^2} \frac{1}{1 + \frac{Q^2}{3M_A^2}} . \quad (2.57)$$

³La Δ^+ deriva da processi in corrente carica di neutrino su neutrone

$$\nu_\ell + n \rightarrow \Delta^+ + \ell^- .$$

⁴I processi che coinvolgono gli antineutrini nella produzione di risonanze sono

$$\bar{\nu}_\ell + p \rightarrow \ell^+ + \Delta^0 ;$$

$$\bar{\nu}_\ell + n \rightarrow \ell^+ + \Delta^- .$$

Per quanto riguarda i restanti fattori di forma assiali, essi vengono ricavati dai fit sperimentali di esperimenti di scattering di neutrino, e quello che si trova è

$$C_3^A = 0, \quad (2.58)$$

$$C_4^A = -\frac{C_5^A}{4}. \quad (2.59)$$

Bisogna sottolineare il fatto che i fattori di forma qui riportati rappresentano solo una delle parametrizzazioni disponibili in letteratura.

2.0.3 Scattering profondamente anelastico

Nell'interazione neutrino-nucleone si ha che, nel regime in cui l'energia del neutrino è molto maggiore della massa del nucleone bersaglio, il processo dominante è lo scattering profondamente anelastico (*Deep Inelastic Scattering*, DIS) [16, 17, 18, 19, 20]. Il processo che stiamo considerando è

$$\nu_\ell(E_\nu, \vec{k}) + N(E, \vec{p}) \rightarrow \ell^-(E_\ell, \vec{k}') + X(E', \vec{p}') \quad (2.60)$$

dove $N = n, p$ e X denota lo stato adronico finale. Prima di procedere vogliamo introdurre delle quantità Lorentz-invarianti utili nel seguito; consideriamo l'energia del centro di massa al quadrato

$$s = (p + k)^2 \quad (2.61)$$

e le variabili di scaling di Björken

$$x = \frac{Q^2}{p \cdot q}, \quad (2.62)$$

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot p'} \quad (2.63)$$

dove $q = k - k' = p' - p$ è sempre il quadrimpulso trasferito. La variabile x rappresenta la frazione di momento del nucleone trasportata dal partone diffuso, mentre la y indica la frazione di energia trasferita in relazione con l'angolo di scattering nel centro di massa.

Iniziamo la trattazione considerando la sezione d'urto per scattering profondamente anelastico neutrino-nucleone, il cui studio rende necessario prendere in considerazione lo scattering neutrino-quark.

Nel calcolo dell'ampiezza di transizione entrano in gioco il tensore leptonic sempre della forma (2.5), mentre per quanto riguarda quello adronico (2.7), gli unici termini che sopravvivono alla contrazione sono quelli proporzionali a W_1 , W_2 e W_3

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} = & -W_1 \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{Q^2} q_\mu q_\nu \right) + \frac{W_2}{M^2} \left(p_\mu + \frac{p \cdot q}{Q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu + \frac{p \cdot q}{Q^2} q_\nu \right) + \\ & - \frac{i}{M^2} W_3 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho p^\sigma. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Inserendo la contrazione $L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$, quello che si ottiene per la sezione d'urto

$$\frac{d^2\sigma^\pm}{d\Omega dE_\ell} = \frac{G_F^2 E'^2}{2\pi^2} \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \mp \frac{E_\ell + E_\nu}{M} W_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.65)$$

dove il \pm si riferisce al caso in cui si consideri lo scambio di un W^+ oppure W^- e si è fatto ricorso alla relazione $Q^2 = 4E_\ell E_\nu \sin^2(\theta/2)$.

Vogliamo ora riesprimere la (2.65) in termini delle quantità Lorentz invarianti dunque, utilizzando la relazione

$$dE_\ell d\Omega = \frac{2ME_\nu}{E_\ell} \pi y \, dy dx, \quad (2.66)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^\pm}{dx dy} = \frac{G_F^2 (s - M^2)}{2\pi} & \left[xy^2 MW_1(x, y) + \left(1 - y - \frac{xyM^2}{(s - M^2)} \right) \nu W_2(x, y) + \right. \\ & \left. \pm \left(1 - \frac{y}{2} \right) \nu W_3(x, y) \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Nel limite in cui $Q^2 \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$, ma ad x fissato, per lo scaling di Bjorken, le funzioni W_1 , W_2 e W_3 diventano funzioni di una sola variabile x e sussistono le relazioni

$$MW_1(x, y) \longrightarrow F_1(x) \quad (2.68)$$

$$\nu W_2(x, y) \longrightarrow F_2(x) \quad (2.69)$$

$$\nu W_3(x, y) \longrightarrow F_3(x) \quad (2.70)$$

dunque in tale limite la sezione d'urto doppiamente differenziale diventa

$$\frac{d^2\sigma^\pm}{dx dy} = \frac{G_F^2 s}{2\pi} \left[xy^2 F_1(x) + (1 - y) F_2(x) \mp xy \left(1 + \frac{y}{2} \right) F_3(x) \right], \quad (2.71)$$

inoltre, dalla relazione di Callan-Gross

$$\nu W_2 = 2x MW_1, \quad (2.72)$$

che implica

$$F_2(x) = 2x F_1(x), \quad (2.73)$$

possiamo scrivere

$$\frac{d^2\sigma^\pm}{dx dy} = \frac{G_F^2 s}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} [F_2(x) \pm x F_3(x)] + \frac{1}{2} [F_2(x) \mp x F_3(x)] (1 - y^2) \right\}. \quad (2.74)$$

Dall'equazione precedente è possibile ricavare le espressioni di F_2 ed F_3 , infatti si trova che

$$F_2 = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{d^2\sigma^+}{dx dy} + \frac{d^2\sigma^-}{dx dy} \right) [1 + (1+y)^2]^{-1} \quad (2.75)$$

$$xF_3 = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{d^2\sigma^+}{dx dy} - \frac{d^2\sigma^-}{dx dy} \right) [1 - (1+y)^2]^{-1} \quad (2.76)$$

dove si è indicato

$$\sigma_0 = \frac{G_{FS}^2}{2\pi} . \quad (2.77)$$

Per proseguire vogliamo introdurre il modello a partoni-quark (*Quark Parton Model*, QPM) che ci permetterà di riscrivere le funzioni di struttura in termini della distribuzione dei momenti di quark e antiquark all'interno del nucleone.

Le assunzioni fondamentali del QPM sono

- i nucleoni sono un sistema composto da particelle elementari;
- nella regione del DIS le interazione tra i quark costituenti possono essere trascurate (libertà asintotica);
- nel limite di scattering profondamente anelastico si ha che $\vec{p} \gg M$ e che il momento trasverso dei quark può essere trascurato;
- sempre nel limite precedente si ha che è possibile trascurare le masse dei costituenti in relazione alle energie in gioco.

Nel quark parton model un importante risultato dello scaling di Björken sono le seguenti regole di somma

$$F_1(x) = \sum_i e_i^2 q_i(x) \quad (2.78)$$

$$F_2(x) = \sum_i x e_i^2 q_i(x)$$

dove $q_i(x)$ è interpretata come la probabilità di trovare un quark di tipo i -esimo con una frazione x del momento del nucleone, mentre e_i è la carica dell' i -esimo quark considerato.

Quello che dobbiamo affrontare è lo scattering neutrino-quark. Per tale processo è necessario dapprima ricavare la forma delle correnti che entrano in gioco. Consideriamo il processo

$$\nu_\ell(k) + d(p) \rightarrow \ell^-(k') + u(p') . \quad (2.79)$$

Le correnti deboli leptoniche e dei quark saranno rispettivamente

$$J_\mu^q = \bar{u}_u(x) \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_d(x) \quad (2.80)$$

$$J_\mu^\ell = \bar{u}_\nu(x) \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_\ell(x)$$

da cui è possibile ricavare la forma delle sezioni d'urto differenziali per processi di scattering da neutrino o antineutrino ⁵

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu_\ell + d \rightarrow \ell^- + u) = \frac{G_F^2 s}{4\pi^2} \quad (2.81)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\bar{\nu}_\ell + u \rightarrow \ell^+ + d) = \frac{G_F^2 s}{16\pi^2}(1 + \cos\theta)^2 \quad (2.82)$$

dove θ è l'angolo tra il leptone uscente e il quark entrante.

Attraverso il QPM è possibile ora esprimere la sezione d'urto sul nucleone attraverso la somma pesata delle sezioni d'urto sui quark, ovvero

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \sum_i x q_i(x) \left(\frac{d\sigma_i}{dy} \right)_{\hat{s}=xs} ; \quad (2.83)$$

si noti che la distribuzione angolare è stata sostituita dalla variabile adimensionale y , la cui relazione rispetto all'angolo θ è

$$y = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) . \quad (2.84)$$

Dunque la forma assunta dalle sezioni d'urto che entrano in gioco nella (2.83) è

$$\frac{d\sigma}{dy}(\nu_\ell + d \rightarrow \ell^- + u) = \frac{G_F^2 xs}{\pi} \quad (2.85)$$

$$\frac{d\sigma}{dy}(\bar{\nu}_\ell + u \rightarrow \ell^+ + d) = \frac{G_F^2 xs}{\pi}(1 - y)^2 \quad (2.86)$$

con xs energia del centro di massa del subprocesso, ed s è invece riferita al processo $\nu_\ell + N \rightarrow \ell^- + X$.

Dunque quello che si trova per la sezione d'urto (anti)neutrino-nucleone

$$\frac{d^2\sigma^{\nu N}}{dx dy} = \frac{G_F^2 xs}{2\pi} \left\{ [u(x) + d(x)] + [\bar{u}(x) + \bar{d}(x)](1 - y)^2 \right\} \quad (2.87)$$

$$\frac{d^2\sigma^{\bar{\nu} N}}{dx dy} = \frac{G_F^2 xs}{2\pi} \left\{ [\bar{u}(x) + \bar{d}(x)] + [u(x) + d(x)](1 - y)^2 \right\} . \quad (2.88)$$

Confrontando la (2.87) con la (2.74), affinché le due relazioni coincidano, si trova

$$2xF_1(x) = F_2(x) = x[q(x) + \bar{q}(x)] \quad (2.89)$$

$$-xF_3(x) = x[q(x) - \bar{q}(x)] \quad (2.90)$$

dove

$$q(x) \equiv u(x) + d(x) \quad (2.91)$$

⁵Tale risultato deriva dal semplice confronto con lo scattering elastico tra neutrino ed elettrone, infatti la corrente debole leptonica ha stessa forma della corrente debole dei quark.

avendo trascurato i contributi del quark s ⁶.

Per concludere vogliamo far notare che, se volessimo scrivere in termini di distribuzioni partoniche le funzioni di struttura dello scattering elettronico si otterrebbe

$$F_2^{eN}(x) = \frac{5}{18}x[q(x) + \bar{q}(x)] \quad (2.92)$$

dunque, dalla (2.89), si ha

$$F_2^{\nu N}(x) = \frac{18}{5}F_2^{eN}(x) , \quad (2.93)$$

ovvero è possibile mettere in relazione le funzioni di struttura dello scattering da neutrino con quello dello scattering da elettrone.

⁶Se avessimo considerato anche i quark s e c , avremo avuto per F_3

$$xF_3^{\nu, \bar{\nu}}(x) = x[q(x) - \bar{q}(x)] \pm 2[x\bar{s}(x) - x\bar{c}(x)] = xV(x) \pm 2[x\bar{s}(x) - x\bar{c}(x)] ,$$

con $V(x) = \sum_i (q_i(x) - \bar{q}_i(x)) = u_v(x) + d_v(x)$, che rappresenta la distribuzione dei quark di valenza, essendo $u(x) = u_v(x) + u_s(x)$ dove il pedice v indica i quark di valenza, mentre il pedice s indica i quark del mare (*sea*). Dunque la media di xF_3 diventa

$$xF_3 = \frac{1}{2}[xF_3^{\nu} + xF_3^{\bar{\nu}}]$$

ovvero sempre funzione delle distribuzioni dei quark di valenza.

Capitolo 3

Elementi di dinamica nucleare

In questo Capitolo vogliamo affrontare lo studio della dinamica nucleare. Come vedremo nel Capitolo 4, nello studio dello scattering neutrino-nucleo è necessario prendere in considerazione gli effetti di correlazione tra i nucleoni per avere una descrizione più accurata del processo.

La descrizione teorica della struttura e della dinamica nucleare ha delle difficoltà che derivano sia dalle interazioni forti che dalla complessità nel trattare il problema a molti corpi della meccanica quantistica.

Fenomenologicamente le interazioni *nucleone-nucleone* (NN), mostrano un potenziale complesso che include anche la dipendenza spin-isospin [21].

La dinamica nucleare può essere descritta attraverso il modello a particelle indipendenti, basato sulla sostituzione del potenziale NN con un campo medio; tale schema prende il nome di *modello a shell nucleare*. La descrizione più semplice del modello a particelle indipendenti è fornita dal *modello del gas di Fermi* (FG), dove il nucleo è visto come un gas degenere di neutroni e protoni legati fra loro.

Gli esperimenti di scattering da elettroni hanno mostrato una evidente correlazione nei nuclei, la cui descrizione richiede l'uso di potenziali NN più realistici, all'interno del formalismo del *Nuclear Many Body Theory*, (NMBT).

3.1 Interazione nucleone-nucleone

Nel modello che consideriamo per le interazioni nucleone-nucleone (NN), i nucleoni sono particelle puntiformi non relativistiche che occupano stati legati all'interno del nucleo ed interagiscono attraverso un potenziale.

Per stimare la distanza media tra i nucleoni all'interno del nucleo, è possibile considerare il nucleo come un gas di nucleoni e parametrizzare il raggio dei nuclei stabili come

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad (3.1)$$

dove A rappresenta il numero di massa e dai risultati di esperimenti di scattering da elettroni è possibile ricavare un valore di r_0 pari a $r_0 = 1.14$ fm.

I nuclei hanno la caratteristica di avere una densità praticamente costante e indipendente dal numero di massa, dunque i nucleoni al suo interno non possono addensarsi

idefinitamente. Tale osservazione fa sì che, per distanze sufficientemente piccole, l'interazione nucleone-nucleone debba essere repulsiva e può essere descritta da un potenziale non relativistico v dipendente dalla distanza \mathbf{r} intraparticellare

$$v(\mathbf{r}) > 0 ; \quad |\mathbf{r}| < r_c \quad (3.2)$$

dove r_c indica il raggio del core repulsivo. In Figura 3.1 si può osservare la densità di carica ρ_{ch} per differenti nuclei, opportunamente normalizzata al numero di protoni, in funzione del raggio nucleare; quello che si nota è che man mano che la distanza dal centro del nucleo diminuisce e diventano trascurabili gli effetti di superficie, la densità tende al valore costante $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ ed è indipendente dal numero di massa A .

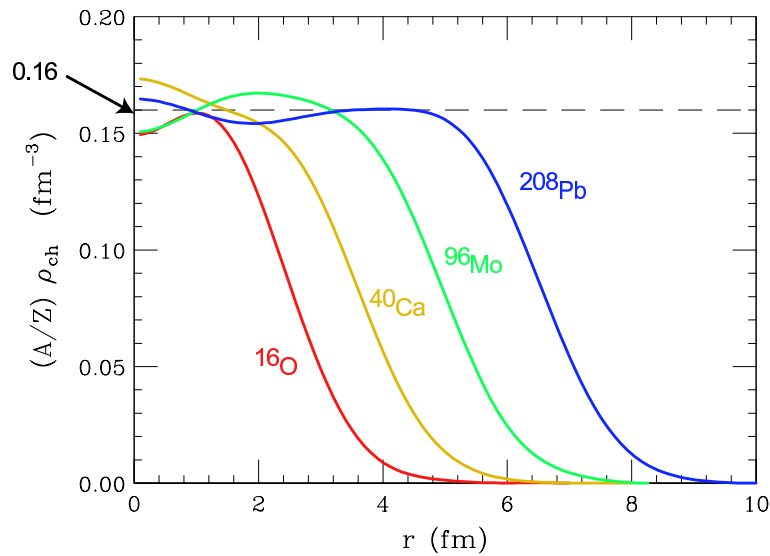


Figura 3.1. Andamento della densità nucleare in funzione della distanza dal centro del nucleo per differenti nuclei [21].

Dall'osservazione dell'energia di legame per nucleone è possibile ricavare un'altra caratteristica importante dell'interazione nucleone-nucleone, ovvero essa è approssimativamente la stessa per $A \gtrsim 20$

$$\frac{B}{A} \approx 8.5 \text{ MeV} , \quad (3.3)$$

con B energia di legame nucleare. Questo suggerisce che l'interazione abbia un range finito e diventi nulla per distanze maggiori di un determinato valore

$$v(\mathbf{r}) = 0 ; \quad |\mathbf{r}| > r_{\text{max}} . \quad (3.4)$$

Per di più, gli spettri energetici dei nuclei speculari ¹ mostrano che i livelli energetici con stessa parità e stesso momento angolare sono uguali a meno di piccole correzioni

¹I nuclei speculari sono coppie di nuclei che hanno lo stesso A e carica che differisce di una unità, ad esempio $^{15}_7\text{N}$ ($A = 15, Z = 7$) e $^{15}_8\text{O}$ ($A = 15, Z = 8$).

elettromagnetiche. Questo mostra come le interazioni NN non distinguono protoni da neutroni, ovvero le forze nucleari hanno simmetria di carica.

La simmetria di carica è la manifestazione di un concetto molto più generale della teoria, ovvero dell'invarianza sotto trasformazioni di spin isotopico [22]. Dal momento che la differenza di massa tra protone e neutrone è molto piccola, assumendo che possa essere trascurata, è possibile considerare protone e neutrone come due stati differenti della stessa particella, il nucleone. La densità di Lagrangiana di tale modello può essere scritta nella forma

$$\mathcal{L} = \bar{N}(x)(i\not{\partial} - m)N(x) \quad (3.5)$$

con

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

dove p ed n sono gli spinori a quattro componenti associati rispettivamente al protone ed al neutrone. La simmetria di isospin corrisponde all'invarianza della densità di Lagrangiana (3.5) sotto il gruppo $SU(2)$ delle trasformazioni di fase globali

$$U = e^{i\alpha_j\tau_j} \quad (3.7)$$

dove $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ è un vettore costante, mentre $\tau \equiv (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ sono le matrici di isospin². Dunque il nucleone può essere visto come un doppietto nello spazio di isospin; protone e neutrone corrispondono ad una proiezione di isospin $T_3 = 1/2$ e $T_3 = -1/2$, rispettivamente. Le coppie protone-protone e neutrone-neutrone hanno sempre lo stesso valore di isospin totale, ovvero $T = 1$, mentre le coppie protone-neutrone possono avere $T = 0$, stato di singoletto, oppure $T = 1$, stato di tripletto.

I dettagli dell'interazione NN possono essere compresi attraverso lo studio dei sistemi a due nucleoni. In natura esiste un solo stato legato di due nucleoni, il deuterio o deutone, costituito da un protone ed un neutrone con spin totale $S = 1$ ed isospin totale $T = 0$. Questo è dimostrazione del fatto che le forze nucleari dipendono dallo spin e dall'isospin.

Un'altra caratteristica dell'interazione nucleone-nucleone si ha dallo studio della distribuzione di carica elettrica del deuterio; esso esibisce un momento di quadruplo non nullo, il che implica che la distribuzione di carica non ha simmetria sferica. Dunque l'interazione nucleone-nucleone non è centrale, ovvero dipende sia dal modulo della distanza tra le particelle che dalla sua direzione.

3.2 Teoria di Yukawa

Yukawa, nel 1935, propose per primo la descrizione teorica dell'interazione nucleone-nucleone [23]. Egli ipotizzò che i nucleoni interagissero tramite lo scambio di una

²Le matrici di isospin τ_i sono definite come

$$\tau_i = \frac{\sigma_i}{2},$$

dove σ_i sono le matrici di Pauli.

particella, in analogia con le interazioni elettromagnetiche dove l'interazione è mediata dalla scambio di un fotone. Yukawa dimostrò inoltre che il range di interazione è legato alla massa m di tale particella, tramite la relazione

$$r \sim \frac{1}{m}; \quad (3.8)$$

ed essendo il range tipico delle interazioni nucleari $r = 1$ fm, quello che si trova è $m \sim 100$ MeV. Tale teoria ebbe successo anche grazie alla successiva scoperta nel 1947 del mesone π o pione, con $m_\pi \sim 140$ MeV. Il pione è una particella pseudo-scalare³ di spin zero che si presenta in tre autostati di carica π^0, π^+, π^- degeneri in massa a meno di piccole correzioni. Dunque il tripletto di pioni forma un tripletto di isospin $T = 1$, con lo stato di carica identificato dalla terza componente di isospin $T_3 = 1, 0, -1$.

La Lagrangiana di interazione pione-nucleone può essere scritta in modo tale che l'interazione nucleare conservi la parità, compatibilmente con le osservazioni sperimentali

$$\mathcal{L}_I = -ig\bar{N}\gamma_5(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})N \quad (3.9)$$

dove g è la costante di accoppiamento della teoria, $\boldsymbol{\tau}$ è l'isospin dei nucleoni ed infine $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ è il vettore del campo, le cui componenti sono definite nel modo seguente

$$\pi_1 = \frac{\pi^+ + \pi^-}{\sqrt{2}}, \quad \pi_2 = i\frac{\pi^+ - \pi^-}{\sqrt{2}}, \quad \pi_3 = \pi^0. \quad (3.10)$$

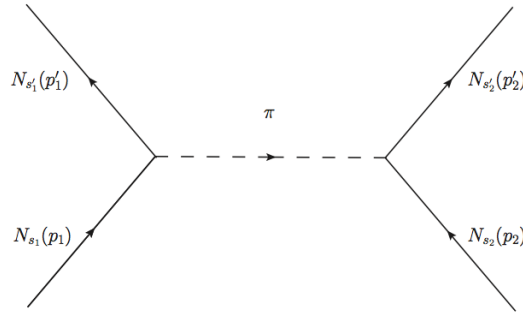


Figura 3.2. Schematizzazione dell'interazione NN tramite lo scambio di un pione

L'interazione tra due nucleoni con scambio di un pione è descritta da un diagramma di Feynman come in Figura 3.2; mentre la sua ampiezza di transizione, dalla (3.9), diventa

³Una particella pseudoscalare è tale che il suo campo cambi segno sotto parità

$$\mathbf{P}\pi(x^0, \vec{x})\mathbf{P}^\dagger = -\pi(x^0, -\vec{x}).$$

$$\langle f|M|i\rangle = -ig^2 \frac{\bar{u}_{s'_2}(p'_2)\gamma^5 u_{s_2}(p_2)\bar{u}_{s'_1}(p'_1)\gamma^5 u_{s_1}(p_1)}{k^2 - m_\pi^2} \langle \tau_1 \cdot \tau_2 \rangle, \quad (3.11)$$

con $k = p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2$, e $u_{\tilde{s}}(\tilde{p})$ spinore di Dirac che descrive un nucleone di impulso \tilde{p} e proiezione dello spin \tilde{s} , mentre abbiamo indicato con

$$\langle \tau_1 \cdot \tau_2 \rangle = \eta_2^\dagger \tau \eta_2 \eta_1^\dagger \tau \eta_1 \quad (3.12)$$

dove η_i sono spinori di Pauli a due componenti che descrivono lo stato di isospin della particella i -esima.

Lo scambio di un pione fornisce una buona approssimazione per descrivere l'interazione NN a lungo range ($|r| > 1.5$ fm). A medio e corto range devono essere presi in considerazione differenti processi, come lo scambio di due o più pioni (eventualmente anche interagenti) o di particelle più pesanti come i mesoni ρ ed ω (con $m_\rho = 770$ Mev ed $m_\omega = 782$ Mev). Inoltre, se la distanza relativa tra le particelle diminuisce ulteriormente ($\lesssim 0.5$ fm), ci si aspetta che i nucleoni perdano la loro identità ed inizino a sovrapporsi, come mostrato in Figura 3.3. In tale regime, l'interazione NN viene descritta attraverso i costituenti dei nucleoni (ad esempio quark e gluoni), nell'ambito della teoria delle interazioni forti.

Per la descrizione completa dei potenziali NN si fa ricorso a potenziali fenomenologici del tipo

$$v = v_\pi + v_R \quad (3.13)$$

dove v_π è il potenziale che descrive lo scambio di un pione, adatto alla descrizione di interazioni a lungo range, mentre v_R rappresenta il potenziale atto a descrivere le interazioni a medio e corto range (si veda l'Appendice C).

3.3 Teoria a molti corpi non relativistica

Nell'ambito della descrizione della funzione spettrale, una teoria che ci permette di descrivere la dinamica all'interno del nucleo è la teoria a molti corpi non relativistica (*Nuclear Many-Body Theory*, NMBT) in cui si considerano gli A nucleoni all'interno del nucleo come particelle puntiformi, la cui dinamica è descritta dall'Hamiltoniana non relativistica

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{j>i=1}^A v_{ij} + \sum_{k>j>i=1}^A V_{ijk} \quad (3.14)$$

dove \mathbf{p}_i rappresenta il momento dell' i -esimo nucleone costituente ed m è la sua massa; mentre v_{ij} , espresso dalla (3.13), e V_{ijk} rappresentano i potenziali di interazione a due e tre nucleoni rispettivamente.

Un approccio al problema nucleare a molti corpi è fornito dalla teoria delle perturbazioni in base correlata (*correlated basis function perturbation theory*, CBF) [24]. Tale teoria ha lo scopo di fornire una soluzione all'equazione di Schrödinger a molti corpi

$$\mathcal{H}\psi(1 \dots A) = E\psi(1 \dots A). \quad (3.15)$$

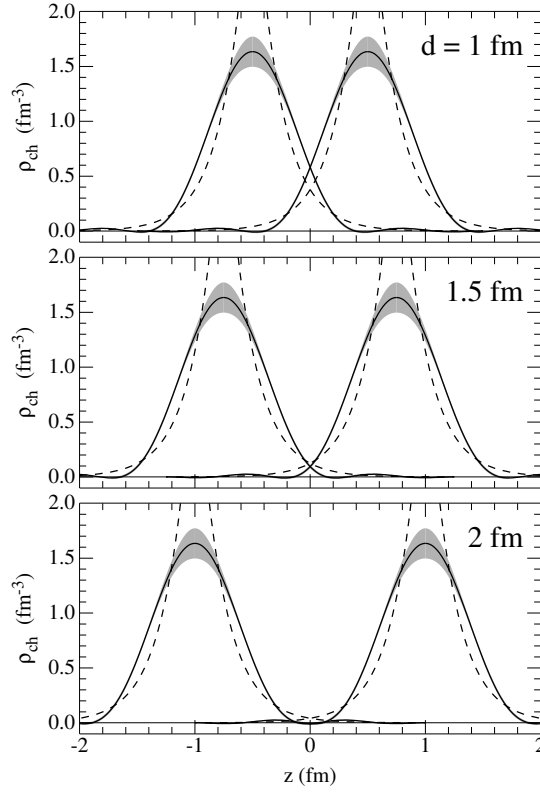


Figura 3.3. Densità di carica ρ_{ch} tra due nucleoni a tre differenti distanze relative d .

L'assunzione di tale modello è l'incorporare gli effetti non perturbativi, derivanti dal core repulsivo del potenziale, nelle funzioni d'onda di base definite come

$$|n\rangle = \frac{F|n_{FG}\rangle}{\langle n_{FG}|F^\dagger F|n_{FG}\rangle^{1/2}} \quad (3.16)$$

dove $|n_{FG}\rangle$ sono gli autostati del sistema non interagente, mentre l'operatore F introduce l'effetto delle interazioni ed è della forma

$$F = S \prod_{j>i=1}^A f_{ij} \quad (3.17)$$

dove S è l'operatore di simmetrizzazione e f_{ij} descrive il potenziale di interazione nucleone-nucleone ed è una funzione scalare che dipende dalla distanza delle particelle del sistema. Grazie alla definizione della base correlata, è possibile ridefinire l'hamiltoniana nel seguente modo

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (3.18)$$

ovvero divisa nella parte diagonale e non nella base correlata.

3.4 Modello del gas di Fermi

Nel modello del gas di Fermi, i neutroni e i protoni all'interno del nucleo vengono visti come sistemi indipendenti di nucleoni; l'analogia che si fa è con un gas di elettroni liberi, ovvero protoni e neutroni si muovono quasi liberamente all'interno del nucleo [25]. Il potenziale che ciascun nucleone risente è dato dalla sovrapposizione del potenziale generato dagli altri nucleoni. Assumendo che il potenziale abbia la forma di una buca, il numero di stati possibili per un nucleone in un volume V , nella regione cinematica dp , è dato da

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V . \quad (3.19)$$

Se consideriamo un nucleo nello stato fondamentale, ovvero a temperatura nulla, lo stato più basso sarà occupato fino ad un determinato valore del momento, l'impulso di Fermi p_F , dunque per il numero di stati si ha

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} . \quad (3.20)$$

Detti ora N e Z numero di neutroni e protoni rispettivamente, quello che si ha, considerando sempre le particelle nello stato fondamentale, è

$$N = \frac{V p_{F,n}^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (3.21)$$

$$Z = \frac{V p_{F,p}^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (3.22)$$

con $p_{F,n}$ e $p_{F,p}$ momento di Fermi del neutrone e del protone. Il volume nucleare V è dato da

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A \quad (3.23)$$

dove r_0 è definito nella (3.1). Nel caso di nuclei con $N = Z = A/2$ quello a cui si arriva è

$$p_F = p_{F,n} = p_{F,p} = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 250 \text{ MeV} , \quad (3.24)$$

dunque i nucleoni si muovono all'interno del nucleo liberamente con un momento molto alto.

Risulta possibile a questo punto ricavare l'energia degli stati occupati che hanno momento massimo pari a p_F , infatti risulta

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33 \text{ MeV} \quad (3.25)$$

con M massa del nucleone.

Dalla base del modello del gas di Fermi risulta possibile introdurre il modello a shell, che vedremo nel seguito, che fornisce una approssimazione migliore dal momento che prende in considerazione potenziali più realistici e gli effetti di interazione spin-orbita.

3.5 Modello a shell

Il modello a shell nucleare è basato sull'assunzione che i nucleoni all'interno del nucleo, si comportano come particelle indipendenti che risentono di un campo medio, dato dal potenziale prodotto dagli altri nucleoni. L'assunzione che faremo è che il campo medio che descrive il potenziale nucleare U_0 sia centrale. Il tipo di potenziali che più spesso si trovano in letteratura sono i potenziali di *Woods-Saxon* e *l'oscillatore armonico* in tre dimensioni al quale faremo riferimento.

Il potenziale centrale che andiamo a considerare ha la forma

$$U_0(r) = \frac{1}{2}M\omega r^2 \quad (3.26)$$

con M massa del nucleone, mentre ω è un parametro.

In tale schema, rispetto all'interazione nucleone-nucleone in generale, prendere in considerazione un campo medio equivale alla sostituzione del potenziale di interazione a due corpi con

$$\sum_{j>i=1}^A v_{ij} \rightarrow \sum_{i=1}^A U_i \quad (3.27)$$

dove il potenziale può essere scelto in modo tale che l'hamiltoniana della particella libera

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p^2}{2M} + U \quad (3.28)$$

risulti diagonalizzabile; infatti, dette ϕ_i le soluzioni dell'equazione di Schrödinger, ovvero tali che

$$\mathcal{H}_0|\phi_i\rangle = \varepsilon_i|\phi_i\rangle, \quad (3.29)$$

la funzione d'onda dello stato fondamentale assume la forma

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det \phi_i \quad (3.30)$$

dato dal determinante di Slater degli autostati di \mathcal{H}_0 . Quindi l'energia di tale stato sarà

$$E_0 = \sum_{i=1}^A \varepsilon_i. \quad (3.31)$$

Nel caso particolare di un potenziale armonico, l'equazione di Schrödinger che dobbiamo andare a risolvere è

$$[T + U_0(r)]\phi_{k,l,m_l}(\mathbf{r}) = E_{k,l,m_l}\phi_{k,l,m_l}(\mathbf{r}) \quad (3.32)$$

dove T è l'energia cinetica data in coordinate polari da

$$T = -\frac{1}{2M}\nabla^2 = -\frac{1}{2M}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r - \frac{\mathbf{l}^2}{r^2}\right) \quad (3.33)$$

dove k , l ed m_l sono i numeri quantici del momento angolare principale, del momento angolare orbitale e della sua proiezione rispettivamente. La funzione d'onda delle particelle, nel caso in cui il potenziale abbia simmetria sferica, può essere divisa in una componente radiale e una componente angolare ed assume la forma

$$\phi_{k,l,m_l}(\mathbf{r}) = R_{k,l}(r)Y_{m_l}^l(\hat{r}) \quad (3.34)$$

dove $R_{k,l}(r)$ è la funzione d'onda radiale ed $Y_{m_l}^l(\hat{r})$ sono le armoniche sferiche⁴. Per quanto riguarda lo spettro in energia, esso non dipende dal numero quantico magnetico, ed è dato da

$$E_{k,l} = \left(2k + l + \frac{3}{2}\right)\omega . \quad (3.35)$$

Se si vuole considerare anche l'effetto spin-orbita, è necessario aggiungere un termine di potenziale della forma

$$U_{SO} = -2\lambda \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \quad (3.36)$$

dove \mathbf{s} rappresenta lo spin del nucleone e λ è una costante. Il momento angolare totale $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ è conservato e la funzione d'onda assume la forma

$$\phi_\alpha(\mathbf{r}) = R_{k,l}(r)[Y_{m_l}^l(\hat{r}) \otimes \chi_{m_s}^s]_m^j \quad (3.37)$$

dove $\chi_{m_s}^s$ è la funzione d'onda di spin con s ed m_s numero quantico di spin e sua proiezione; mentre m è la proiezione del momento angolare totale j ed α rappresenta il set di numeri quantici $(j, m, k, l, m_l, s, m_s)$. Nella (3.37) è presente il prodotto di Clebsch-Gordan, definito come

$$[Y_{m_l}^l(\hat{r}) \otimes \chi_{m_s}^s]_m^j \equiv \sum_{m_l, m_s} \langle l, m_l; s, m_s | j, m \rangle Y_{m_l}^l(\hat{r}) \chi_{m_s}^s . \quad (3.38)$$

Per la scelta di $s = 1/2$ ed $j = l \pm 1/2$ si ottiene

$$E_{k,l,j} = \begin{cases} \left(2k + l + \frac{3}{2}\right)\omega - \lambda l , & j = l + \frac{1}{2} \\ \left(2k + l + \frac{3}{2}\right)\omega + \lambda(l + 1) , & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.39)$$

L'aggiunta del termine di potenziale dovuto agli effetti spin orbita riproduce un effetto osservato negli spettri nucleari: i nuclei con un determinato numero di protoni e/o neutroni (*numeri magici*⁵) risultano particolarmente stabili.

⁴Le armoniche sferiche sono autofunzioni degli operatori \mathbf{l} e l_z

$$\mathbf{l}Y_{m_l}^l(\hat{r}) = l(l+1)Y_{m_l}^l(\hat{r}) ,$$

$$l_z Y_{m_l}^l(\hat{r}) = m_l Y_{m_l}^l(\hat{r}) ;$$

sono inoltre funzioni ortonormali

$$\int Y_{m_l}^l(\hat{r}) Y_{m_l'}^{l'}(\hat{r}) d\Omega = \delta_{m_l, m_l'} \delta_{l, l'} .$$

⁵I nuclei che hanno un numero magico di neutroni (2, 8, 20, 28 ...), hanno bisogno di una energia molto elevata per estrarre un neutrone da esso.

Capitolo 4

Interazioni neutrino-nucleo

In questo Capitolo vogliamo studiare il processo

$$\nu_l(k) + A \rightarrow l^-(k') + X, \quad (4.1)$$

dove il neutrino con quadri-momento iniziale $k = (E_\nu, \mathbf{k})$ viene diffuso su una targhetta nucleare A , portando ad uno stato finale con un leptone con quadri-momento $k' = (E_l, \mathbf{k}')$ [13, 14]. La sezione d'urto differenziale può essere scritta in approssimazione di Born in forma analoga alla (2.4)

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_e} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^A. \quad (4.2)$$

Il tensore leptonic $L^{\mu\nu}$ è sempre quello della (2.5), mentre quello nucleare è dato da

$$W_{\mu\nu}^A = \sum_X \langle 0 | J_\mu^{\dagger A} | X \rangle \langle X | J_\nu^A | 0 \rangle \delta^{(4)}(p_0 + q - p_x). \quad (4.3)$$

In questo caso, rispetto alla trattazione precedente, si ha che, mentre il tensore leptonic rimane invariato, per lo studio della parte adronica è necessario fare alcune considerazioni in più, dato che stiamo considerando lo scattering su nucleo.

Nella definizione del tensore adronico sono coinvolti gli stati adronici iniziali e finali $|0\rangle, |X\rangle$ di quadri-momento rispettivamente p_0 e p_x ; inoltre si è indicato con $q = (\nu, \mathbf{q}) = (k - k')$ il quadri-momento trasferito e con J_μ^A la corrente nucleare.

Lo stato fondamentale del nucleo bersaglio si può descrivere nell'ambito della teoria a molti corpi non relativistica (REFERENZA). D'altra parte l'uso dell'approssimazione non relativistica per la descrizione degli stati finali e della corrente è giustificata solo a basso momento trasferito.

Un approccio che permette di ottenere risultati accurati per il calcolo di sezioni d'urto nucleari a momento trasferito elevato ($q \gtrsim 400 - 500$ MeV) è basato sull'approssimazione impulsiva (**IA**) fondata sull'ipotesi che per un momento trasferito \mathbf{q} grande abbastanza la targhetta nucleare è vista dalla sonda come un insieme di nucleoni individuali. Inoltre la particella prodotta nel vertice di interazione e il sistema residuo di $(A - 1)$ -nucleoni evolvono indipendentemente l'uno dall'altro e risulta dunque possibile trascurare gli effetti di interazione degli stati finali (*Final State Interaction*, FSI [26]). Questo porta alla possibilità di poter trascurare le correlazioni statistiche date dal principio di esclusione di Pauli e dai processi di

rescattering dovuti alle interazioni forti. Nel regime **IA** lo scattering su un target nucleare si riduce alla somma incoerente di processi elementari che coinvolgono un solo nucleone come riportato in Figura 4.1.

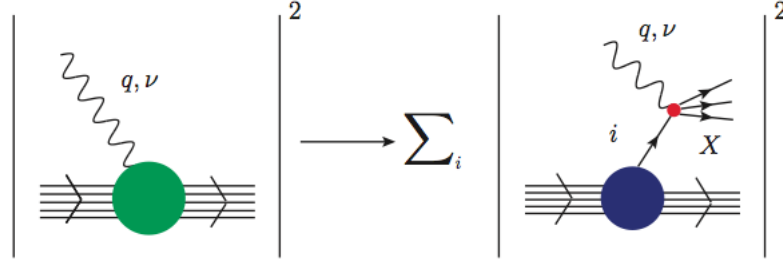


Figura 4.1. Rappresentazione dello schema **IA**. La sezione d'urto nucleare viene descritta dalla somma incoerente delle sezioni d'urto elementari dello scattering sui singoli nucleoni ed il sistema residuo di $(A - 1)$ -nucleoni agisce come spettatore.

In tale schema, la corrente nucleare può essere scritta come somma di correnti ad un sol corpo tale per cui

$$J_A^\mu \rightarrow \sum_i j_i^\mu, \quad (4.4)$$

mentre lo stato finale si riduce al prodotto diretto degli stati adronici prodotti nel vertice elettromagnetico con momento \mathbf{p}' e il sistema residuo di $(A - 1)$ -nucleoni con momento $\mathbf{p}_R = \mathbf{q} - \mathbf{p}'$, per cui

$$|X\rangle \rightarrow |x, \mathbf{p}'\rangle \otimes |R, \mathbf{p}_R\rangle \quad (4.5)$$

da cui possiamo riscrivere la sommatoria nella (4.3) come

$$\sum_X |X\rangle \langle X| \rightarrow \sum_x \int d^3 p' |x, \mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}', x| \sum_R d^3 p_R |R, \mathbf{p}_R\rangle \langle \mathbf{p}_R, R|. \quad (4.6)$$

Inserendo una ulteriore relazione di completezza degli stati di un nucleone di impulso \mathbf{p}

$$\int d^3 p |N, \mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}, N| = 1,$$

si ottiene

$$\langle 0 | J_A^\mu | X \rangle = \left(\frac{M}{\sqrt{\mathbf{p}_R^2 + M^2}} \right) \langle 0 | R, \mathbf{p}_R; N, -\mathbf{p}_R \rangle \sum_j \langle -\mathbf{p}_R, N | j_j^\mu | i, \mathbf{p}' \rangle \quad (4.7)$$

dove $\sqrt{\mathbf{p}_R^2 + M^2} = E_{\mathbf{p}_R}$, con M massa del nucleone¹. Quindi possiamo riscrivere il tensore adronico nella seguente forma

$$\begin{aligned}
W_A^{\mu\nu} &= \sum_X \langle 0 | J_A^{\mu\dagger} | X \rangle \langle X | J_A^\nu | 0 \rangle \delta^{(4)}(p_0 + q - p_x) \rightarrow \\
&\rightarrow \sum_x \sum_R \int d^3 p' d^3 p_R |\langle 0 | R, \mathbf{p}_R; N, -\mathbf{p}_R \rangle|^2 \times \\
&\quad \times \frac{M}{E_{p_R}} \sum_i \langle -\mathbf{p}_R, N | j_i^\mu | x, \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}', x | j_i^\nu | N, -\mathbf{p}_R \rangle \times \\
&\quad \times \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_R - \mathbf{p}') \delta(\nu + E_0 - E_R - E_i). \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Inoltre possiamo riscrivere la conservazione dell'energia nel seguente modo

$$\delta(\nu + E_0 - E_R - E_i) = \int dE \delta(E - M + E_0 - E_R) \delta(\nu - E + M - E_i) \tag{4.9}$$

e definiamo la funzione spettrale

$$P(\mathbf{p}, E) = \sum_R \left| \langle 0 | R, -\mathbf{p}; N, \mathbf{p} \rangle \right|^2 \delta(E - M + E_0 - E_R). \tag{4.10}$$

che esprime la probabilità di rimuovere dal nucleo bersaglio un nucleone di impulso \mathbf{p} lasciando il sistema residuo con energia di eccitazione E .

Questo vuol dire che il tensore adronico nucleare della (4.3) assume la forma

$$W_{\mu\nu}^A = \sum_i \int d^3 p dE \frac{M}{E_p} P(\mathbf{p}, E) w_{\mu\nu}^i \tag{4.11}$$

dove abbiamo definito

$$\begin{aligned}
w_{\mu\nu}^i &\equiv \sum_x \int d^3 p' \langle \mathbf{p}, N | j_i^\mu | x, \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}', x | j_i^\nu | N, \mathbf{p} \rangle \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\nu - E + M - E_i) = \\
&\tag{4.12} \\
&= \sum_x \langle \mathbf{p}, N | j_i^\mu | x, \mathbf{q} + \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{q} + \mathbf{p}, x | j_i^\nu | N, \mathbf{p} \rangle \delta(\tilde{\nu} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} - E_i)
\end{aligned}$$

che rappresenta il tensore delle interazioni elettromagnetiche dell' i -esimo nucleone libero. Inoltre, utilizzando la (4.9), abbiamo introdotto

$$\tilde{\nu} = E_i - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} = \nu + E_0 - E_R - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} = \nu - E + M - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}; \tag{4.13}$$

¹L'equazione deriva dal fatto che

$$\begin{aligned}
\langle 0 | J_A^\mu | X \rangle &\rightarrow \sum_i \langle 0 | j_i^\mu | i, \mathbf{p}' \rangle | R, \mathbf{p}_R \rangle = \sum_i \langle 0 | \int d^3 p | N, \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p}, N | j_i^\mu | R, \mathbf{p}_R \rangle | i, \mathbf{p}' \rangle = \\
&= \sum_i \langle 0 | R, \mathbf{p}_R \rangle | N, -\mathbf{p}_R \rangle \langle -\mathbf{p}_R | j_i^\mu | i, \mathbf{p}' \rangle.
\end{aligned}$$

quindi l'effetto del legame nucleare sul nucleone diffuso è quello di considerare il quadri-impulso riscaldato

$$q \equiv (\nu, \mathbf{q}) \rightarrow \tilde{q} \equiv (\tilde{\nu}, \mathbf{q}) ,$$

ovvero si tiene in considerazione che parte dell'energia trasferita durante il processo di scattering diventa energia di eccitazione E del sistema e il tensore adronico diventa funzione di $\tilde{p} \equiv (E_p, \mathbf{p})$, con $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$, e \tilde{q} . La forma che si ottiene dunque per il tensore adronico nucleare è la seguente

$$W_A^{\mu\nu} = \sum_i \int d^3p \, dE \, P(\mathbf{p}, E) w_i^{\mu\nu}(\tilde{q}, \tilde{p}) \frac{M}{E_p}. \quad (4.14)$$

Nell'ambito dell'approssimazione impulsiva, abbiamo ricondotto il tensore adronico che compare nell'interazione neutrino-nucleo a quello che compare nell'interazione neutrino-nucleone, a patto di considerare l'impulso trasferito riscaldato \tilde{q} e di effettuare un'integrazione su impulso ed energia del nucleone, con peso dato dalla funzione spettrale che contiene tutta l'informazione della dinamica all'interno del nucleo².

Dunque nello schema **IA** possiamo riscrivere la sezione d'urto come

$$\frac{d^2\sigma_{IA}}{d\Omega dE_l} = \int d^3p \, dE \, P(\mathbf{p}, E) \frac{M}{E_p} \frac{d^2\sigma_e}{d\Omega dE_l} \quad (4.15)$$

con

$$\frac{d^2\sigma_e}{d\Omega dE_l} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 |\mathbf{k}'|}{16\pi^2 |\mathbf{k}|} L_{\mu\nu} w_i^{\mu\nu} , \quad (4.16)$$

che indica la sezione d'urto elementare neutrino su nucleone ricavata nella sezione precedente.

Ora vogliamo riscrivere il tensore adronico in termini delle funzioni di struttura come visto in precedenza, ma considerando gli impulsi riscaldati \tilde{p} e \tilde{q}

$$w_i^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} W_1 + \tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu \frac{W_2}{M^2} - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{p}_\alpha \tilde{q}_\beta \frac{W_3}{M^2} + \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \frac{W_4}{M^2} + (\tilde{p}^\mu \tilde{q}^\nu + \tilde{p}^\nu \tilde{q}^\mu) \frac{W_5}{M^2} . \quad (4.17)$$

Se andiamo ad eseguire la contrazione col tensore leptonic, omettendo direttamente i termini nulli per contrazioni tra pezzi simmetrici e antisimmetrici otteniamo³

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} w_i^{\mu\nu} &= \quad (4.18) \\ &= 8[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k'^\beta k^\alpha] \times \\ &\times \left[-g^{\mu\nu} W_1 + \tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu \frac{W_2}{M^2} - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{p}_\rho \tilde{q}_\sigma \frac{W_3}{M^2} + \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \frac{W_4}{M^2} + (\tilde{p}^\mu \tilde{q}^\nu + \tilde{p}^\nu \tilde{q}^\mu) \frac{W_5}{M^2} \right] = \\ &= 8 \left\{ W_1 [2(kk')] + \frac{W_2}{M^2} [2(\tilde{p}k)(\tilde{p}k') - m^2(kk')] + \frac{W_3}{M^2} [\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k'^\beta k^\alpha \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{p}_\rho \tilde{q}_\sigma] + \right. \end{aligned}$$

²Per il calcolo degli estremi di integrazione, fissati dalla cinematica del problema, della (4.14) si veda l'Appendice D.

³Ricordando anche che $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 2!(\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho)$.

$$+ \frac{W_4}{M^2} [2(\tilde{q}k)(\tilde{q}k') - \tilde{q}^2(kk')] + \frac{W_5}{M^2} [2(\tilde{p}k')(\tilde{q}k) + 2(\tilde{p}k)(\tilde{p}k')] \Big\}$$

che può essere riscritta nella forma

$$L_{\mu\nu} w_i^{\mu\nu} = 16 \sum_i w_i \left(\frac{A_i}{M^2} \right), \quad (4.19)$$

dove le funzioni A_i contengono i fattori cinematici

$$A_1 = M^2(kk') \quad (4.20)$$

$$A_2 = (\tilde{p}k)(\tilde{p}k') - \frac{A_1}{M^2} \quad (4.21)$$

$$A_3 = (k\tilde{p})(k'\tilde{q}) - (k\tilde{q})(k'\tilde{p}) \quad (4.22)$$

$$A_4 = (\tilde{q}k)(\tilde{q}k') - \frac{\tilde{q}^2}{2} \frac{A_1}{M^2} \quad (4.23)$$

$$A_5 = (\tilde{p}k')(\tilde{q}k) + (\tilde{p}k)(\tilde{q}k') - \tilde{p}\tilde{q} \frac{A_1}{M^2}. \quad (4.24)$$

Si può notare che, grazie alla simmetria del problema, alcuni prodotti scalari si semplificano considerevolmente. Infatti, usando un sistema di riferimento nel quale il vettore \mathbf{q} si trova lungo l'asse z e lo scattering ha luogo sul piano xz , si può esprimere il prodotto scalare in termini delle componenti dei momenti su tale piano e usando le simmetrie del problema si possono eliminare i termini lineari in p_x .

Per quanto riguarda le funzioni di struttura $W_i^{\mu\nu}$, nel caso di scattering quasi elastico, esse corrispondono a quelle ricavate nella sezione precedente (2.33-2.37).

Nel caso di scattering profondamente anelastico che coinvolgono un neutrino, abbiamo che $q^\mu W_{\mu\nu} \neq 0$ poiché la corrente debole non è più conservata. Ripartendo dalla definizione generale del tensore adronico (2.7), in questo caso si ha che W_6 potrebbe contribuire in principio, e la conservazione della corrente non è esatta per la corrente assiale vettoriale così che ci sono termini residui derivanti da W_4 e W_5 . Tuttavia tali contributi sono tutti trascurabili essendo proporzionali alla massa del leptone [27, 28]. Avremo dunque che il numero di funzioni di struttura indipendenti tra di loro sono tre e l'espressione formale in cui si può scrivere il tensore adronico è

$$W^{\mu\nu} = -W_1 \left(g^{\mu\nu} + \frac{pq}{Q^2} \right) + \frac{W_2}{m^2} \left(p^\mu + \frac{pq}{Q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu + \frac{pq}{Q^2} q^\nu \right) - i \frac{W_3}{m^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta. \quad (4.25)$$

Per ricavare la forma di queste funzioni di struttura abbiamo utilizzato il modello ricavato da Bodek *et al.* [29, 30]. La parametrizzazione usata include gli effetti di violazione di scaling in termini di una nuova variabile di scaling modificata ω_ω . La funzione di struttura W_2 è descritta da

$$\nu W_2(\nu, Q^2) = B(W, Q^2) g\left(\frac{1}{\omega_\omega}\right) \frac{\omega_\omega}{\omega} \quad (4.26)$$

$$g\left(\frac{1}{\omega_\omega}\right) = \sum_{n=3}^{n=7} C_n \left(1 - \frac{1}{\omega_\omega}\right)^n \quad (4.27)$$

$$\omega_\omega = \frac{2m\nu + a^2}{Q^2 + b^2}. \quad (4.28)$$

La funzione modulante $B(W, Q^2)$ contiene 12 parametri che rappresentano le masse, larghezze e ampiezze della sezione d'urto per l'elettroproduzione delle più importanti risonanze nucleari(?), otto parametri che rappresentano la dipendenza dalla massa invariante W , per contributi non risonanti a basso W e la threshold per la produzione di un singolo pione. La funzione $B(W, Q^2)$ è vicina all'unità nelle regioni di scattering profondamente anelastico ($W > 2$ GeV). Per quanto riguarda la nuova variabile di scaling, i parametri che compaiono nella (4.28) sono $a^2 = 1.642$ GeV² e $b^2 = 0.376$ GeV², sia per il protone che per il neutrone [31].

Nel caso di particelle a spin 1/2 si ha che

$$\nu W_2 = 2MxW_1 \quad (4.29)$$

inoltre nel modello a partoni le funzioni di struttura possono essere espresse in termini delle distribuioni di quark e antiquark

$$\nu W_2 = Q + \bar{Q} \quad (4.30)$$

$$x\nu W_3 = Q - \bar{Q} \quad (4.31)$$

quindi in definitiva le funzioni di struttura indipendenti tra di loro si riducono a due. L'espressione che si trova per la distribuzione di antiquark è

$$\bar{Q}_\nu(x_\omega, Q^2) = \frac{18}{5} \frac{1}{2} \left(1 - x_\omega\right)^7 B(W, Q^2) g(0) \frac{\omega_\omega}{\omega} \quad (4.32)$$

con $x_\omega = 1/\omega_\omega$.

L'andamento delle funzioni di struttura, ricavate con la parametrizzazione appena introdotta, sono riportate in Figura 4.2.

4.1 La funzione spettrale

Come visto in precedenza nel Capitolo 3, la dinamica nucleare, nell'ambito della teoria NMBT, è descritta dall'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A \frac{\mathbf{p}_i^2}{2M} + \sum_{j>i=1}^A v_{ij} + \sum_{k>j>i=1}^A V_{ijk}, \quad (4.33)$$

dove v_{ij} rappresenta il potenziale di Yukawa per grandi distanze, mentre V_{ijk} è il potenziale di interazione per la descrizione degli stati di tre nucleoni. La NMBT

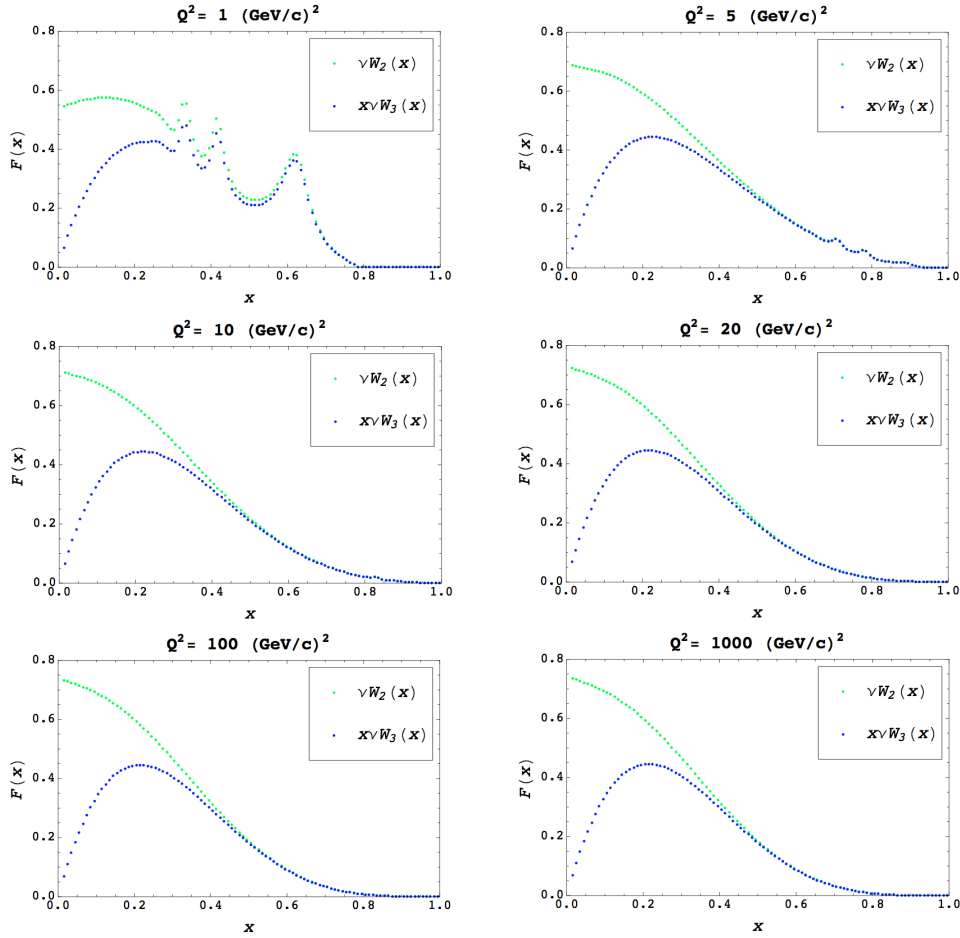


Figura 4.2. Andamento delle funzioni di struttura $\nu W_2(x)$, $5/18x\nu W_3(x)$, per differenti valori di Q^2 , ottenute con la parametrizzazione data dalle equazioni (4.26-4.28).

permette di descrivere la funzione spettrale in maniera accurata nel caso in cui il numero di nucleoni sia $A < 4$ oppure per materia nucleare, ovvero un sistema uniforme di A nucleoni ($A \gg 1$), con numero eguale di protoni e neutroni soggetti solo alle forze forti.

Nel calcolo della funzione spettrale di nuclei con numero di massa $A > 4$, è necessario introdurre delle approssimazioni.

L'approssimazione che considereremo è trascurare le interazioni tra i nucleoni, trattandoli come un gas degenere di fermioni (*Fermi gas model*, FG). In tale regime la funzione spettrale $P(\mathbf{p}, E)$ è diversa da zero solo per impulsi minori dell'impulso di Fermi p_F e per energie minori dell'energia di Fermi E_F .

Nell'ambito del *Fermi Gas Model* il nucleo è descritto come un gas degenere di nucleoni non interagenti ed in tale schema la funzione spettrale assume la forma [32]

$$P(\mathbf{p}, E) = \left(\frac{6\pi^2 A}{p_F^3} \right) \Theta(p_F - \mathbf{p}) \delta(E_p - E_B - E) \quad (4.34)$$

con p_F impulso di Fermi, $E_p = \sqrt{M^2 + |\mathbf{p}|^2}$ energia del nucleone libero con impulso \mathbf{p} ed E_B energia di legame. Il modello del gas di Fermi però non fornisce sempre delle descrizioni accurate poiché esso non risulta adeguato alla descrizione delle interazioni tra i nucleoni che hanno come risultato la popolazione di stati con impulso al di fuori della sfera di Fermi. La conseguenza a tali processi è che il numero di nucleoni negli stati con $E \ll E_F$ e $|\mathbf{p}| \ll p_F$ diminuisce, e compaiono invece i contributi alle coppie nucleone-nucleone fortemente correlate con $E \gg E_F$ e con $|\mathbf{p}| \gg p_F$.

Per poter stimare la scala di energie delle interazioni tra nucleoni, si può considerare lo scattering su un nucleone appartenente ad una coppia di nucleoni correlati con momenti \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 , maggiori rispetto all'impulso di Fermi, ($p_F \sim 250$ MeV). Nel sistema di riferimento del nucleo a riposo, le restanti $A - 1$ particelle hanno un momento pari a $\mathbf{k}_1 \sim -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ essendo l'impulso totale del sistema di $A - 2$ nucleoni trascurabile. Dunque l'espulsione di un nucleone con grande impulso \mathbf{k} , lascia il sistema residuo con un nucleone nello spettro continuo, e richiede una energia

$$E \sim E_{soglia} + \frac{\mathbf{k}^2}{2m}, \quad (4.35)$$

dove E_{soglia} è l'energia minima necessaria per rimuovere una coppia di nucleoni, da confrontare con le energie tipiche predette dal modello a shell del nucleo ($E_{shell} \sim 30$ MeV). L'equazione (4.35) mostra come un'alta energia di rimozione ed un alto momento del nucleone sono fortemente correlate.

L'approssimazione utilizzata nel seguito è la *Local Density Approximation* (LDA); essa consiste nel ricavare la funzione spettrale come somma di due differenti contributi, uno dovuto al campo medio generato dai nucleoni e l'altro che prende in considerazione le correlazioni dinamiche. Il contributo dovuto al campo medio è stato misurato negli esperimenti di diffusione di elettrone su nucleo, dove il nucleone emesso viene rilevato in coincidenza con l'elettrone diffuso. La funzione spettrale estratta dai dati assume la forma

$$P_{MF}(\mathbf{p}, E) = \sum_n Z_n |\phi_n(\mathbf{p})|^2 F_n(E - E_n) \quad (4.36)$$

dove $\phi_n(\mathbf{p})$ rappresenta la funzione d'onda nello spazio degli impulsi e descrive un nucleone nello stato n , Z_n è la costante di rinormalizzazione che tiene conto delle interazioni non incluse nel calcolo del campo medio ed infine $F_n(E - E_n)$ descrive l'andamento dell'energia dell' n -esimo stato. La (4.36) ha la caratteristica che per $Z_n \rightarrow 1$, ovvero in assenza di correlazioni NN, esprime la funzione spettrale totale e si ha $F_n(E - E_n) \rightarrow \delta(E - E_n)$, e diventa nulla per $|\mathbf{p}| \gg p_F$ e $E \gg E_F$.

Per quanto riguarda il contributo dovuto alle correlazioni dinamiche NN, esso assume la forma

$$P_{corr}(\mathbf{p}, E) = \int d^3r \rho_A(\mathbf{r}) P_{corr}^{MN}(\mathbf{p}, E; \rho = \rho_A(\mathbf{r})) \quad (4.37)$$

dove $\rho_A(\mathbf{r})$ è la distribuzione di densità nucleare, $P_{corr}^{MN}(\mathbf{p}, E; \rho_A(\mathbf{r}))$ è la parte di correlazione della funzione spettrale per materia nucleare a densità costante $\rho = \rho_A$. Dunque nello schema LDA, la funzione spettrale assume la forma

$$P_{LDA}(\mathbf{p}, E) = P_{MF}(\mathbf{p}, E) + P_{corr}(\mathbf{p}, E) \quad (4.38)$$

con

$$\int d^3p dE P_{LDA}(\mathbf{p}, E) = 1 . \quad (4.39)$$

Lo schema LDA è basato sull'ipotesi fondamentale che le forze a corto raggio fra i nucleoni non risentono di effetti di superficie dovuti alla struttura a shell del nucleo. La validità di questa assunzione è supportato da risultati teorici sulla distribuzione di momento del nucleone data da

$$n(\mathbf{p}) = \int dE P(\mathbf{p}, E) \quad (4.40)$$

il cui andamento è riportato in Figura 4.3.

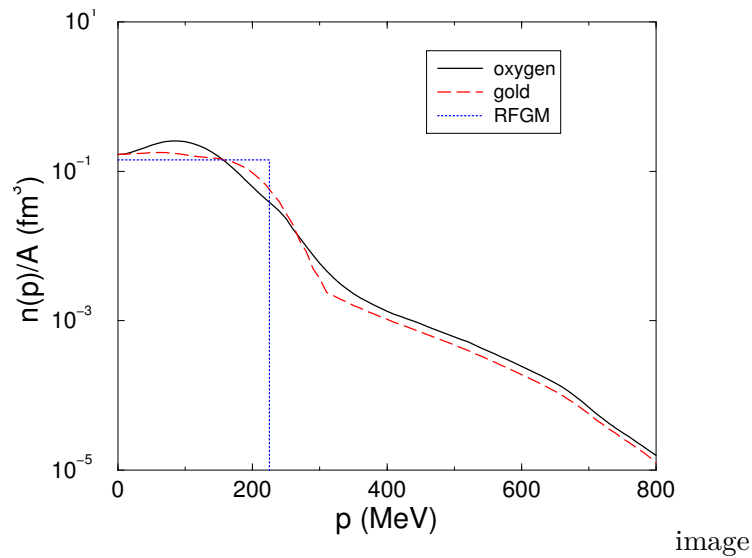


Figura 4.3. In Figura è riportato l'andamento della distribuzione del momento dei nucleoni nello stato fondamentale dell'ossigeno (linea continua) e dell'oro (linea tratteggiata). La funzione a gradino corrisponde alla funzione di distribuzione di Fermi con $p_F = 225$ MeV ed energia di legame $E = 25$ MeV.

In questo modo è possibile descrivere la funzione spettrale ottenuta in precedenza nella (4.10), che esprime la probabilità di rimuovere un nucleone dal target nucleare, lasciando il sistema residuo con una energia $E_R = E_0 - M + E$.

Per completezza si vuole anche sottolineare che la funzione spettrale (4.10), in generale, a seconda della natura delle particelle bersaglio può essere scritta

$$P_N(\mathbf{p}, E) = \sum_R \left| \langle 0 | R, -\mathbf{p}; N \mathbf{p} \rangle \right|^2 \delta(E - m + E_0 - E_R) \quad (4.41)$$

con $N = p, n$ a seconda che si consideri un protone o un neutrone rispettivamente⁴. Fatta questa premessa, sempre considerando lo schema LDA, in generale dovremmo riscrivere la distribuzione del momento del nucleone nella forma

⁴In tal caso il tensore adronico nucleare della (4.14) verrebbe riscritto nella forma

$$n(\mathbf{p}) = \int dE [ZP_p(\mathbf{p}, E) + (A - Z)P_n(\mathbf{p}, E)] . \quad (4.42)$$

Nel caso particolare in cui il numero di protoni coincide con il numero di neutroni ($Z = A/2$), fare l'assunzione che $P_p(\mathbf{p}, E) = P_n(\mathbf{p}, E)$, non è problematico, essendo l'errore che si commette piccolo data la trattazione di un atomo isoscalare. In definitiva quello che ci si trova a calcolare in $W_A^{\mu\nu}$ non è altro che la media tra l' i -esima funzione di struttura del neutrone e quella del protone.

Per completezza della trattazione, vogliamo mostrare come la scelta di un determinato modello per la descrizione della funzione spettrale influisca sulla predizione dell'andamento della sezione d'urto. I differenti andamenti, a seconda del processo considerato, sono riportati nelle Figure 4.4 e 4.5.

Come si può notare dalle figure sopra citate, gli andamenti delle sezioni d'urto, qualsiasi sia il processo preso in considerazione, presentano un andamento differente a seconda che si consideri la funzione spettrale nell'ambito del Fermi Gas Model o nell'approssimazione LDA.

Più precisamente, si nota che nel modello FG le sezioni d'urto risultino sovrastimate rispetto al modello LDA. Da un punto di vista qualitativo, è possibile anche notare che la differenza tra le sezioni d'urto per i singoli processi, quali lo scattering quasi elastico, produzione di risonanze e scattering profondamente anelastico, risulta più marcata nelle zone in cui il processo preso in esame è dominante.

$$W_A^{\mu\nu} = \int d^3p dE \frac{M}{E_p} \left[ZP_p(\mathbf{p}, E)W_p^{\mu\nu} + (A - Z)P_n(\mathbf{p}, E)W_n^{\mu\nu} \right]$$

con A e Z numero di massa della targhetta e numero di protoni rispettivamente.

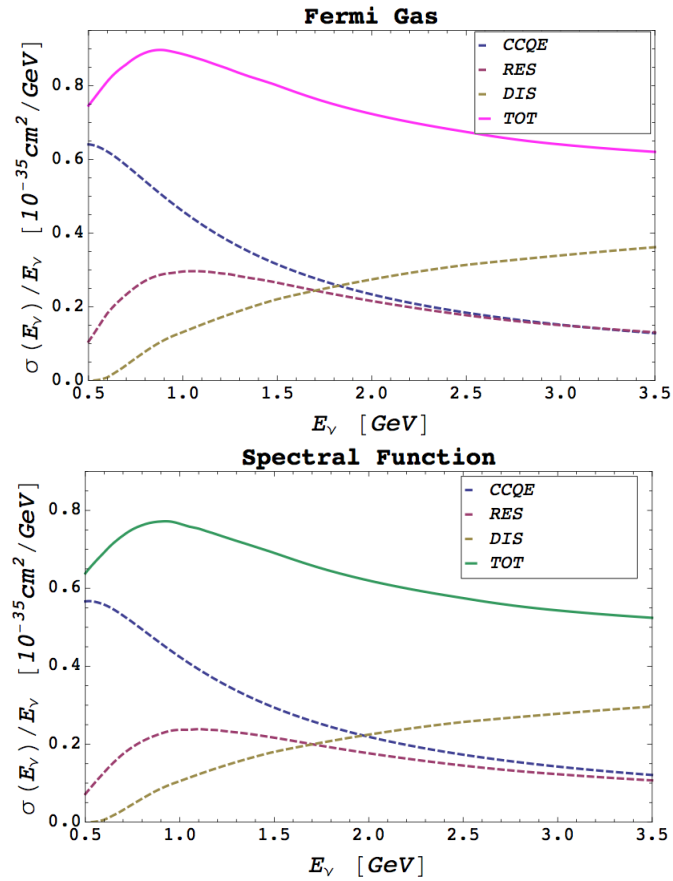


Figura 4.4. In Figura sono riportati gli andamenti dei singoli processi, ovvero diffusione quasi elastica (CCQE), produzione di risonanze (RES) e scattering profondamente anelastico (DIS), e la loro somma (TOT), per ottenere la sezione d'urto totale. I due grafici inoltre sono ottenuti considerando la funzione spettrale nel Fermi Gas Model e secondo lo schema LDA, rispettivamente.

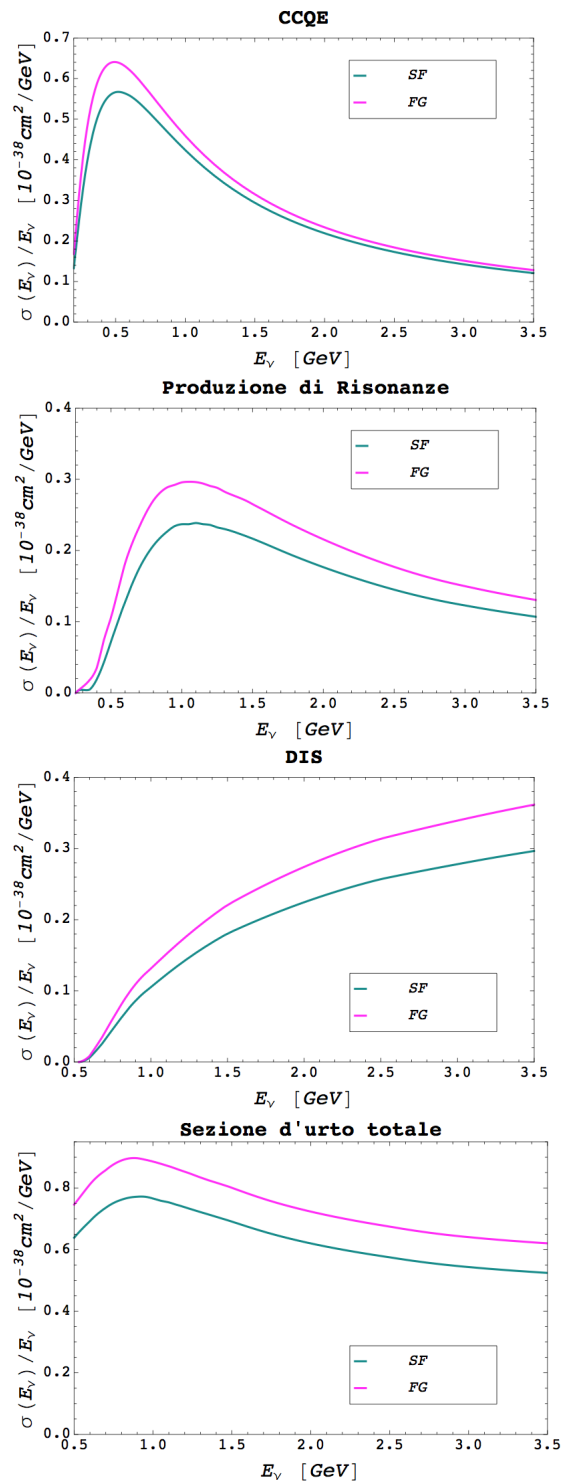


Figura 4.5. In Figura vengono mostrati i differenti andamenti della sezione d'urto in corrente carica a seconda del processo: quasi elastico, produzione di risonanze, scattering profondamente anelastico e sezione d'urto totale. Si vuole mostrare come cambia l'andamento dei diversi processi a seconda del modello adottato per descrivere la funzione spettrale, a seconda che si usi il modello del Gas di Fermi (FG) in verde oppure lo schema LDA (SF), in viola.

Capitolo 5

Applicazioni

Negli ultimi due decenni, gli esperimenti sui neutrini hanno mostrato che essi hanno massa e che oscillano. Gli esperimenti sull'oscillazione dei neutrini possono essere divisi in due differenti tipologie:

- *Esperimenti in Appearance*, in cui si misurano le transizioni tra differenti sapori. Quando lo stato finale che si sta cercando non è presente nel fascio iniziale, è possibile avere un basso background. In tal caso risulta possibile avere una maggiore sensibilità a piccoli angoli di mixing;
- *Esperimenti in Disappearance*, in cui si misura la probabilità di sopravvivenza di un determinato sapore di neutrino, contando il numero di interazioni e comparandolo con il numero atteso. In tale tipo di esperimenti si ha alta fluttuazione statistica nel conteggio degli eventi, dunque risulta molto difficile il conteggio per un basso numero di eventi. In questo caso risulta molto più difficile, rispetto al caso precedente, la misurazione di piccoli angoli di mixing.

Le oscillazioni dei neutrini derivano dal fatto che i neutrini con sapore definito, prodotti nei decadimenti dei mesoni π e K , non hanno massa specifica, ma sono combinazioni di tre differenti autostati di massa, come abbiamo visto nel Capitolo 1. La probabilità di oscillazione è funzione di tre angoli di mixing, una fase e due differenze di massa al quadrato. I neutrini che provengono dal sole sono neutrini di tipo elettronico ed oscillano in neutrini di tipo μ e di tipo τ , e sono caratterizzati da un angolo di mixing θ_{12} . I neutrini di tipo μ prodotti dai raggi cosmici nell'atmosfera terrestre, oscillano in neutrini di tipo τ , e sono caratterizzati da un angolo di mixing θ_{23} . Esiste un terzo tipo di oscillazione, ovvero da neutrino muonico ad un neutrino elettronico, caratterizzata da un angolo di mescolamento θ_{13} , la cui misura è stata effettuata di recente. Il fatto che $\theta_{13} \neq 0$, apre nuove prospettive relativamente allo studio della fase di violazione di CP, che considereremo pari a $\delta_{CP} = \pi/2$ ¹. Come vedremo nel seguito, nell'espressione della probabilità di oscillazione, sarà necessario specificare i parametri di oscillazione, i cui valori scelti per la nostra simulazione sono riportati in Tabella 5.1.

¹Porre $\delta_{CP} = \pi/2$ equivale a considerare una massima violazione di CP.

Parametro	Valore
$\sin^2 \theta_{12}/10^{-1}$	3.07
$\sin^2 \theta_{13}/10^{-2}$	2.41
$\sin^2 \theta_{23}/10^{-1}$	3.86
$\Delta m_{12}^2/10^{-5} \text{ eV}^2$	7.54
$\Delta m_{13}^2/10^{-3} \text{ eV}^2$	2.43
δ_{CP}	1.57

Tabella 5.1. Tabella dei valori usati per i parametri che rientrano nella descrizione della probabilità di oscillazione dei neutrini [38]. La fase δ_{CP} è stata scelta in modo tale da avere massima violazione di CP.

Nella sezione precedente abbiamo ricavato le sezioni d'urto descritte nell'ambito di due differenti modelli: il Fermi Gas Model e la Spectral Function. Quello che ci proponiamo di fare in questo Capitolo è il confronto di tali risultati nella simulazione della rate di eventi attesi in un particolare esperimento: l'esperimento NO ν A.

5.1 L'esperimento NO ν A

L'esperimento NO ν A (*NuMI Off-Axis ν_e Appearance Experiment*) ha come scopo principale lo studio di una particolare categoria di oscillazioni di neutrino: l'oscillazione da un neutrino di tipo muonico ad un neutrino elettronico, caratterizzate dall'angolo di mixing θ_{13} . Il fascio di neutrini NuMI (*Neutrinos at the Main Injector*) viene generato dalla collisione di protoni da 120 GeV su un target di grafite, da cui vengono prodotte le particelle π e K che nel loro decadimento producono muoni e neutrini muonici [33].

La caratteristica principale di NO ν A è che si tratta di un esperimento *Off-Axis*. In questa classe di esperimenti il detector è posto, rispetto all'asse principale del fascio, fuori asse di un piccolo angolo. Tale tipo di configurazione permette al fascio di neutrini, che arriva al rivelatore posto fuori asse, di essere il più possibile monocromatico. Infatti le particelle π e K decadono isotropicamente nel loro centro di massa ed il risultato è uno spettro in energia per il fascio di neutrini relativamente ampio. Consideriamo ad esempio un neutrino muonico derivante dal decadimento del pione

$$\pi^+(p_\pi) \longrightarrow \mu^+(p_\mu) + \nu_\mu(p_\nu) ; \quad (5.1)$$

la conservazione dell'energia e del momento nel sistema del pione a riposo, che corrisponde al sistema del centro di massa del decadimento, implica che l'energia e il momento del neutrino siano dati da

$$E_{cm} = p_{cm} = \frac{m_\pi}{2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right) \simeq 29.79 \text{ MeV} , \quad (5.2)$$

avendo trascurato la massa del neutrino. Nel sistema di riferimento del laboratorio il pione, altamente energetico, si muove lungo l'asse z , con velocità $v = p_\pi/E_\pi \simeq 1$,

ed ha un boost di Lorentz $\gamma = (1 - v)^{-1/2} = E_\pi/m_\pi \gg 1$. Dunque l'energia del neutrino E_ν e la sua componente del momento lungo l'asse z , sono rispettivamente

$$E_\nu = \gamma(E_{cm} + vp_{cm}^z) \quad (5.3)$$

$$p^z = \gamma(vE_{cm} + p_{cm}^z) \quad (5.4)$$

dove p_{cm}^z è la componente del momento nel sistema del centro di massa lungo l'asse z . Da queste è possibile ricavare l'energia del neutrino nel sistema del laboratorio, con θ angolo al quale è disposto il rivelatore rispetto alla direzione di volo del pione

$$E_\nu = \frac{E_{cm}}{\gamma(1 - v \cos \theta)} \simeq \frac{\gamma(1 + v)}{1 + \gamma^2 \theta^2 v(1 + v)/2} E_{cm} \simeq \frac{2\gamma}{1 + \gamma^2 \theta^2}, \quad (5.5)$$

dove si è usata l'approssimazione $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$ e $v \simeq 1$. Dunque dalla (5.2) e dalla (5.5) si ricava

$$E_\nu \simeq \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right) \frac{E_\pi}{1 + \gamma^2 \theta^2}. \quad (5.6)$$

Quello che si nota dalla (5.6) è che per un detector in asse con il fascio di pioni ($\theta = 0$), l'energia del neutrino è direttamente proporzionale all'energia del pione. In tale configurazione si ha che il flusso di neutrini è molto intenso per le differenti energie dei mesoni; tuttavia c'è una relazione lineare tra le energie del neutrino e quelle dei mesoni.

La dipendenza dell'energia del neutrino E_ν dall'energia del pione E_π è riportata in Figura 5.1; si nota che il maggior vantaggio offerto dalla configurazione Off-Axis è che, per determinati angoli e per un ampio range in energia del pione, l'energia del neutrino assume all'incirca lo stesso valore. Dunque tale relazione tra l'energia del neutrino e l'angolo Off-Axis, può essere utilizzata per avere un fascio di neutrini il più monocromatico possibile. L'energia del fascio di neutrini può essere scelta posizionando in maniera opportuna l'angolo al quale posizionare il detector. Inoltre si ha che il fascio di neutrini proviene per lo più dai decadimenti del pione; infatti il decadimento delle particelle K produce neutrini ad angoli significativamente maggiori. Dunque si ha che la predizione dello spettro sia poco sensibile alla conoscenza del rapporto di produzione K/π .

L'esperimento NO ν A utilizza due differenti detector: un *Near Detector* situato nelle vicinanze del Fermilab e tale che le sue caratteristiche principali siano le stesse del *Far Detector*. La funzione principale del Near Detector è quella di predire la rate attesa di eventi e il loro spettro in energia nel Far Detector in assenza di oscillazioni. La differenza di eventi che si osservano nei due detector può essere attribuita alle oscillazioni dei neutrini.

Il Far Detector è costituito da circa 24000 tn di olio minerale a base di liquido scintillante che rappresenta il rivelatore attivo e da 6000 tn di estrusioni di PVC. Il liquido scintillante che riempie le estrusioni è disposto in 1984 piani quadrati di lato 15.7 m e spessi 6.6 cm. La lunghezza totale del detector è di 132 m. Nel complesso, il Far Detector è costituito da circa 344.000 celle di PVC riempite di liquido scintillante, ciascuna di dimensioni 3.87 cm \times 6.6 cm \times 15.7 m. La luce di scintillazione prodotta nell'urto di un neutrino su un atomo del liquido viene raccolta in una fibra ottica,

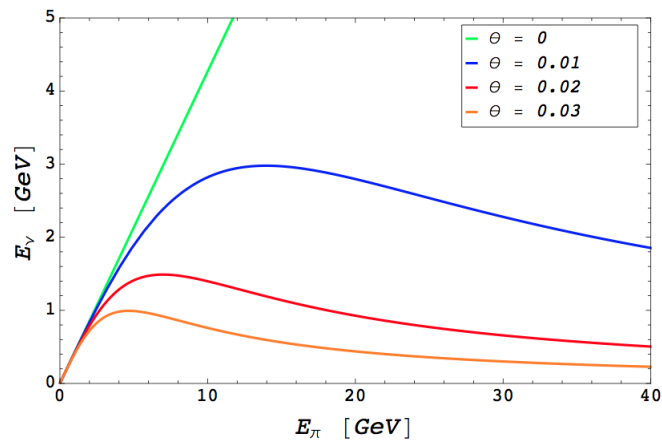


Figura 5.1. L'andamento dell'energia del neutrino in funzione dell'energia del pione per differenti angoli di posizionamento del detector *Off-axis*.

alle cui estremità è presente un fotodiode a valanga atto al readout.

Il Far Detector è posto approssimativamente a 810 km dalla sorgente del fascio NuMI al Fermilab ed ad una distanza di 12 km dall'asse centrale del fascio, come mostrato in Figura 5.2.



Figura 5.2. In Figura viene mostrato il sito di origine del fascio, al Fermilab, ed il sito dell'esperimento NO ν A, dove è posizionato il Far Detector.

Per quanto riguarda il Near Detector, posto a circa 12 m rispetto all'asse centrale del fascio, esso ha lo scopo di incrementare la sensibilità per i processi $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, migliorando la conoscenza del background e dello spettro in energia del fascio di neutrini off-axis.

Il Near Detector è più piccolo rispetto al Far Detector, per ragioni logistiche. Esso è costituito da una prima zona il cui assetto è identico a quello del Far Detector, mentre la seconda parte è costituita da un rivelatore di muoni costituito da acciaio interspaziato da 10 piani riempiti di liquido scintillante.

Come accennato in precedenza uno degli scopi principali dell'esperimento è quello di studiare il canale di oscillazione $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$. La probabilità di transizione, come visto nel Capitolo 1, per l'apparizione di un neutrino elettronico da un fascio di neutrini

muonici, dipende dalla matrice di mescolamento (1.54), che nel caso specifico porta ad una probabilità di transizione della forma² [34]

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{13}L}{2} \right) + \cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta_{12}L}{2} \right) + \tilde{J} \cos \left(\delta_{CP} - \frac{\Delta_{13}L}{2} \right) \frac{\Delta_{12}L}{2} \sin \left(\frac{\Delta_{13}L}{2} \right), \quad (5.7)$$

con

$$\Delta_{ij} \equiv \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}, \quad (5.8)$$

$$\tilde{J} \equiv \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13}. \quad (5.9)$$

Gli andamenti della probabilità di oscillazione e del flusso che si considera per il fascio di neutrini muonici iniziali è riportato in Figura 5.3.

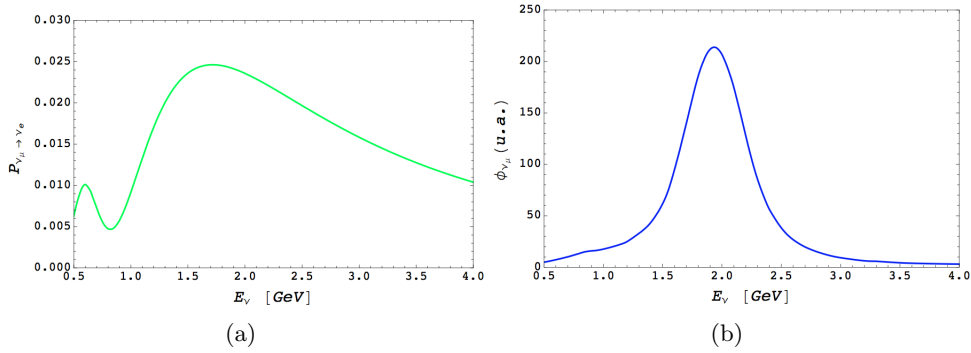


Figura 5.3. In Figura viene mostrato in (a) l’andamento della probabilità di oscillazione nel canale $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, con i parametri di oscillazione riportati in Tabella 5.1, ed in (b) l’andamento del flusso di neutrini muonici, in funzione dell’energia. Si osservi che per entrambi i grafici il picco è circa a 2 GeV.

Altre importanti misure che vogliono essere fatte riguardano lo studio degli effetti della materia con lo scopo di poter distinguere le due gerarchie di massa, una misura di precisione sull’angolo di mescolamento θ_{23} studiando il canale di oscillazione $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ed anche la sensitività alla violazione di CP nel canale $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$.

5.2 Risultati

In questa Sezione vogliamo studiare come la scelta di un determinato modello per la descrizione della dinamica nucleare influisce sulla simulazione di un determinato esperimento. Per il confronto delle sezioni d’urto si è fatto ricorso al programma **GLoBES** (*General Long Baseline Experiment Simulator*) [35, 36]. Si tratta di un

²L’espressione della probabilità di oscillazione (5.7) si ottiene considerando l’espansione al secondo ordine in θ_{13} , Δ_{12}/Δ_{13} e $\Delta_{12}L$.

software che permette di simulare gli esperimenti *long baseline* sull'oscillazione di neutrino. Utilizzando **GLOBES** è possibile descrivere una larga classe di esperimenti ad un livello astratto, attraverso la loro definizione con un tipo di linguaggio generale e flessibile chiamato **AEDL** (*Abstract Experiment Definition Language*). Il tipo di esperimenti che è possibile simulare è caratterizzato da una sola sorgente di neutrini, stazionaria e puntiforme .

In **GLOBES** sono presenti diversi tipi di esperimento predefiniti. È tuttavia possibile costruire simulazioni diverse inserendo arbitrariamente altre definizioni dell'esperimento, come ad esempio la sezione d'urto, i canali di oscillazione da considerare, il range di energia ed il flusso di neutrini.

L'esperimento che prenderemo in considerazione è $\text{NO}\nu\text{A}$, descritto nella Sezione precedente. Quello che vogliamo studiare è l'andamento della rate di eventi in funzione dell'energia incidente del fascio di neutrini. La rate di eventi, raggruppati in bin in energia di ampiezza ΔE , si può scrivere nella forma [37]

$$N_{e^\pm}^i = \int_{E_i}^{E_i+\Delta E} dE \sigma_{\nu_e(\bar{\nu}_e)}(E) P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}^\pm(E) \frac{d\phi_{\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)}(E)}{dE} \epsilon_e(E) , \quad (5.10)$$

ovvero è data dall'integrale sull'energia della sezione d'urto per la probabilità di oscillazione per la variazione del flusso in funzione dell'energia. Inoltre, nell'integrale compare anche un fattore ϵ_e , che rappresenta l'efficienza di rilevazione nel detector del leptone prodotto nell'interazione. Tale valore, nel caso specifico dell'esperimento $\text{NO}\nu\text{A}$, è stato posto pari a $\epsilon_e = 0.45$ ed indipendente da E .

Come risulta evidente dalla (5.10), la rate dipende dalla sezione d'urto. Nel Capitolo 4 abbiamo visto come la scelta del modello usato per la descrizione della dinamica nucleare si rifletta sull'andamento della sezione d'urto. Questa dipendenza dal modello si riscontra anche sulla rate di eventi, come mostrato in Figura 5.4. Le rate di eventi per i diversi processi – diffusione quasi elastica, produzione di risonanze e diffusione profondamente anelastica – e quella totale sono rappresentate in funzione dell'energia, nell'intervallo $0.5 \div 4$ GeV suddiviso in 28 bin di ampiezza $\Delta E = 0.125$ GeV. Si osserva una sovrastima degli eventi nel caso in cui si usi il modello del gas di Fermi (FG), rispetto al risultato ottenuto usando la funzione spettrale (SF) calcolata nell'ambito di un modello realistico della dinamica nucleare. Questo andamento è una conseguenza del fatto che $\sigma_{SF} \lesssim \sigma_{FG}$.

Dalla Figura è possibile notare che il picco di eventi si ha sempre in corrispondenza del dodicesimo bin, che corrisponde ad una energia circa pari a $E_\nu = 2$ GeV. Ciò dipende dal fatto che, anche se i processi considerati risultano essere dominanti in regioni in energia differenti tra loro, la convoluzione delle tre quantità che entrano nella definizione della rate (5.10), cioè il flusso, la probabilità di oscillazione e la sezione d'urto, seleziona energie principalmente intorno a 2 GeV.

Per quanto riguarda la rate totale degli eventi, i risultati che si ottengono sono riportati in Tabella 5.2. Chiaramente, le considerazioni fatte sulle differenze tra l'uso dei modelli FG e SF si estendono immediatamente al caso delle rate totali.

	CCQE	RES	DIS	TOT
FG	13.6	12.2	15.1	40.9
SF	12.8	10.0	12.3	35.1

Tabella 5.2. Valori ottenuti per le rate totali per i differenti processi di corrente carica: diffusione quasi elastica (CCQE), produzione di risonanze (RES), scattering profondamente anelastico (DIS) e sezione d'urto totale (TOT). Tali rate sono state calcolate considerando due modelli differenti per la descrizione della dinamica nucleare: il gas di Fermi (FG) e la funzione spettrale (SF) ottenuta nell'ambito di un modello dinamico realistico.

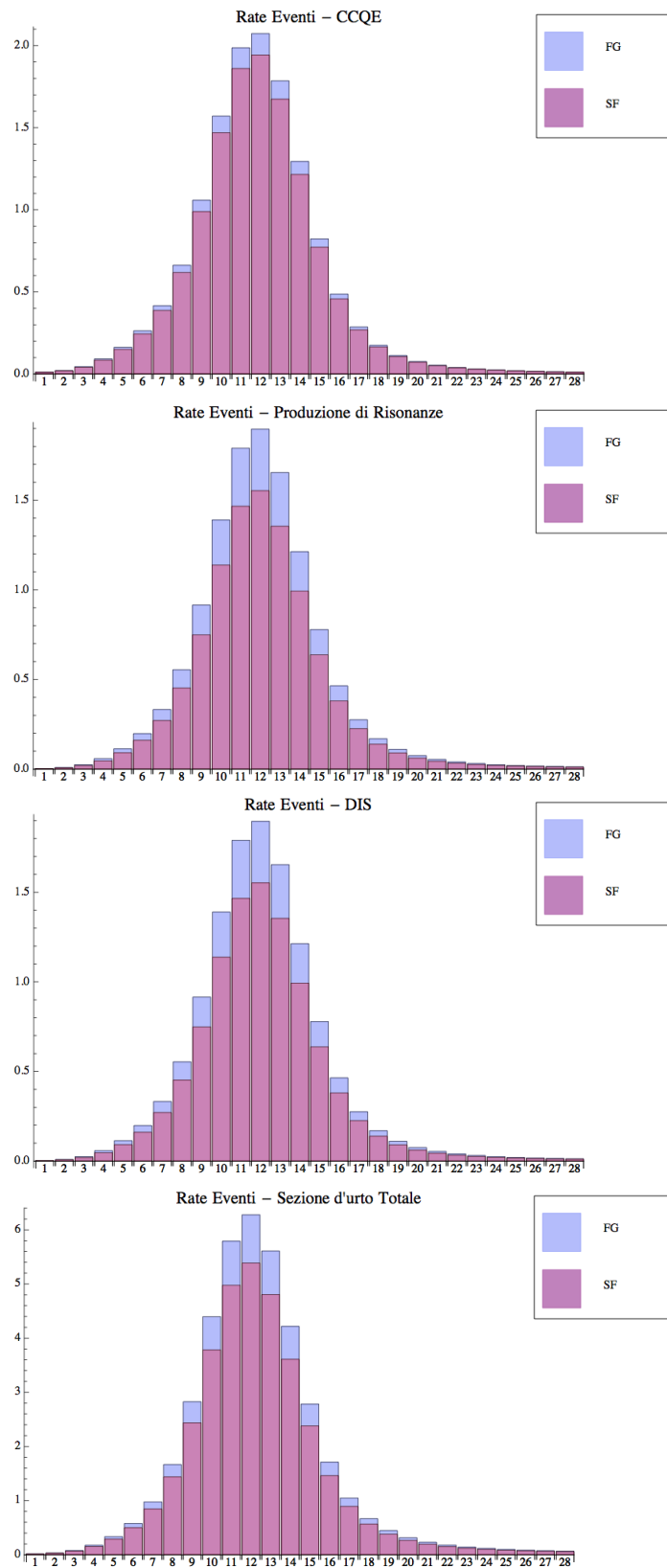


Figura 5.4. Andamento della rate per i differenti processi: scattering quasi elastico, produzione di risonanze, scattering profondamente anelastico e sezione d'urto totale. Il range di energia considerato è $E_\nu = 0.5 \div 4$ GeV, suddiviso in 28 bin, ciascuno di ampiezza $\Delta E = 0.125$ GeV. Le rate sono state ottenute considerando due diversi modelli per la descrizione della funzione spettrale: il Fermi Gas Model (FG) e la Local Density Approximation (SF).

Conclusioni

In questa Tesi abbiamo discusso le interazioni di corrente carica neutrino-nucleo, la cui comprensione è necessaria per l'interpretazione dei segnali misurati dagli esperimenti che si propongono di osservare le oscillazioni dei neutrini.

In particolare, abbiamo analizzato la regione cinematica corrispondente ad energie del neutrino intorno al GeV, che è quella rilevante per gli esperimenti *long baseline*. In questo regime cinematico i meccanismi di reazione che forniscono i contributi dominanti alla sezione d'urto totale sono la diffusione quasi elastica, la produzione di risonanze barioniche e la diffusione profondamente anelastica.

L'approccio basato sull'approssimazione impulsiva permette di esprimere la sezione d'urto nucleare in termini di due componenti: la sezione d'urto elementare neutrino-nucleo e la funzione spettrale, che fornisce la probabilità di rimuovere dal nucleo bersaglio un nucleone d'impulso assegnato, lasciando il sistema residuo con energia assegnata.

In assenza di modificazioni dovute al mezzo nucleare, la sezione d'urto elementare può essere misurata usando bersagli di idrogeno e deuterio. La validità di questo approccio è stata confermata da un gran numero di esperimenti di diffusione elettrone-nucleo, che hanno dimostrato come i fattori di forma vettoriali dei nucleoni all'interno dei nuclei siano indistinguibili da quelli dei nucleoni liberi.

La funzione spettrale, che descrive la struttura dello stato iniziale del bersaglio, si può calcolare utilizzando modelli molto sofisticati della dinamica nucleare, basati sull'uso di hamiltoniane fenomenologiche. I risultati di questi calcoli hanno mostrato che le correlazioni tra i nucleoni, che vengono trascurate nel modello a shell dei nuclei e nel modello a gas di Fermi – largamente utilizzato nei programmi di simulazione per l'analisi dei dati – giocano un ruolo molto importante.

Utilizzando l'approssimazione impulsiva e una funzione spettrale realistica abbiamo calcolato le sezioni d'urto di diffusione neutrino-carbonio nei tre canali rilevanti. Nel caso della sezione d'urto profondamente anelastica, i nostri risultati sono i primi ottenuti nell'ambito di questo approccio. Il confronto con le predizioni del modello a gas di Fermi ha mostrato che la descrizione più accurata della dinamica nucleare produce una apprezzabile diminuzione delle sezioni d'urto in tutti i canali.

Il secondo contributo originale contenuto nella Tesi è l'analisi dell'impatto della descrizione degli effetti nucleari sul segnale misurato dagli esperimenti.

Utilizzando il software **GLoBES** abbiamo calcolato le rates di eventi attesi dall'esperimento $\text{NO}\nu\text{A}$, attualmente in fase di progettazione, utilizzando come input le sezioni d'urto totali calcolate usando il modello a gas di Fermi e la funzione spettrale realistica. I risultati di questi calcoli mostrano che la soppressione delle

sezioni d'urto dovuta alle interazioni nucleone-nucleone si riflette chiaramente nelle rate di eventi.

In conclusione, il nostro lavoro ha confermato la necessità, ormai largamente riconosciuta, di superare la descrizione schematica dei nuclei basata sul modello a gas di Fermi, e mostrato che l'effetto della dinamica nucleare sulle sezioni d'urto si manifesta in modo analogo sui segnali misurati dagli esperimenti, dai quali si estraggono i parametri che descrivono le oscillazioni dei neutrini.

Appendice A

Simmetrie CPT, CP e T

In questa Appendice vogliamo richiamare alcuni concetti basilari sulle simmetrie CPT, CP e T e vedere cosa implica la loro applicazione sui fenomeni di oscillazione di neutrini.

A.1 CPT

La trasformazione CPT è una simmetria delle teorie di campo locali. Dal momento che la teoria di oscillazione del neutrino può essere formulata in questa ottica, CPT è una simmetria delle probabilità di oscillazione.

Consideriamo il canale di oscillazione $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$, per il quale l'azione di tale trasformazione porta a

$$\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \xleftrightarrow{CPT} \bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha ; \quad (\text{A.1})$$

dunque per la probabilità di oscillazione avremo

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = P_{\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha} . \quad (\text{A.2})$$

La probabilità di oscillazione (1.75) ricavata nel Capitolo 1, nel caso di oscillazione di antineutrini assume la forma

$$P_{\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha}(L, E) = \sum_{k,j} \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta j}^* \mathbf{U}_{\alpha j} \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \quad (\text{A.3})$$

che coincide con la probabilità di oscillazione $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$.

A.2 CP

La trasformazione di CP mette in relazione il neutrino e l'antineutrino dal momento che la sua azione è quella di scambiare il neutrino con la sua antiparticella e di invertire l'elicità ¹, ovvero

$$\nu_\alpha \xleftrightarrow{CP} \bar{\nu}_\alpha ; \quad (\text{A.4})$$

¹Nel caso di neutrini di Majorana, dal momento che particella e antiparticella coincidono e l'azione di C corrisponde all'identità, è convenzione chiamare *neutrini* gli stati ad elicità negativa ed *antineutrini* gli stati ad elicità positiva.

dunque l'azione di tale trasformazione sul canale di oscillazione $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$, diventa

$$\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \xleftrightarrow{CP} \bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta . \quad (\text{A.5})$$

Come visto nel Capitolo 1 la matrice di mixing nel caso di tre neutrini (1.54) è complessa e porta ad una violazione di CP. Tale violazione può essere rivelata dagli esperimenti sull'oscillazione dei neutrini dalla misurazione dell'asimmetria di CP, ovvero

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} . \quad (\text{A.6})$$

La simmetria CPT implica che l'asimmetria di CP sia antisimmetrica nello scambio degli indici di sapore

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = -A_{\beta\alpha}^{CP} \quad (\text{A.7})$$

dal momento che la relazione di CPT (A.2) implica che $P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} = P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha}$.

Come visto nell'equazione (1.75), la probabilità di oscillazione dei neutrini dipende dagli elementi della matrice di mixing ed analogamente il concetto può essere esteso al caso di oscillazione degli antineutrini per i quali, in analogia alla (1.85), si avrà

$$\begin{aligned} P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(L, E) = & \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \text{Re}[\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) + \\ & - 2 \sum_{k>j} \text{Im}[\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*] \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) ; \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

dunque l'asimmetria CP assume la forma

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = 4 \sum_{k>j} \text{Im}[\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*] \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) , \quad (\text{A.9})$$

dove si nota che l'asimmetria di CP può essere misurata solo nelle transizioni tra sapori differenti, dal momento che per $\alpha = \beta$ la parte immaginaria nella (A.9) diventa nulla. Inoltre dal momento che il prodotto degli elementi della matrice di mixing dipende soltanto dalla fase di Dirac, la violazione di CP dipenderà solo da tale fase.

A.3 T

La simmetria per inversioni temporali ha la caratteristica di intercambiare lo stato iniziale con lo stato finale, dunque nel canale di oscillazione $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$, questo porta a

$$\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \xleftrightarrow{T} \nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha . \quad (\text{A.10})$$

Dal momento che la simmetria CPT è una simmetria della natura, una violazione della simmetria di CP implica una violazione di T. Negli esperimenti di oscillazioni di neutrino è possibile osservare la violazione di T dalla misurazione della sua asimmetria, ovvero

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^T &= P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha} , \\ \bar{A}_{\alpha\beta}^T &= P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} - P_{\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e dalla simmetria CPT, si ha

$$A_{\alpha\beta}^T = -\bar{A}_{\alpha\beta}^T = A_{\alpha\beta}^{CP}, \quad (\text{A.12})$$

dunque dalla misurazione della asimmetria di CP è possibile ricavare l'asimmetria di T.

Appendice B

Probabilità di transizione per due neutrini

Consideriamo il caso in cui esistano solo due famiglie di neutrini. Nel vuoto avremo che gli autostati di massa per $|\nu_1\rangle$ e $|\nu_2\rangle$ saranno tali che si abbia

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

con $E_i = p + m_i^2/(2p)$, quindi

$$H = \begin{pmatrix} p + \frac{m_1^2}{2p} & 0 \\ 0 & p + \frac{m_2^2}{2p} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Sottraendo $\mathbb{1}[p + m_1^2/(2p)]$ si ottiene la seguente hamiltoniana riscalata

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

e l'equazione di Schödinger può essere dunque riscritta

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

quindi

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= |\nu_1(0)\rangle \\ |\nu_2\rangle &= e^{i\frac{\Delta m^2}{2E}t} |\nu_2(0)\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

dalla (1.62) e dalla (1.91) potrò scrivere

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1(t)\rangle \\ |\nu_2(t)\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

A questo punto, volendo trovare la probabilità di transizione $P(|\nu_e\rangle \rightarrow |\nu_\mu\rangle)$, è necessario proiettare lo stato $|\nu_e\rangle$ sullo stato $|\nu_\mu\rangle$, ovvero

$$\langle \nu_e | \nu_\mu \rangle = -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta e^{-i \frac{\Delta m^2 L}{2E}} = -\sin \theta \cos \theta \left(1 - e^{-i \frac{\Delta m^2 L}{2E}} \right) \quad (\text{B.7})$$

quindi si ha che

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = |\langle \nu_e | \nu_\mu \rangle|^2 = 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left[1 - \cos \frac{\Delta m^2 L}{2E} \right] = \quad (\text{B.8})$$

$$= 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E}. \quad (\text{B.9})$$

Consideriamo ora un problema differente, nel caso in cui si abbia a che fare con la base degli stati di interazione

$$i \frac{d}{dt} |\nu_i\rangle = H |\nu_i\rangle = H U^\dagger |\nu_\alpha\rangle \quad (\text{B.10})$$

essendo $|\nu_i\rangle = U^\dagger |\nu_\alpha\rangle$, ed H è l'Hamiltoniana effettiva, data da

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta m^2 L}{2E} \sin^2 \theta + V & \frac{\Delta m^2 L}{2E} \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\Delta m^2 L}{2E} \sin \theta \cos \theta & \frac{\Delta m^2 L}{2E} \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

dove V è il contributo alla corrente carica del potenziale effettivo per ν_e . Diagonalizzando tale matrice si trovano gli autovalori

$$\lambda_{12} = \frac{\frac{\Delta m^2 L}{2E} + V \pm \sqrt{\frac{\Delta m^2 L}{2E} + V^2 - 2V \frac{\Delta m^2 L}{2E} \cos(2\theta)}}{2} \quad (\text{B.12})$$

i cui autovettori associati

$$v_1 = \frac{1}{N_1} \begin{pmatrix} V - \frac{\Delta m^2 L}{2E} \cos(2\theta) - R \\ \frac{\Delta m^2 L}{2E} \sin(2\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{N_2} \begin{pmatrix} V - \frac{\Delta m^2 L}{2E} \cos(2\theta) + R \\ \frac{\Delta m^2 L}{2E} \sin(2\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

con

$$R = \sqrt{\frac{\Delta m^2 L}{2E} + V^2 - 2V \frac{\Delta m^2 L}{2E} \cos(2\theta)}$$

I fattori N_1 e N_2 sono dei fattori di normalizzazione che vengono trovati imponendo la condizione che $|v_i|^2 = 1$, quindi si trova che

$$N_1^2 = 1 + \frac{\left[V - \frac{\Delta m^2 L}{2E} \cos(2\theta) - R \right]^2}{\left[\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right]^2 \sin^2(2\theta)} \quad (\text{B.14})$$

$$N_2^2 = 1 + \frac{\left[V - \frac{\Delta m^2 L}{2E} \cos(2\theta) + R \right]^2}{\left[\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right]^2 \sin^2(2\theta)} \quad (\text{B.15})$$

Gli autovettori (B.13) sono relativi ad H_{eff} , ovvero dell'Hamiltoniana in presenza di materia. Le componenti di ν_1 e ν_2 costituiscono la matrice \tilde{U} del cambiamento di base tra gli autostati di materia e quelli di sapore

$$|\nu_i\rangle = \tilde{U}^* |\nu_f\rangle \quad (\text{B.16})$$

quindi quello che si ottiene per gli stati di flavour

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = (\tilde{U}^T)_{11} |\nu_1(t)\rangle + (\tilde{U}^T)_{12} |\nu_2(t)\rangle \quad (\text{B.17})$$

$$|\nu_\beta(t)\rangle = (\tilde{U}^T)_{21} |\nu_1(t)\rangle + (\tilde{U}^T)_{22} |\nu_2(t)\rangle \quad (\text{B.18})$$

quindi proiettando uno stato sull'altro, otteniamo l'ampiezza di transizione

$$A_{\alpha\beta}(t) = \langle \nu_\alpha(t) | \nu_\beta(0) \rangle = -\frac{1}{N_1 N_2} e^{-i\lambda_1 t} [1 - e^{-i(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \quad (\text{B.19})$$

da cui possiamo ricavare la probabilità di transizione

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \frac{4}{(N_1 N_2)^2} \sin^2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} L \right) \quad (\text{B.20})$$

che scritta in maniera più esplicita diventa

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sin^2(2\theta_m) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{eff}^2}{4E} L \right) \quad (\text{B.21})$$

con

$$\sin^2(2\theta_m) = \frac{\sin^2(2\theta)}{\sin^2(2\theta) + \left[\cos(2\theta) - \frac{2EV}{\Delta m^2} \right]^2} \quad (\text{B.22})$$

$$\Delta m_{eff}^2 = \Delta m^2 \sqrt{\sin^2(2\theta) + \left[\frac{2EV}{\Delta m^2} - \cos(2\theta) \right]^2}.$$

Appendice C

Potenziali fenomenologici nucleone-nucleone

I potenziali fenomenologici che descrivono interamente le interazioni NN, sono del tipo

$$v = \tilde{v}_\pi + v_R \quad (\text{C.1})$$

dove \tilde{v}_π è il potenziale che descrive lo scambio di un pione, mentre v_R rappresenta il potenziale residuo che descrive le interazioni a medio e corto raggio. La dipendenza da spin, isospin e la natura non centrale dell'interazione NN può essere resa più esplicita riscrivendo la (C.1) nella forma

$$v_{ij} = \sum_{S,T} [v_{TS}(r_{ij}) + \delta_{S1} v_{Tt}(r_{ij}) S_{ij}] P_S \Pi_T, \quad (\text{C.2})$$

dove $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, mentre S e T rappresentano lo spin e l'isospin totale della coppia di nucleoni interagenti e P_S, Π_T sono i corrispondenti operatori di proiezione; inoltre S_{ij} descrive l'interazione tra due dipoli magnetici, derivante dal fatto che si ha un contributo non centrale. Le funzioni $v_{TS}(r_{ij})$ e $v_{Tt}(r_{ij})$ descrivono la dipendenza radiale dell'interazione in vari canali di spin-isospin e si riducono alle corrispondenti componenti del potenziale di scambio di un pione per grandi valori della distanza relativa¹.

Una rappresentazione alternativa, spesso usata in letteratura, è basata sull'utilizzo di un set di sei operatori della forma

$$O_{ij}^{n=1,\dots,6} = [1, (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j), S_{ij}] \otimes [1, (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)] \quad (\text{C.3})$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_i$ sono i vettori delle matrici di Pauli della particella i -esima e $\boldsymbol{\tau}_i$ sono le matrici di isospin. Gli operatori O_{ij} permettono di riscrivere il potenziale nel seguente modo

$$v_{ij} = \sum_{n=1}^6 v^{(n)}(r_{ij}) O_{ij}^n. \quad (\text{C.4})$$

Un potenziale della forma (C.4) permette di descrivere in maniera abbastanza accurata le proprietà del deutone, come l'energia di legame, il raggio di carica e

¹La loro forma è scelta in modo tale che si possa riprodurre le caratteristiche dell'interazione NN.

momento di quadrupolo. Per la descrizione dello scattering NN in onda S o P (momento angolare 0 od 1, rispettivamente), è necessario aggiungere degli operatori addizionali

$$O_{ij}^{n=6,7} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \otimes [1, (\tau_i \cdot \tau_j)] \quad (\text{C.5})$$

con \mathbf{L} momento angolare orbitale. Fit migliori vengono ottenuti includendo ulteriori dieci operatori che tengono conto degli effetti dovuti alle differenze di massa e di costante di accoppiamento tra pioni carichi e quello neutro.

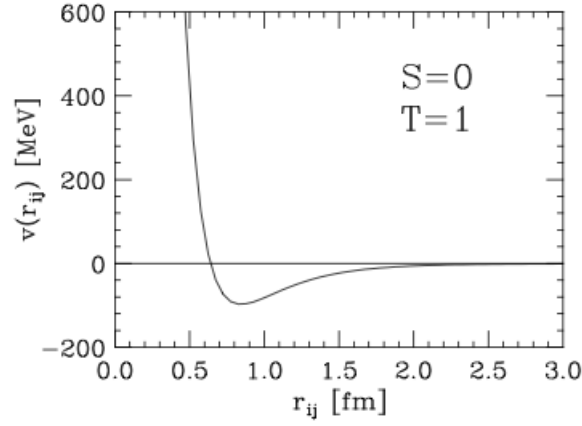


Figura C.1. Dipendenza radiale del potenziale di interazione NN che descrive l'interazione tra due nucleoni in uno stato di momento angolare relativo $l = 0$, e spin totale e isospin $S = 0$, $T = 1$, rispettivamente.

Appendice D

Estremi di integrazione per il calcolo della sezione d'urto quasi elastica

Per completezza vogliamo ora analizzare quali sono gli estremi di integrazione che sono coinvolti nel calcolo della sezione d'urto quasi elastica ed anelastica. Nell'equazione (4.15) l'integrazione sul momento può essere riscritta nella forma

$$d^3p = p^2 dp \, d \cos \gamma d\phi = 2\pi p^2 dp \, d \cos \gamma \quad (\text{D.1})$$

dove γ indica l'angolo tra \mathbf{p} e \mathbf{q} . Indicando con W la massa invariante dello stato adronico finale prodotto nell'interazione, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{-W^2 - |\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{q}|^2 + (\tilde{\nu} + E_p)^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} = \\ &= \frac{s + M_{A_1}^2 - W^2 - 2(\nu + M_A)E_{A-1}}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

dove s è l'energia del centro di massa al quadrato e

$$\begin{aligned} M_{A-1} &= M_A - m + E \\ E_{A-1}^2 &= M_{A-1}^2 + |\mathbf{p}|^2 . \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Dovendo $\cos \gamma$ soddisfare il limite $-1 \leq \cos \gamma \leq 1$, porta a dei limiti superiori e inferiori per $|\mathbf{p}|$

$$|\mathbf{p}|^\pm = \frac{1}{2s} \left| \Lambda |\mathbf{q}| \pm (\nu + M_A) [\Lambda^2 - 4sM_{A-1}^2]^{1/2} \right| \quad (\text{D.4})$$

con $\Lambda = \sqrt{s} + M_{A-1}^2 - W^2$. Richiedendo che la il radicando che compare nella (D.4) sia non negativo, si ricava l'estremo di integrazione sull'energia

$$E_{max} = \sqrt{s} - M_A - W + m. \quad (\text{D.5})$$

Bibliografia

- [1] S.L. GLASHOW, Nucl. Phys. **22**, 576 (1961)
- [2] S. WEINBERG, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1961)
- [3] A. SALAM, Nobel Symposium on *Elementary particle theory, relativistic group and analyticity*, Stoccolma (1968)
- [4] F. MANDL, G. SHAW, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons Inc, (1984)
- [5] M. E. PESKIN, D. V. SCHREODER, *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley Publishing Company, (1996)
- [6] C. GIUNTI, C. W. KIM, *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*, Oxford University Press, (2007)
- [7] E. MAJORANA, Nuovo Cimento, **14**, 171 (1937)
- [8] T. YANAGIDA, Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories, Tsukuba, Giappone, (1979)
- [9] M. GELL-MANN, P. RAMOND, R. SLANSKY, *Supergravity* (F. van Nieuwenhuizen & D. Freedman), Amsterdam, (1979)
- [10] R.N. MOHAPATRA, G. SENJANOVIC, Phys. Rev. Lett. **44**, 912 (1980)
- [11] E. K. AKHMEDOV, R. JOHANSSON, M.LINDNER, T. OHLSSON, T. SCHWETZ, hep-ph/0402175, (2004)
- [12] O. BENHAR, D. MELONI, Nucl. Phys. A **789**, 379 (2007)
- [13] O. BENHAR, N. FARINA, H. NAKAMURA, M. SAKUDA, R. SEKI, Phys. Rev. D **72**, 053005 (2005)
- [14] O. BENHAR, D. DAY, I. SICK, Reviews of modern Physics, **80**, 189 (2008)
- [15] O. LALAKULICH, E. A. PASCHOS, Phys. Rev. D **71**, 074003 (2005)
- [16] L. B. OKUN, *Leptons and quarks*, North-Holland Personal Library, (1984)
- [17] F. HALZEN, A. D. MARTIN, *Quarks and leptons: an introductory to modern particle physics*, John Wiley and Sons , (1984)
- [18] P.BERGE ET AL., Z. Phys. C **49**, 187-223 (1991)
- [19] H. ABRAMOWICZ ET AL., Z. Phys. C-Particles and Fields **17**, 283-307 (1983)
- [20] P. BERGE ET AL., European organization for nuclear research, CERN-EP/89-103 (1989)
- [21] O. BENHAR, arXiv:0906.3144 [nucl-th], (2009)

- [22] W. HEISENBERG, *Zeit. Phys.*, **77**, 1 (1932)
- [23] H. YUKAWA, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **17**, 48 (1935)
- [24] C. BISCONTI, F. A. D. SAAVEDRA, AND G. CO', *Phys. Rev. C* **75**, 054302 (2007)
- [25] B. POVH, K. RITH, C. SCHOLZ, F. ZETSCHKE, *Particles and nuclei. An Introduction to the physical concepts*, Springer, (2008)
- [26] O. BENHAR, arXiv:hep-ph/0602108v1, (2006)
- [27] R.G. ROBERTS, *The structure of the proton: deep inelastic scattering*, Cambridge University Press, (1990)
- [28] R. DEVENIS, A. COOPER-SARKAR, *Deep inelastic scattering*, Oxford University Press, (2004)
- [29] A. BODEK, J.L. RITCHIE, *Phys. Rev. D* **23**, 1070 (1980)
- [30] W.B. ATWOOD, G.B. WEST, *Phys. Rev. D* **7**, 773 (1973)
- [31] A. BODEK *et al.*, *Phys. Rev. D* **20**, 1471 (1979)
- [32] O. BENHAR, G. VENEZIANO, *Phys. Lett. B* **702**, 433 (2011)
- [33] THE NO ν A COLLABORATION, D.S. AYRES *et al.*, arXiv:hep-ex/0503053 (2005)
- [34] A. CERVERA *et al.*, arXiv:hep-ph/0002108v3, (2000)
- [35] P. HUBER, M. LINDNER AND W. WINTER, Simulation of long baseline neutrino oscillation experiments with GLOBES, *Comput. Phys. Commun.* **167** (2005) 195, arXiv:hep-ph/0407333
- [36] P. HUBER, J. KOPP, M. LINDNER, M. ROLINEC, AND W. WINTER, New features in the simulation of neutrino oscillation experiments with GLOBES 3.0, arXiv:hep-ph/0701187
- [37] A. DONINI, D. MELONI, P. MIGLIOZZI, arXiv:hep-ph/0206034v1, (2002)
- [38] G.L. FOGLI *et al.*, arXiv:1205.5254v3 [hep-ph], (2012)