

Università degli studi di Roma "Sapienza"



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di laurea in Fisica
Anno Accademico 2009-2010

Tesi di Laurea Specialistica

**Studio della diffusione neutrino-nucleo in regime
quasi elastico**

Relatore:
Dott. Omar Benhar Noccioli

Candidato:
Giovanni Veneziano

Indice

1	Le oscillazioni di neutrino	1
1.1	Introduzione al Modello Standard	2
1.2	La massa del neutrino nel Modello Standard	2
1.3	La teoria di Majorana	3
1.4	Il termine di massa di Dirac-Majorana	4
1.5	Il meccanismo di see-saw	6
1.6	Caso a tre famiglie : matrice di mixing	7
1.7	Oscillazioni di neutrino nel vuoto	10
2	Effetti nucleari	13
2.1	Il Real Fermi-Gas Model	13
2.2	La correlazione tra i nucleoni	13
2.2.1	Effetti statici	15
2.2.2	Effetti dinamici	15
3	Interazioni neutrino-nucleo	19
3.1	Correnti cariche e correnti neutre	19
3.2	Sezione d'urto CCQE neutrino su nucleone	21
3.3	Sezione d'urto NCE neutrino su nucleone	26
3.4	Teoria fenomenologica dello scattering neutrino-nucleo	31
3.4.1	L'approssimazione impulsiva	31
3.4.2	La funzione spettrale	38
3.4.3	Pauli Blocking	42
3.4.4	Final State Interactions	42

INDICE

4	L'esperimento MiniBooNE	45
4.1	L'apparato sperimentale di MiniBooNE	45
4.1.1	La neutrino-baseline	45
4.1.2	Il detector	47
4.2	L'analisi dei dati di MiniBooNE	47
4.3	Flusso di neutrini	48
5	Risultati	49
5.1	La sezione d'urto CCQE	50
5.2	La sezione d'urto NCE	50
5.3	Il rapporto NCE/CCQE	50
5.4	Conclusioni	50
A	Fattori di forma	51
A.1	Correnti cariche	51
A.2	Correnti neutre	54
B	Limiti di integrazione per la funzione spettrale	57

Introduzione

Introduzione...

INDICE

1

Le oscillazioni di neutrino

Nel 1930 Wolfgang Pauli propose l'esistenza di una particella neutra emessa nel decadimento beta per spiegare lo spettro continuo in energia osservato per l'elettrone del processo. Tale particella, denominata *neutrino* da Enrico Fermi, portava via una frazione di energia salvaguardando la conservazione del 4-impulso. Negli anni seguenti ne fu dapprima confermata sperimentalmente l'esistenza (Ref. (1)) e in seguito si dimostrò che, come previsto da Bruno Pontecorvo, ogni leptone aveva un suo neutrino associato (nel 1962 il gruppo di Lederman a Brookhaven trovò la prima traccia dei neutrini μ (2)). Le prime osservazioni di neutrini solari (R. Davis 1962 (3)) mostrarono un deficit nel numero di neutrini prodotti dal Sole rispetto a quanto predetto teoricamente che fu in seguito spiegato con le oscillazioni previste ancora una volta da Pontecorvo verso la fine degli anni '50 (Ref. (4)). In questo modo era stato dimostrato che i neutrini x prodotti dal Sole potevano trasformarsi lungo il tragitto in neutrini y .

Tale meccanismo (dimostrato in seguito da esperimenti sempre più raffinati come Super-Kamiokande (5)) poneva un grosso problema: il modello standard delle particelle elementari (SM) spiega le interazioni elettrodeboli sulla base di neutrini a chiralità definita left e massa nulla, ma le oscillazioni (come vedremo in seguito) sono possibili solo se gli autostati di flavour e , μ e τ del neutrino sono stati 'misti' ovvero combinazioni lineari di stati massivi.

1. LE OSCILLAZIONI DI NEUTRINO

1.1 Introduzione al Modello Standard

Il modello standard delle particelle elementari è una teoria delle interazioni forti, deboli ed elettromagnetiche basata su un gruppo di simmetria di gauge locale $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, dove $SU(3)$ è la simmetria di colore della QCD (int. forti) e $SU(2) \times U(1)$ rappresentano le simmetrie di isospin debole e ipercarica debole delle interazioni elettrodeboli. Tale teoria prevede 12 bosoni di gauge che sono osservati sperimentalmente: 8 gluoni, il fotone e i bosoni vettoriali W^+ , W^- e Z^0 . Le particelle elementari nel Modello Standard sono quark e leptoni, replicati in tre famiglie o generazioni come riassunto in tabella 1.1.

Classification	Particles			Forces
	1st Generation	2nd Generation	3rd Generation	
Quarks	u (1.9 MeV)	c (1.32 GeV)	t (172.7 GeV)	Strong, EM, Weak
	d (4.4 MeV)	s (87 MeV)	b (4.24 GeV)	Strong, EM, Weak
Leptons	e^- (511 keV)	μ^- (106 MeV)	τ^- (1.78 GeV)	EM, Weak
	ν_e (< 2eV)	ν_μ (< 2eV)	ν_τ (< 2eV)	Weak

Figura 1.1: - Particelle elementari nel Modello Standard (6)

Nel modello standard i neutrini sono quindi fermioni neutri senza massa di riposo descritti da spinori a 4 componenti. Il flavour di un neutrino è definito come il flavour del leptone associato in una interazione di corrente carica. L'osservazione dell'oscillazione del flavour dei neutrini richiede che questi abbiano una massa non nulla, sebbene di molti ordini di grandezza inferiore a quella dei leptoni leggeri ($m_\nu < 2.2$ eV secondo l'esperimento Troitsk in Russia (7) e Mainz in Germania(8)).

1.2 La massa del neutrino nel Modello Standard

Alla base della teoria standard c'è il meccanismo di Higgs per la generazione delle masse, secondo cui le particelle acquistano una massa a seguito della rottura di simmetria del

campo scalare di Higgs. Sembra dunque naturale introdurre in maniera analoga un termine di massa per il neutrino m_D

$$\mathcal{L}_D = -m_D \nu \bar{\nu} = -m_D (\nu_L \bar{\nu}_R + \bar{\nu}_L \nu_R) = -\frac{yv}{\sqrt{2}} (\nu_L \bar{\nu}_R + \bar{\nu}_L \nu_R) \quad (1.1)$$

dove

- richiediamo che esista anche un neutrino a chiralità right non osservato sperimentalmente,
- y è la costante di accoppiamento di Yukawa,
- v è il valore di aspettazione del campo di Higgs sul vuoto che rompe la simmetria.

ν_L e ν_R sono rispettivamente le componenti a chiralità left e right del campo del neutrino, ottenute operando sullo spinore ν con gli operatori di proiezione

$$P_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (1.2)$$

tali che quindi ¹

$$\nu = \nu_L + \nu_R, \quad \nu_L = P_L \nu, \quad \nu_R = P_R \nu \quad (1.3)$$

Si può mostrare che gli spinori a chiralità definita ν_L e ν_R hanno solo 2 componenti indipendenti ciascuno, da cui lo spinore ν nel Modello Standard è descritto da 4 componenti indipendenti.

Tale meccanismo prevede per il neutrino una massa dell'ordine di quella del leptone associato e non può spiegare la grande differenza che si osserva invece sperimentalmente. Cioè niente nella teoria spiega perché il coefficiente di accoppiamento di Yukawa per il neutrino sia più di cinque ordini di grandezza inferiore a quello per i quark e i leptoni.

1.3 La teoria di Majorana

Tra le varie teorie alternative per trovare la massa del neutrino è interessante soffermarsi sulla teoria di Majorana (1937).

¹valgono le relazioni $P_L P_R = P_R P_L = 0$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, poiché $\gamma_5^2 = 1$ quindi $P_L \nu_L = \nu_L$, $P_R \nu_R = \nu_R$, $P_L \nu_R = P_R \nu_L = 0$.

1. LE OSCILLAZIONI DI NEUTRINO

Majorana scoprì che per descrivere un fermione massivo neutro nell'equazione di Dirac è sufficiente uno spinore a due componenti se vale la condizione

$$\psi = \psi^C = C(\gamma^0)^T \psi^* \quad (1.4)$$

dove C è l'operatore di coniugazione di carica.

Applicando alla 1.4 l'operatore di proiezione P_L otteniamo la fondamentale relazione

$$\psi_L = \psi_R^C \quad (1.5)$$

mediante la quale definiamo una dipendenza tra le due componenti a chiralità definita del neutrino di Majorana²

$$\psi = \psi_L + \psi_L^C \quad (1.6)$$

Quindi il campo di massa del neutrino di Majorana dipende solo dalle due componenti indipendenti dello spinore ψ_L (o parimenti per ψ_R).

Il termine di massa di Majorana sarà dunque descritto da

$$\mathfrak{L}_M = -\frac{1}{2}m_M(\psi_L\bar{\psi}_L^C + \bar{\psi}_L\psi_L^C) \quad (1.7)$$

dove $\frac{1}{2}$ è inserito per ottenere le equazioni del moto.

1.4 Il termine di massa di Dirac-Majorana

In generale, supponendo che esistano neutrini destrorsi oltre che sinistrorsi, il termine di massa più generale possibile sarà dato da un contributo alla Dirac 1.1 più un contributo alla Majorana 1.7 per ciascun campo spinoriale (left e right)

$$\mathfrak{L}_{massa} = \mathfrak{L}_D + \mathfrak{L}_M^{right} + \mathfrak{L}_M^{left} = -m_D(\nu_L\bar{\nu}_R + \bar{\nu}_L\nu_R) - \frac{m_R}{2}(\nu_R\bar{\nu}_R^C + \bar{\nu}_R\nu_R^C) - \frac{m_L}{2}(\nu_L\bar{\nu}_L^C + \bar{\nu}_L\nu_L^C) \quad (1.8)$$

che in forma matriciale vale

$$\mathfrak{L}_{massa} = -\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L^C \ \bar{\nu}_R) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} + h.c. \quad (1.9)$$

² ψ_L^C è right-handed, ψ_R^C è left-handed.

1.4 Il termine di massa di Dirac-Majorana

I campi ν_L e ν_R non hanno massa definita. Per ottenere i campi a massa definita è necessario diagonalizzare la matrice di massa. A tale scopo introduciamo la scrittura

$$\mathcal{L}_{massa} = \frac{1}{2} \bar{N}_L^C M N_L + h.c. \quad (1.10)$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \quad N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Introduciamo adesso i campi di neutrino massivi ν_1 e ν_2 definiti come

$$N_L = U n_L, \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

dove la U è la matrice unitaria ($U^\dagger = U^{-1}$) che diagonalizza M

$$U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

con le masse m_1 e m_2 reali e positive poiché sono le masse fisiche dei neutrini.

Consideriamo adesso il caso più semplice in cui la matrice di massa M è reale. Ciò si riduce a supporre che m_D sia reale in quanto m_L e m_R possono sempre essere presi reali e positivi effettuando una scelta appropriata della fase dei campi chirali ν_L e ν_R . In questo caso possiamo scomporre la matrice U in una rotazione ortogonale e una matrice diagonale delle fasi

$$U = R(\theta)\rho \quad (1.14)$$

dove

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

con $|\rho_k|^2 = 1$.

La matrice R è scelta così da soddisfare la condizione

$$R^T M R = \begin{pmatrix} m'_1 & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Mettendo insieme le relazioni precedenti otteniamo

$$U^T M U = \rho^T R^T M R \rho = \begin{pmatrix} \rho_1^2 m'_1 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 m'_2 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

1. LE OSCILLAZIONI DI NEUTRINO

che porta a

$$\tan(2\theta) = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \quad (1.18)$$

$$m'_{2,1} = \frac{1}{2}[(m_L + m_R) \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}] \quad (1.19)$$

E' interessante notare che le fasi in 2.1 hanno il ruolo di rendere le masse positive come devono essere. Infatti se $m'_2 > m'_1$, $\rho_2^2 = +1$ sempre, mentre $\rho_1^2 = \pm 1$ a seconda del segno di m'_1 .

1.5 Il meccanismo di see-saw

Il Modello Standard delle particelle elementari è stato verificato sperimentalmente con grande precisione, quindi può essere utilizzato per fornire alcuni vincoli alla teoria. Nello SM il neutrino left fa parte di un doppietto di isopin debole con $I_3 = + 1/2$. Consideriamo l'invarianza della lagrangiana di massa rispetto alla simmetria $SU(2)_L$:

- il termine $\nu_L \bar{\nu}_L^C$ di 1.8 ha $I_3 = 1$ e fa parte quindi di un tripletto di isospin debole. Affinché il Modello Standard continui ad essere valido quindi $m_L = 0$;
- il contributo m_R è consentito poiché $\nu_R \bar{\nu}_R^C$ trasforma come un singoletto sotto $SU(2)_L$;
- m_D è permesso poiché generato con il meccanismo di Higgs.

Imponendo le condizioni $m_L = 0$, $M \in \mathbb{R}$ e $m_D \ll m_R$ ³, otteniamo

$$m_1 \approx \frac{m_D^2}{m_R} \ll |m_D|, \quad m_2 \approx m_R, \quad \tan\theta \approx \frac{m_D}{m_R} \ll 1, \quad \rho_1^2 = -1 \quad (1.20)$$

Le relazioni 1.20 definiscono il cosiddetto *meccanismo di see-saw* (altalena) per la generazione della massa del neutrino: a un ν_2 molto pesante (m_2 dell'ordine di m_R) corrisponde un ν_1 con una massa molto più piccola della massa del leptone associato.

Una conseguenza ulteriore del meccanismo di see-saw è il fatto che l'angolo di mixing dei neutrini sia molto piccolo, da cui

$$\nu_{1L} \simeq -\nu_L, \quad \nu_{2L} \simeq \nu_R^C \quad (1.21)$$

e quindi il neutrino che partecipa alle interazioni deboli è quello leggero, mentre quello pesante è sterile.

³ m_R è data da effetti ad alta energia che non rendono rilevabile ν_R nel Modello Standard

1.6 Caso a tre famiglie : matrice di mixing

Possiamo estendere il ragionamento seguito finora alle tre famiglie di neutrini. Per trovare gli autostati di massa a partire dagli autostati dell'interazione diagonalizziamo la matrice di massa introducendo una matrice di mixing per i neutrini analoga alla matrice CKM per i quark. L'esistenza del mixing ha come diretta conseguenza le oscillazioni del flavour dei neutrini.

Introduciamo tre campi sinistrorsi ν_{eL} , $\nu_{\mu L}$, $\nu_{\tau L}$ e ν_{s1R} , ν_{s2R} , ν_{s3R} . Il termine di massa lagrangiano è dato da

$$\mathcal{L}_{massa} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_M^{right} + \mathcal{L}_M^{left} \quad (1.22)$$

con

$$\mathcal{L}_D = - \sum_{\alpha s} \bar{\nu}_{sR} M_{s\alpha}^D \nu_{\alpha L} + h.c. \quad (1.23)$$

$$\mathcal{L}_M^{right} = - \frac{1}{2} \sum_{ss'} \bar{\nu}_{sR}^C M_{ss'}^R \nu_{s'R} + h.c. \quad (1.24)$$

$$\mathcal{L}_M^{left} = - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{\alpha L}^C M_{\alpha\beta}^L \nu_{\beta L} + h.c. \quad (1.25)$$

con M^D matrice complessa (quadrata solo nel caso di tre neutrini sterili) e M^R e M^L sono matrici complesse simmetriche. Adesso è opportuno raggruppare i campi sinistrorsi

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix}, \quad \text{con } \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad \nu_R^C = \begin{pmatrix} \nu_{s1R}^C \\ \nu_{s2R}^C \\ \nu_{s3R}^C \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

per poi esprimere il termine di massa come

$$\mathcal{L}_{massa} = \bar{N}_L M N_L = (\bar{\nu}_L \bar{\nu}_R^C) \begin{pmatrix} M^L & (M^D)^T \\ M^D & M^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

con M matrice di massa 6x6.

Come visto in precedenza è possibile procedere alla diagonalizzazione per ottenere gli autostati di massa. Introduciamo i campi di neutrino massivi ν_k

$$N_L = V n_L, \quad \text{con } n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \vdots \\ \nu_{6L} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

1. LE OSCILLAZIONI DI NEUTRINO

dove V è una matrice 6x6 che lega gli autostati di flavour N_L e gli autostati di massa n_L scelta in modo da soddisfare la relazione

$$V^T M V = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_6 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

In seguito alla diagonalizzazione possiamo riscrivere il lagrangiano di massa 1.22 come

$$\mathfrak{L}_{massa} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 m_k \bar{\nu}_{kL}^C \nu_{kL} + h.c. \quad (1.30)$$

che evidenzia la natura di Majorana dei neutrini anche nel caso del see-saw.

Il mixing dei neutrini può essere espresso esplicitamente dalle relazioni

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^6 V_{\alpha k} \nu_{kL} \quad \alpha = e, \mu, \tau \quad (1.31)$$

$$\nu_{sR}^C = \sum_{k=1}^6 V_{sk} \nu_{kL} \quad s = s_1, s_2, s_3 \quad (1.32)$$

che evidenziano la possibilità dell'oscillazione di un neutrino sterile in uno attivo e viceversa per via della base comune di campi massivi ν_{kL} .

In analogia a quanto visto per una sola famiglia di neutrini consideriamo il caso in cui $M^L = 0$ e gli autovalori di M^D sono trascurabili rispetto a quelli di M^R , così da estendere il meccanismo di see-saw alle tre famiglie. Scriviamo la matrice di mixing V come

$$V = WU, \quad (1.33)$$

con W e U matrici unitarie ⁴.

Applicando una matrice W opportuna (Ref. (9)) a M è possibile sviluppare la matrice di massa in potenze di M^D/M^R , ottenendo una matrice diagonale a blocchi

$$W^T M W \approx \begin{pmatrix} M_{light} & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

⁴a meno di correzioni dell'ordine di M^D/M^R

1.6 Caso a tre famiglie : matrice di mixing

dove

$$M_{light} \approx -(M^D)^\dagger (M^R)^{-1} M^D, \quad M_{heavy} \approx M^R \quad (1.35)$$

Analogamente alle 1.20, le relazioni 1.35 definiscono il meccanismo di see-saw nel caso di tre famiglie di neutrini: ad autostati grandi della matrice M^R corrispondono piccoli autostati della matrice M_{light} . M_{light} e M_{heavy} sono disaccoppiate per processi a bassa energia poiché gli elementi fuori diagonale di W sono molto soppressi, quindi nel Modello Standard solo M_{light} dà contributo, da cui

$$U^\dagger M_{light} U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

da cui ottengo l'equazione per il mixing⁵ delle tre famiglie di neutrini

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k} \nu_{kL} \quad (1.37)$$

$$\nu_{kL} = \sum_{\alpha=1}^3 U_{\alpha k}^* \nu_{\alpha L} \quad (1.38)$$

La matrice U , che prende il nome di matrice PMNS⁶ o Lepton Mixing Matrix, è una matrice unitaria con nove parametri indipendenti: tre angoli e sei fasi.

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Tre delle sei fasi possono essere eliminate attraverso una ridefinizione dei campi leptonici che non cambia la fisica del sistema. Due delle fasi rimanenti sono fattorizzate in una matrice diagonale: sono le fasi di Majorana, così dette perché sono non nulle solo se il neutrino è una particella di Majorana⁷. La fase restante è detta fase di Dirac ed è diversa da zero solo se le oscillazioni di neutrino violano la simmetria di CP.

⁵Il mixing avviene poiché la matrice U non è diagonale.

⁶Dai nomi dei fisici che la studiarono: Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata.

⁷Il campo di Dirac è invariante per trasformazione di fase, quindi se il neutrino fosse una particella di Dirac potrei cancellare altre due fasi ridefinendo i campi dei neutrini massivi.

1. LE OSCILLAZIONI DI NEUTRINO

L'equazione 1.40 riporta la matrice U nella parametrizzazione generalmente adottata⁸

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{CP}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

dove

- $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$, con θ_{ij} angolo di mixing
- δ_{CP} è la fase di Dirac
- α_1 e α_2 sono le fasi di Majorana

La matrice di mixing *deve* essere unitaria. Nel caso in cui trovati tutti i parametri non risultasse tale, sarebbe necessario considerare l'esistenza di più neutrini sterili o di una fisica completamente nuova.

1.7 Oscillazioni di neutrino nel vuoto

Consideriamo il processo di decadimento con la produzione di un neutrino

$$A \rightarrow B + \alpha^+ + \nu_\alpha \quad (1.41)$$

Il neutrino prodotto può essere descritto nel momento della produzione da

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (1.42)$$

L'evoluzione temporale di questo stato può essere descritta da un'onda piana, che dopo aver percorso una distanza L in un tempo T assume la forma

$$|\nu_\alpha(L, T)\rangle = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* e^{-iE_k T + i\vec{p}_k \cdot \vec{L}} |\nu_k\rangle \quad (1.43)$$

dove E_k e p_k sono rispettivamente energia e impulso del neutrino massivo ν_k .

⁸La matrice U è composta da due rotazioni reali sui piani 1-2 e 2-3, una rotazione nel piano complesso 1-3 e una matrice diagonale di fasi.

Invertendo la relazione 1.37 e applicandola alla 1.43 otteniamo

$$|\nu_\alpha(L, T)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(\sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* e^{-iE_k T + i\vec{p}_k \cdot \vec{L}} \right) U_{\beta k} |\nu_\beta\rangle \quad (1.44)$$

che ci mostra che lo stato in cui osserviamo il neutrino è una sovrapposizione di diversi flavour.

Il coefficiente di $|\nu_\beta\rangle$ è l'ampiezza della transizione $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$, ovvero dell'*oscillazione*, la cui probabilità è data da

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, T) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(L, T) \rangle|^2 = \left| \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* e^{-iE_k T + i\vec{p}_k \cdot \vec{L}} U_{\beta k} \right|^2 \quad (1.45)$$

La probabilità di transizione 1.45 dipende da spazio e tempo della propagazione del neutrino. Dato che negli esperimenti T non è misurabile direttamente, dobbiamo esprimere tutto in funzione della distanza L a cui rileviamo il neutrino che è nota dalla geometria dell'esperimento. Per neutrini ultrarelativistici $T = L$, da cui

$$E_k t - p_k x \simeq (E_k - p_k)L = \frac{E_k^2 - p_k^2}{E_k + p_k} L = \frac{m_k^2}{E_k + p_k} L \simeq \frac{m_k^2}{2E} L, \quad (1.46)$$

dove E è l'energia del fascio di neutrini nel limite di massa nulla, anch'essa nota dal setup dell'esperimento.

Utilizzando l'approssimazione 1.46 possiamo scrivere la probabilità di transizione come

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) &= \left| \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-i\frac{m_k^2}{2E}L} U_{\beta k} \right|^2 = \\ &= \sum_k |U_{\alpha k}|^2 + |U_{\beta k}|^2 + 2Re \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \end{aligned} \quad (1.47)$$

dove $\Delta m_{kj}^2 \equiv m_k^2 - m_j^2$.

L'equazione 1.47 mostra che le oscillazioni sono legate agli elementi della matrice di mixing e alla differenza dei quadrati delle masse dei neutrini : sono le interferenze tra i contributi dei diversi neutrini massivi a generare le oscillazioni ⁹.

⁹Le interferenze sono dovute alla differenza di velocità durante la propagazione tra neutrini di massa diversa.

1. LE OSCILLAZIONI DI NEUTRINO

Analizziamo adesso il semplice caso di mixing a due neutrini¹⁰, equivalente al caso più generale se due angoli di mixing sono trascurabili. In questo caso $\Delta m^2 \equiv \Delta m_{21}^2$ e la matrice di mixing può essere parametrizzata con un solo angolo di mixing θ

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

La probabilità di transizione risultante può essere scritta come

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \quad (1.49)$$

dove E è espressa in GeV e L in km.

Affinché l'oscillazione sia rilevabile sperimentalmente è necessario che

$$\frac{\Delta m^2 L}{4E} \geq \sim 0.1 \div 1 \quad (1.50)$$

A seconda del rapporto L/E, che stabilisce a quale range di Δm^2 l'esperimento è sensibile, gli esperimenti si classificano in

- Short-baseline experiments (SBL), con $L/E < \sim 1 \text{ eV}^{-2}$, sensibile a $\Delta m^2 > \sim 0.1 \text{ eV}^2$,
- Long-baseline experiments (LBL), con $L/E < \sim 10^4 \text{ eV}^{-2}$, sensibile a $\Delta m^2 > \sim 10^{-4} \text{ eV}^2$,
- Very long-baseline experiments (VLBL), con $L/E < \sim 3 \times 10^5 \text{ eV}^{-2}$, sensibile a $\Delta m^2 L / 4E > \sim 3 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$.

¹⁰Tale caso ha una notevole valenza storica poiché due angoli di mixing sono molto piccoli e venivano per questo trascurati nelle prime analisi.

2

Effetti nucleari

2.1 Il Real Fermi-Gas Model

Lo studio teorico delle reazioni di scattering di neutrini su nuclei ha compiuto negli anni notevoli progressi. Ciononostante a livello sperimentale in genere sono ancora utilizzate delle approssimazioni molto semplificate, che trascurano alcuni effetti di correlazione estremamente importanti tra i nucleoni che costituiscono i nuclei.

Il Real Fermi-Gas Model (RFGM) (12) è la schematizzazione principale oggi utilizzata nella descrizione fenomenologica delle interazioni dei neutrini con i nuclei. In tale approssimazione il nucleo viene considerato come un gas degenere di neutroni e protoni *non interagenti* che si muovono in un campo medio. Considerando le particelle indipendenti, però, si perde la possibilità di studiare la correlazione tra i rispettivi spin e posizioni. Essendo tale correlazione tra nucleoni molto forte, essa non può essere trascurata da nessuna teoria che voglia studiare le interazioni neutrini-nucleo.

2.2 La correlazione tra i nucleoni

L'esistenza di una forte correlazione nucleone-nucleone (NN) può essere facilmente osservata dalla saturazione della densità nucleare di carica 2.1, studiata con lo scattering elastico di elettroni su nuclei.

La densità di carica risulta indipendente dal numero di massa A (ovvero dal numero totale di nucleoni) e costante per piccoli valori della distanza dal centro del nucleo : ciò indica chiaramente che i nucleoni non possono trovarsi arbitrariamente vicini nel

2. EFFETTI NUCLEARI

nucleo ed esisterà un limite r_c tale che è molto improbabile trovare due nucleoni più vicini di tale distanza.

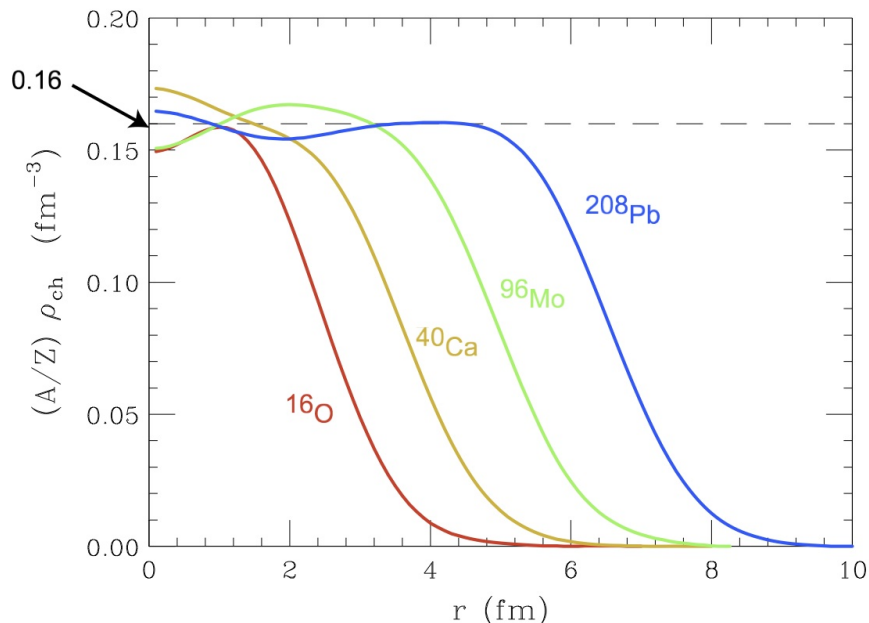


Figura 2.1: - Dipendenza radiale della distribuzione di densità di carica

In formule, la probabilità di trovare due nucleoni rispettivamente in x e in y sarà data da

$$\rho(x, y) = \rho(x) \rho(y) g(x, y), \quad (2.1)$$

dove $\rho(x)$ e $\rho(y)$ sono le probabilità di trovare il nucleone in x e y indipendentemente dalla posizione dell'altro nucleone, e $g(x, y)$ è un coefficiente che tiene conto della correlazione e che vale 1 in un modello a nucleoni indipendenti.

La saturazione per la densità di carica nucleare osservata in figura 2.1 impone che il coefficiente di correlazione sfavorisca la presenza di particelle a distanza inferiori a r_C

$$|x - y| \leq r_c \Rightarrow g(x, y) \ll 1 \quad (2.2)$$

Dobbiamo adesso distinguere gli effetti di correlazione statici e dinamici all'interno dei nuclei.

2.2.1 Effetti statici

I nucleoni seguono la statistica di Fermi-Dirac e pertanto il principio di esclusione di Pauli comporta una sorta di repulsione che si osserva anche in regime statico. Per esempio possiamo considerare un gas di Fermi degenerare con lo stesso numero di protoni e neutroni a densità uniforme ρ . In questo caso la relazione 2.1 diventa

$$\rho(|x - y|) = \rho^2 g_F(k_F |x - y|), \quad (2.3)$$

dove $k_F = (3\pi^2 \rho/2)^{\frac{1}{3}}$ è l'impulso di Fermi e la funzione g_F ha la forma

$$g_F(z) = 1 - \frac{1}{4} \left[\frac{3}{z^3} (\sin(z) - z \cos(z)) \right]^2 \quad (2.4)$$

il cui comportamento a $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ è descritto dalla linea tratteggiata in figura 2.2, che rappresenta l'effetto della correlazione dovuta al principio di esclusione di Pauli. Considerare tale effetto di correlazione statica non basta a dare una trattazione esaustiva delle interazioni tra i nucleoni nel RFGM: infatti per esempio studi teorici sulle stelle di neutroni in questa approssimazione (13) (14) hanno ottenuto un valore limite per la massa che è stato smentito dalle osservazioni ¹, confermando che la dinamica dei nucleoni nel nucleo fornisce un apporto non trascurabile alla correlazione tra le particelle.

2.2.2 Effetti dinamici

I modelli nucleari dinamici si basano sulla teoria nucleare a molti corpi (NMBT), che considera il nucleo come un insieme di A particelle puntiformi, la cui hamiltoniana non relativistica è

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{j>i} v_{ij} + \sum_{k>j>i} V_{ijk} \quad (2.5)$$

dove

- m e p sono rispettivamente massa e impulso del nucleone,
- v_{ij} è il potenziale fenomenologico NN,

¹I calcoli di Tolman, Oppenheimer e Volkoff dei ref. (13) e (14) stabiliscono in $0.8 M_{\text{solar}}$ il limite superiore alla massa di una stella di neutroni nell'ipotesi che la contrazione gravitazionale sia bilanciata dalla sola pressione prodotta dal principio di Pauli. Dalle osservazioni si ritiene invece che il limite sia di circa $1.4 M_{\text{solar}}$.

2. EFFETTI NUCLEARI

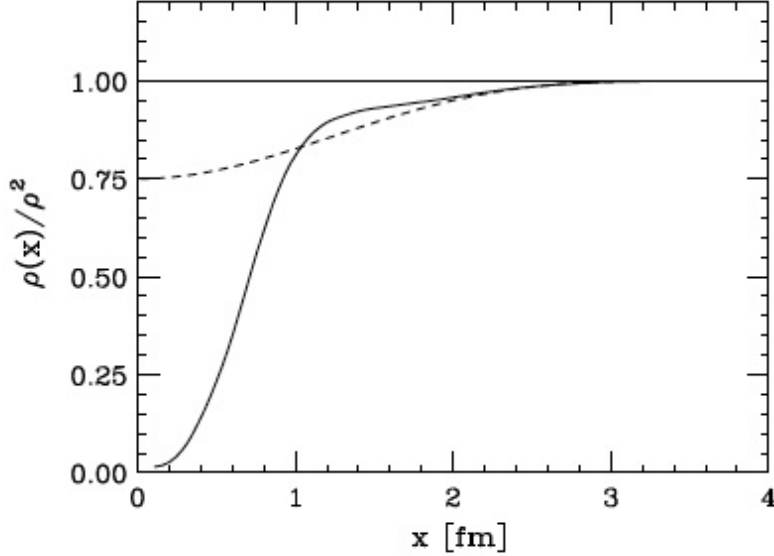


Figura 2.2: - Correlazione radiale NN a $\rho=0.016 \text{ fm}^{-3}$. La linea tratteggiata tiene conto della sola correlazione statistica, mentre la linea continua mostra gli effetti della correlazione dinamica calcolati in ref. (15)

- V_{ijk} è il potenziale a tre nucleoni.

Il potenziale fenomenologico NN non è un potenziale centrale e risulta dipendere molto da spin e isospin (16). Inoltre nel limite di grandi distanze v_{ij} tende al potenziale di Yukawa per lo scambio di un pione. Il potenziale a tre nucleoni è introdotto per tenere conto dell'energia di legame di un sistema a tre nucleoni (17). Tale hamiltoniana si risolve esattamente per $A \leq 12$ fornendo valori in accordo con l'esperimento (18).

L'aspetto principale che rende la NMBT la teoria fondamentale per lo studio della dinamica dei sistemi nucleari è che si basa solo su proprietà osservabili di sistemi risolvibili esattamente così da non avere bisogno di approssimazioni e di parametri.

La forza repulsiva NN è molto forte e quindi l'hamiltoniana 2.5 non può essere utilizzata nell'ambito della teoria delle perturbazioni. Questo problema viene superato nel modello a shell sostituendo il termine di interazione in 2.5 con un campo medio U

$$\sum_{j>i} v_{ij} + \sum_{k>j>i} V_{ijk} \rightarrow \sum_i U_i. \quad (2.6)$$

In questo modo l'equazione di Schroedinger a molti corpi si riduce ad un problema di singola particella risolvibile esattamente

$$\psi_0(1, \dots, A) = \mathbb{A} \prod_{\alpha_i \in \{F\}} \psi_{\alpha_i}(i), \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{p_i^2}{2m} + U_i \right) \psi_{\alpha_i}(i) = \varepsilon_{\alpha_i} \psi_{\alpha_i}(i). \quad (2.8)$$

La produttoria in 2.7 è estesa agli stati del mare di Fermi, che sono gli stati più bassi in energia e \mathbb{A} è l'operatore di antisimmetrizzazione. ²

Storicamente i primi studi volti ad affrontare il nucleo come un sistema a molti corpi mediante l'hamiltoniana nucleare sono attribuiti a Bruckner, Bethe e Goldstone (*G-matrix perturbation theory* (19)), seguiti da un approccio alternativo che incorpora gli effetti non perturbativi nelle funzioni di base detto *Correlated Basis Function perturbation theory* (CBF (20) (21) (22)), che rende possibile lo studio di nuclei e materia nucleare uniforme con lo stesso approccio.

In figura 2.2 è mostrato l'effetto della correlazione dinamica NN ottenuto con l'approccio CBF su una hamiltoniana nucleare realistica (15). Il confronto tra l'effetto statico (correlazione statistica) e gli effetti dinamici mostra chiaramente come questi ultimi siano importanti nella descrizione del nucleo a distanze $x \leq 1$ fm.

²Nel RFGM essendo le interazioni dinamiche trascurate, l'equazione 2.7 si riduce a all'espressione per un gas degenere di nucleoni che occupano tutti gli autostati entro l'energia di Fermi.

2. EFFETTI NUCLEARI

3

Interazioni neutrino-nucleo

Nella fisica sperimentale moderna le oscillazioni dei neutrini vengono studiate indirizzando fasci di neutrini molto intensi su bersagli nucleari. Questa scelta comporta la necessità di conoscere le interazioni dei neutrini con i nuclei e descriverle con un modello opportuno.

Come visto nel capitolo 2, il Real Fermi-Gas Model, trascurando gli effetti di correlazione tra i nucleoni all'interno del nucleo, non descrive accuratamente lo scattering. Nasce quindi la necessità di introdurre un nuovo modello fenomenologico che possa essere utilizzato negli esperimenti in modo da rendere minimo l'errore sistematico dovuto agli effetti nucleari.

In questo capitolo introdurremo le sezioni d'urto neutrino-nucleo per interazioni di corrente carica (CCQE) e di corrente neutra (NCE), ottenute a partire dallo scattering elementare neutrino-nucleone con l'introduzione delle funzioni spettrali dei nuclei nell'ambito dell'approssimazione impulsiva.

3.1 Correnti cariche e correnti neutre

La prima teoria delle interazioni deboli fu elaborata da Fermi nel 1933.

Egli descrisse il decadimento debole come un'interazione puntiforme di quattro fermioni

$$n \rightarrow p + e + \nu. \tag{3.1}$$

La lagrangiana introdotta da Fermi per descrivere il decadimento era caratterizzata da una costante di accoppiamento G_F con le dimensioni di un Energia^{-2} e da un

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

vertice di accoppiamento vettoriale, cioè tale che l'interazione non cambiasse lo spin del nucleone tra lo stato iniziale e finale¹. Nel 1956 il celebre esperimento di Madame Wu, che dimostrò come le interazioni deboli violassero la simmetria di parità, rivelò come la teoria di Fermi fosse il limite a bassa energia di una teoria più ampia che doveva contenere un termine assiale che violasse la parità (termine di Gamow-Teller). Inoltre la violazione di parità, e quindi il cambiamento di spin del nucleone dallo stato iniziale a quello finale, si può ottenere solo se l'interazione è mediata da un bosone vettore che può trasportare carica e momento angolare. Il propagatore dell'interazione debole è quindi

$$\propto \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 - M_W^2} \Rightarrow \frac{g^{\mu\nu}}{M_W^2} = \text{costante} \quad (3.2)$$

nel limite a basse energie $q^2 \ll M_W^2$, dove q è il quadrimpulso trasferito e M_W è la massa del mediatore.

Gli esperimenti svolti negli anni '80 presso il Cern sotto la direzione di Carlo Rubbia hanno trovato un valore per la massa del mediatore $M_W \approx 80$ GeV, che spiega come la teoria puntiforme di Fermi descrivesse molto bene le interazioni deboli alle energie disponibili ai fisici sperimentali della prima metà del '900.

Verso la fine degli anni '60 con la nascita della teoria elettrodebole di Weinberg e Salam per la prima volta fu proposta l'esistenza di un tipo di interazioni deboli che non comportavano il trasferimento di carica tra lo stato iniziale e finale. Tali *correnti neutre*, che si affiancavano alle correnti cariche tradizionali, erano una conseguenza diretta (e inaspettata) dell'unione tra le interazioni deboli ed elettromagnetiche. Questa rappresentava una grande novità nella fisica dell'epoca e fu definitivamente accettata solo nel 1973, quando le correnti neutre furono osservate per la prima volta al Cern nella camera a bolle Gargamelle (10).

Nello schema della teoria di Weinberg e Salam le due classi di interazioni si distinguono dalla natura del bosone mediatore: un bosone vettoriale W^\pm per le correnti cariche e uno Z^0 per le correnti neutre.

¹Oggi sappiamo che l'interazione non interessa tutto il nucleone, ma solo uno dei quark che lo compongono.

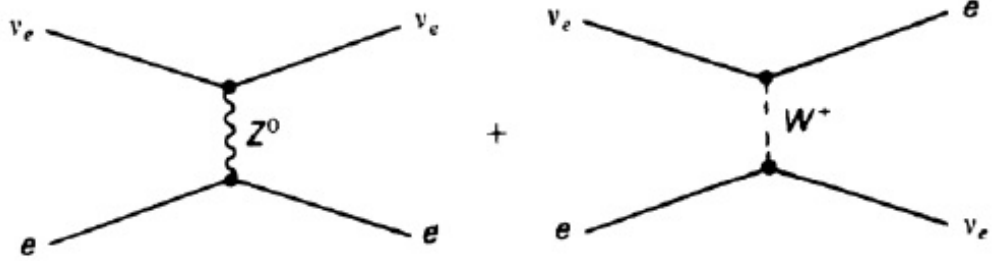


Figura 3.1: - Esempio di diagrammi di Feynman di corrente neutra e carica che contribuiscono alla sezione d'urto del processo $\nu + e \rightarrow \nu + e$

3.2 Sezione d'urto CCQE neutrino su nucleone

Consideriamo il processo di corrente carica

$$\nu_l + n \rightarrow l^- + p \quad (3.3)$$

in cui un neutrino di flavour l interagisce con un neutrone per dare un protone e un leptone l carico (3.2).

L'ampiezza invariante per il processo vale²:

$$\mathcal{M} = \frac{G_F V_{ud}}{\sqrt{2}(1 + \frac{Q^2}{M_W^2})} \left[\bar{u}_l(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_l}(k) \right] \times \left[\bar{u}_p(p') J^\mu u_n(p) \right] \quad (3.4)$$

dove

- M_W è la massa del bosone mediatore W ,
- $Q^2 = -q^2$, dove $q = p' - p = k - k'$ è il quadrimpulso trasferito nel processo,
- u e \bar{u} sono gli spinori di Dirac delle particelle,
- G_F e V_{ud} sono la costante di Fermi e l'elemento di matrice CKM che accoppia i quark u e d .

La sezione d'urto è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza invariante di Feynman, mediata sullo spin delle particelle nello stato iniziale e sommata sugli spin delle

²I fattori di forma e le loro caratteristiche sono riportati in appendice A

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

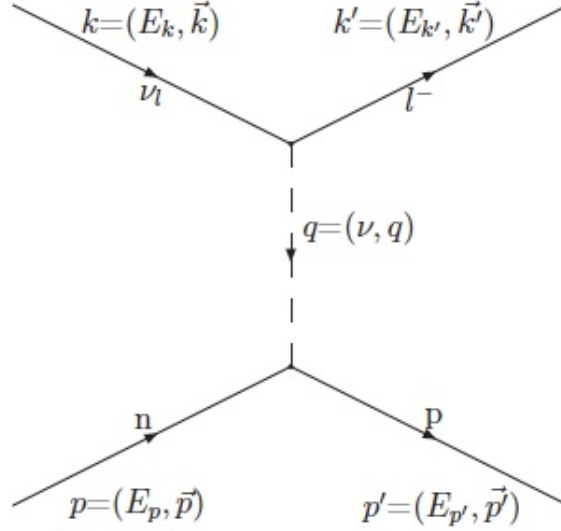


Figura 3.2: - Diagramma di Feynman per lo scattering di un neutrino su un nucleone

particelle nello stato finale³:

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{S_i, S_f} |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2 V_{ud}^2}{2(1 + \frac{Q^2}{M_W^2})^2} \frac{1}{mm_\nu} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (3.5)$$

dove m e m_ν rappresentano rispettivamente la massa del leptone carico e del neutrino, e abbiamo introdotto il tensore leptonic $L^{\mu\nu}$ e il tensore adronico $W^{\mu\nu}$.

Il tensore leptonic è completamente determinato dalle variabili cinematiche dei leptoni e vale

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Tr}[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\not{k}\gamma^\nu(1 - \gamma^5)] \\ &= k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} k \cdot k' + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho k'_\sigma + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove i termini soppressi di un fattore m_ν non sono stati riportati.

Il tensore adronico è invece dipendente anche dal quadrimpulso trasferito tramite le funzioni di struttura, di cui d'ora in avanti non indicheremo la dipendenza da Q^2 .

³Si parla di sezione d'urto non polarizzata in quanto l'apparato sperimentale non rileva la polarizzazione dello stato finale.

3.2 Sezione d'urto CCQE neutrino su nucleone

Per eseguire il calcolo utilizziamo la Gordon-decomposition per eliminare il termine $\propto \sigma^{\mu\nu}$ e trascuriamo il termine pseudoscalare che compare nella (3.4), ottenendo:

$$W^{\mu\nu} = Tr \left\{ \frac{\not{p}' + m}{2M} [\gamma^\mu (1 - r\gamma^5) - \frac{R}{2M} \tilde{p}^\mu] \frac{\not{p} + m}{2M} [\gamma^\nu (1 - r\gamma^5) - \frac{R}{2M} \tilde{p}^\nu] \right\} (F_V + F_M)^2 \quad (3.7)$$

dove M è la massa del nucleone e abbiamo utilizzato

$$\begin{aligned} \tilde{p}^\mu &= p^\mu + p'^\mu \\ r &= -\frac{F_A}{F_V + F_M} \\ R &= \frac{F_M}{F_V + F_M} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sviluppando la traccia in (3.7) e utilizzando la conservazione del quadrimpulso possiamo esprimere il tensore adronico nella forma:

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= \left\{ -2g^{\mu\nu} \left[r^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - \frac{q^2}{4M^2} \right] \right. \\ &\quad + 2\frac{p^\mu p^\nu}{M^2} \left[1 + r^2 + R^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - 2R \right] \\ &\quad + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p_\rho p_\sigma}{2M^2} (4r) \\ &\quad + \frac{q^\mu q^\nu}{M^2} \left[\frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - R \right] \\ &\quad \left. + \frac{p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu}{M^2} \left[1 + r^2 + R^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) - 2R \right] \right\} (F_V + F_M)^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Definendo 5 funzioni di struttura:

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= \sum_{i=1}^5 \Gamma_{\mu\nu} W_i^{\mu\nu}(Q^2) \\ &= -g^{\mu\nu} W_1(Q^2) + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2} W_2(Q^2) - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p_\rho q_\sigma}{2M^2} W_3(Q^2) + \frac{q^\mu q^\nu}{M^2} W_4(Q^2) + \frac{p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu}{M^2} W_5(Q^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

e utilizzando le equazioni (3.8), (A.8) e le A.9 possiamo identificare:

$$W_1 = 2[F_A^2(1 + \tau) + \tau(F_V + F_M)^2] \quad (3.11)$$

$$W_2 = 2[F_A^2 + F_V^2 + \tau F_M^2] \quad (3.12)$$

$$W_3 = 4F_A(F_V + F_M) \quad (3.13)$$

$$W_4 = \frac{1}{2}[F_M^2(1 + \tau) - 2F_M(F_V + F_M)] \quad (3.14)$$

$$W_5 = \frac{W_2}{2} \quad (3.15)$$

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

Dalla contrazione del tensore adronico con quello leptonic otteniamo

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = & W_1(2k \cdot k') + W_2\left(2\frac{(p \cdot k')(p \cdot k)}{M^2} - k \cdot k'\right) \\
& - W_3\left(\frac{2}{M^2}\right)\left((k' \cdot q)(k \cdot p) - (k' \cdot p)(k \cdot q)\right) \\
& + W_4\left(2\frac{(k' \cdot q)(k \cdot p)}{M^2} - \frac{(k' \cdot k)q^2}{M^2}\right) \\
& + W_5 \cdot 2\left(\frac{(p \cdot k)(k \cdot q)}{M^2} - \frac{(k' \cdot k)(p \cdot q)}{M^2} + \frac{(k \cdot p)(k' \cdot q)}{M^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio, in cui il nucleone bersaglio è fermo, valgono le relazioni

$$\begin{aligned}
p^\mu &= (M, 0) \\
k^\mu &= (E, E|\mathbf{k}|) \\
k'^\mu &= (E', \mathbf{k}')
\end{aligned} \tag{3.17}$$

da cui trascurando la massa del neutrino la (3.16) diventa

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = & 2EE' \left\{ W_1(1 - v' \cos \theta) + W_2\frac{1 + v' \cos \theta}{2} \right. \\
& + W_3\left[\frac{m^2}{2ME'} - \frac{E + E'}{M}\frac{1 + v' \cos \theta}{2}\right] \\
& \left. + W_4\frac{m^2}{M^2}\frac{1 - v' \cos \theta}{2} - W_5\frac{m^2}{ME'} \right\}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

La sezione d'urto è legata all'ampiezza invariante secondo la relazione

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4(p + k - k' - p') |\bar{\mathcal{M}}|^2 \frac{m}{E'} \frac{m_\nu}{E} \frac{M}{E_n} \frac{M}{E_p} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tag{3.19}$$

dove la delta di Dirac nelle tre dimensioni spaziali permette di integrare la sezione d'urto sulle variabili cinematiche del nucleone nello stato finale. Nel sistema di riferimento del laboratorio, trascurando la massa del leptone prodotto ($|\mathbf{k}'| = E'$), otteniamo

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta\left(M + E - E' - \sqrt{M^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}\right) |\bar{\mathcal{M}}|^2 M \frac{mm_\nu}{EE_p} k' dE' d\Omega \tag{3.20}$$

La δ lega in maniera univoca l'energia del leptone emesso con l'angolo di emissione,

$$\delta\left(M + E - E' - \sqrt{M^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}\right) = \delta\left(M + E - E' - \sqrt{M^2 + E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta}\right) \tag{3.21}$$

3.2 Sezione d'urto CCQE neutrino su nucleone

da cui imponendo uguale a zero l'argomento della delta di Dirac si ottiene

$$M + E - E' = \sqrt{M^2 + E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta} \implies E'(\theta) = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (3.22)$$

Utilizzando la proprietà della funzione delta:

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \right)^{-1} \delta(x - x_0) \quad \text{con} \quad f(x_0) = 0 \quad (3.23)$$

$$\delta\left(M + E - E' - \sqrt{M^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}\right) = \delta\left(E' - \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right) \frac{E'(\theta) E_p}{EM} \quad (3.24)$$

otteniamo l'espressione della sezione d'urto differenziale per unità di angolo solido:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{G_F^2 V_{ud}^2}{(2\pi)^2 [1 + \frac{Q^2}{M_W^2}]^2} \frac{E'^3}{E} \times \\ & \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - W_3 \frac{E + E'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_4 \frac{m^2}{M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} - W_5 \frac{m^2}{ME'} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

La sezione d'urto per il processo quasi elastico di corrente carica da antineutrino

$$\bar{\nu}_l + p \rightarrow l^+ + n \quad (3.26)$$

può essere ricavata dalla (3.25) sulla base delle seguenti considerazioni; sostituire ν con $\bar{\nu}$ equivale allo scambio $k \leftrightarrow k'$ nel tensore leptónico, con conseguente cambio di segno del coefficiente di $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Poiché $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è antisimmetrico in μ e ν quando calcoliamo $L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$ esso darà un contributo non nullo solo quando contraggo con la parte antisimmetrica di $W_{\mu\nu}$, che secondo la (3.10) è proporzionale a W_3 . Lo scambio $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$ si traduce quindi in un cambio del segno del coefficiente di W_3 . Come indica la (3.13), la funzione di struttura W_3 contiene infatti termini di interferenza fra componente assiale e vettoriale della corrente adronica, dispari sotto l'operazione di coniugazione di carica.

La sezione d'urto quasi elastica per i processi da neutrino (antineutrino) è quindi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\bar{\nu}}^{\nu} = & \frac{G_F^2 V_{ud}^2}{(2\pi)^2 [1 + \frac{Q^2}{M_W^2}]^2} \frac{E'^3}{E} \times \\ & \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \mp W_3 \frac{E + E'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_4 \frac{m^2}{M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} - W_5 \frac{m^2}{ME'} \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

Possiamo introdurre con procedimento analogo la sezione d'urto in Q^2 , riportata dettagliatamente in appendice a Ref. (23)

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{64\pi M_N^2 E_\nu^2}. \quad (3.28)$$

Utilizzando l'espressione per l'ampiezza \mathcal{M} 3.4 calcolata in precedenza, otteniamo

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} \left(\begin{array}{l} \nu_l + n \rightarrow l^- + p \\ \bar{\nu}_l + p \rightarrow l^+ + n \end{array} \right) = \frac{M^2 G_F^2 V_{ud}^2}{8\pi E_\nu^2} \left[A(Q^2) \pm B(Q^2) \frac{(s-u)}{M^2} + C(Q^2) \frac{(s-u)^2}{M^4} \right], \quad (3.29)$$

dove s e u sono le variabili di Mandelstam, che nel sistema del laboratorio (trascurando la massa del leptone) valgono

$$\begin{aligned} s &= (p+k)^2 = (p'+k')^2 \\ u &= (k'-p)^2 = (p'-k)^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (s-u) = 4ME_\nu - Q^2. \quad (3.30)$$

Le funzioni $A(Q^2)$, $B(Q^2)$ e $C(Q^2)$, tenendo conto delle definizioni dei fattori di forma nucleari, assumono il valore

$$\begin{aligned} A(Q^2) &= \frac{Q^2}{M^2} [(1+\tau)F_A^2 - (1-\tau)F_1^2 + \tau(1-\tau)F_2^2 + 4\tau F_1 F_2], \\ B(Q^2) &= \frac{Q^2}{M^2} F_A(F_1 + F_2), \\ C(Q^2) &= \frac{1}{4}(F_A^2 + F_1^2 + \tau F_2^2). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Questa espressione ci sar  comoda successivamente, per poter confrontare le sezioni d'urto CCQE e NCE.

3.3 Sezione d'urto NCE neutrino su nucleone

Consideriamo lo scattering elastico di corrente neutra di un neutrino su un nucleone libero. Il processo da studiare   3.3

$$\nu + N \rightarrow \nu + N. \quad (3.32)$$

Dalle regole di Feynman possiamo scrivere l'ampiezza invariante nella forma

$$\mathcal{M} = \left(\frac{ig_{\mu\nu}}{4\cos\theta_W} \right)^2 \bar{\nu}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu(k) (-i) \left(\frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_Z^2}{q^2 - M_Z^2} \right) \langle N(p') | J_Z^\nu | N(p) \rangle \quad (3.33)$$

dove

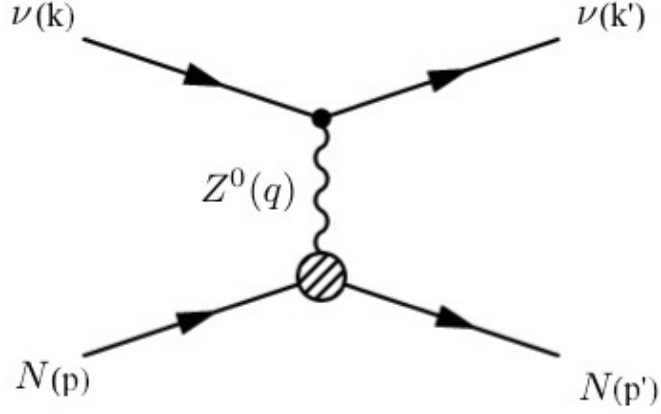


Figura 3.3: - Diagramma di Feynman per lo scattering di corrente neutra neutrino-nucleone.

- M_Z è la massa del bosone vettoriale neutro Z^0 ,
- θ_W è l'angolo di Weinberg , angolo di mixing tra i campi vettoriali neutri della teoria elettrodebole,
- $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico,
- ν e $\bar{\nu}$ sono i campi di Dirac associati al neutrino dello stato iniziale e finale,
- J_Z è la corrente neutra adronica.

Nel limite di basse energie $q^2 \ll M_Z^2$, il propagatore diventa costante

$$-i \left(\frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_Z^2}{q^2 - M_Z^2} \right) \Rightarrow i \frac{g_{\mu\nu}}{M_Z^2} . \quad (3.34)$$

La scrittura può essere ulteriormente semplificata utilizzando la definizione della costante di Fermi

$$G_F = \frac{\sqrt{2} g^2}{8M_W^2} = \frac{\sqrt{2} g^2}{8M_Z^2 \cos^2\theta_W} . \quad (3.35)$$

L'ampiezza invariante del processo di corrente neutra 3.32 è dunque

$$\mathcal{M} = \frac{i}{2\sqrt{2}} G_F \underbrace{\bar{\nu}(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu(k)}_{\text{corrente leptonica}} \underbrace{\langle N(p') | J_Z^\mu | N(p) \rangle}_{\text{corrente adronica}} . \quad (3.36)$$

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

La corrente leptonica ha una semplice struttura V-A, completamente determinata dalla cinematica, mentre la corrente adronica risulta maggiormente complessa per via delle interazioni forti che coinvolgono i costituenti dei nucleoni.

La corrente adronica debole neutra nella sua forma più generale sarà

$$\langle N(p') | J_Z^\mu | N(p) \rangle = \left[\underbrace{\gamma^\mu F_1^z(Q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M_N} F_2^z(Q^2)}_{\text{corrente adronica vettoriale } J_{Z,V}^\mu} + \underbrace{\gamma^\mu \gamma^5 F_A^z(Q^2)}_{\text{corrente adronica assiale } -J_{Z,A}^\mu} \right] | N(p) \rangle, \quad (3.37)$$

dove F_1^z , F_2^z e F_A^z sono rispettivamente i fattori di forma adimensionali di Dirac, Pauli e assiale per le correnti neutre nella loro forma più generale, che tiene conto del contributo vettoriale e di quello scalare⁴.

La sezione d'urto per unità di angolo solido del leptone nello stato finale nel sistema del centro di massa vale (Ref. (25),(26))

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 (E_\nu + E_p)^2} \left(\frac{E'}{E_\nu} \right), \quad (3.38)$$

dove $|\bar{\mathcal{M}}|$ è l'ampiezza invariante di Feynman mediata sugli spin delle particelle nello stato iniziale e sommata sugli spin dello stato finale, poiché la polarizzazione delle particelle non è in genere misurata dagli esperimenti.

Tale relazione può essere sviluppata in analogia a quanto visto nella sezione 3.2, stavolta nel sistema di riferimento del centro di massa (rappresentato in figura 3.4), dove i quadrimpulsi delle particelle valgono

$$k_\alpha = (E_\nu, 0, 0, E_\nu), \quad (3.39)$$

$$p_\alpha = (\sqrt{(-E_\nu)^2 + M^2}, 0, 0, -E_\nu), \quad (3.40)$$

$$k'_\alpha = (E', E' \sin\theta, 0, E' \cos\theta), \quad (3.41)$$

$$p'_\alpha = (\sqrt{(-E')^2 + M^2}, -E' \sin\theta, 0, E' \cos\theta). \quad (3.42)$$

⁴I fattori di forma per le correnti neutre sono descritti con maggiore dettaglio nell'appendice A.

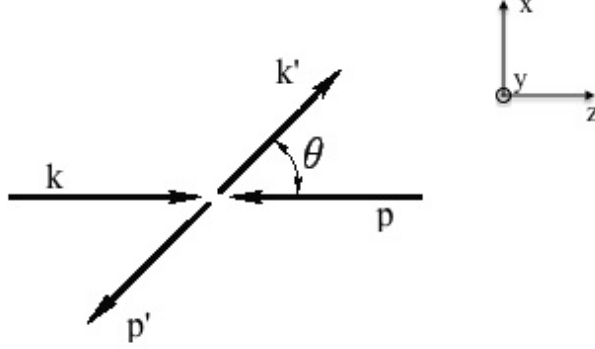


Figura 3.4: - Lo scattering NCE nel sistema di riferimento del centro di massa.

Di seguito ci soffermiamo sull'ampiezza invariante, parametrizzata seguendo il ref.(27) in sei contributi

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 4G_F^2(V_{11} + V_{12} + V_{22} + A + V_{A1} + V_{A2}), \quad (3.43)$$

dove

$$V_{11} = 4(F_1^z)^2 \left[(p \cdot k)(k' \cdot p') + (p' \cdot k)(k' \cdot p) - M^2(k \cdot k') \right], \quad (3.44)$$

$$V_{12} = -4F_1^z F_2^z (k \cdot k')(p' - p) \cdot (k - k'), \quad (3.45)$$

$$V_{22} = \frac{2(F_2^z)^2}{M^2} (k \cdot k') \left[(p \cdot k)(p' \cdot k) + (p \cdot k')(p' \cdot k') + M^2(k \cdot k') \right], \quad (3.46)$$

$$A = 4(G_A)^2 \left[(p \cdot k)(k' \cdot p') + (p' \cdot k)(k' \cdot p) + M^2(k \cdot k') \right], \quad (3.47)$$

$$V_{A1} = \pm 8G_A F_1^z \left[(p \cdot k)(p' \cdot k') - (k \cdot p')(p \cdot k') \right], \quad (3.48)$$

$$V_{A2} = \pm 4G_A F_2^z (k \cdot k')(k + k') \cdot (p + p'). \quad (3.49)$$

Nelle equazioni 3.48 e 3.49 il segno + è riferito allo scattering dei neutrini, mentre il - allo scattering di antineutrini⁵.

⁵Per uniformare il formalismo tra il ref.(27) e la tesi è stato utilizzato il fattore di forma G_A . Tale parametro può essere riportato a quelli indicati in appendice mediante l'uguaglianza

$$G_A = - \left(\frac{g_A - \Delta s}{g_A + \Delta s} \right) F_A^z \quad (3.50)$$

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

Analogamente al caso di corrente carica studiamo adesso la sezione d'urto in Q^2 . Nel sistema di riferimento del laboratorio e trascurando i termini proporzionali alla massa del neutrino questa vale

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{64\pi M_N^2 E_\nu^2}. \quad (3.51)$$

Il valore di Q^2 si ottiene dalla cinematica e, nell'ipotesi che il nucleone iniziale sia in stato di quiete, vale

$$Q^2 = 2M_N T_N, \quad (3.52)$$

con T_N energia cinetica del nucleone nello stato finale. Tale valore non dipende dall'angolo di scattering che non viene misurato in tutti gli esperimenti.

L'espressione per lo scattering di corrente neutra su un nucleone libero si può esprimere in analogia al caso di corrente carica come

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{G_F^2 Q^2}{2\pi E_\nu^2} [A(Q^2) \pm B(Q^2)W + C(Q^2)W^2] \quad (3.53)$$

dove la soluzione con il $+$ è per i neutrini e quella con il $-$ per gli antineutrini e $W = W(E_\nu, Q^2)$ vale

$$W = \frac{4E_\nu}{M_N} - \frac{Q^2}{M_N^2} \quad (3.54)$$

Le quantità $A(Q^2)$, $B(Q^2)$ e $C(Q^2)$ sono funzioni dei fattori di forma per le correnti neutre definite come

$$A(Q^2) = \frac{1}{4} [(F_A^z)^2(1 + \tau) - ((F_1^z)^2 - \tau(F_2^z)^2)(1 - \tau) + 4\tau F_1^z F_2^z], \quad (3.55)$$

$$B(Q^2) = -\frac{1}{4} F_A^z (F_1^z + F_2^z), \quad (3.56)$$

$$C(Q^2) = \frac{M_N^2}{16Q^2} [(F_A^z)^2 + (F_1^z)^2 + \tau(F_2^z)^2], \quad (3.57)$$

con $\tau = Q^2/4M_N^2$, dove M_N è la massa del nucleone scatterato.

A bassi Q^2 domina il fattore di forma $C(Q^2)$, quindi la corrente neutra risulta avere un importante contributo dal termine assiale.

3.4 Teoria fenomenologica dello scattering neutrino-nucleo

Questa relazione poteva essere ottenuta direttamente dalla sezione d'urto 3.29 di corrente carica utilizzando le sostituzioni (Ref. (23))

$$\begin{aligned}
G_F \cos\theta_c &\rightarrow G_F, \\
m_l &\rightarrow m_\nu, \\
F_1^p &\rightarrow \left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W\right)F_1 - \sin^2\theta_W(F_1^{EM,p} + F_1^{EM,n}) - \frac{1}{2}F_1^s, \\
F_1^n &\rightarrow -\left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W\right)F_1 - \sin^2\theta_W(F_1^{EM,p} + F_1^{EM,n}) - \frac{1}{2}F_1^s, \\
F_2^p &\rightarrow \left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W\right)F_2 - \sin^2\theta_W(F_2^{EM,p} + F_2^{EM,n}) - \frac{1}{2}F_2^s, \\
F_2^n &\rightarrow -\left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W\right)F_2 - \sin^2\theta_W(F_2^{EM,p} + F_2^{EM,n}) - \frac{1}{2}F_2^s, \\
F_A^p &\rightarrow \frac{1}{2}(F_A - F_A^s), \\
F_A^n &\rightarrow -\frac{1}{2}(F_A + F_A^s).
\end{aligned} \tag{3.58}$$

3.4 Teoria fenomenologica dello scattering neutrino-nucleo

Finora ci siamo soffermati sulle sezioni d'urto neutrino-nucleone. Nell'estendere il ragionamento alle interazioni neutrino-nucleo bisogna introdurre alcune approssimazioni che ci permettano di schematizzare il processo in maniera il più semplice possibile, tenendo però conto di tutti i fattori di correlazione principali. Per fare questo sarà necessario introdurre una descrizione realistica della dinamica nucleare, basata sulla NMBT in approssimazione impulsiva (IA).

Di seguito svilupperemo la sezione d'urto neutrino-nucleo per energie ≈ 1 GeV, tali che i contributi dominanti siano dati dalle reazioni quasi-elastiche (CCQE). Ulteriori contributi alla sezione d'urto per $E_\nu > 0.5$ GeV provengono dalla produzione di risonanze (prevalentemente la risonanza Δ), mentre gli effetti di Deep Inelastic Scattering possono essere trascurati a questa scala.

3.4.1 L'approssimazione impulsiva

Consideriamo lo scattering (Fig. 3.6)

$$\nu_l + A \rightarrow l^- + X, \tag{3.59}$$

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

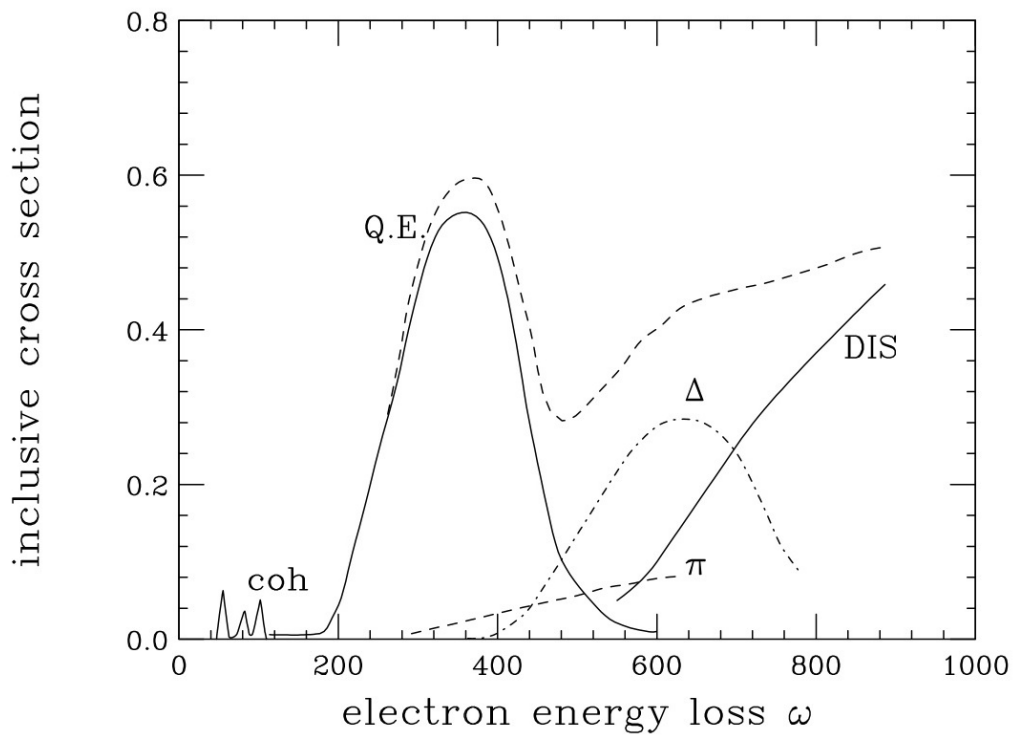


Figura 3.5: - Esempio di sezione d'urto inclusiva in funzione dell'energia trasferita a energie del fascio di neutrini ≈ 1 GeV.

3.4 Teoria fenomenologica dello scattering neutrino-nucleo

dove un neutrino di quadrimpulso $k^\mu = (E, \mathbf{k})$ interagisce con un nucleo A per dare nello stato finale un leptone carico l^- e uno stato X non osservato⁶.

La sezione d'urto per tale processo si scrive in approssimazione di Born

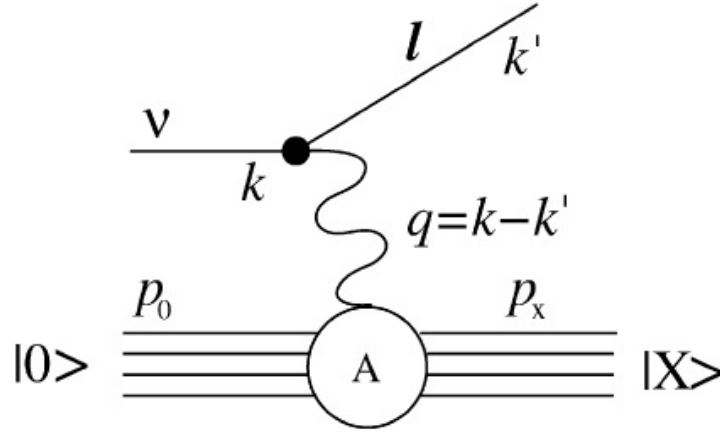


Figura 3.6: - Diagramma di Feynman per il processo $\nu_l + A \rightarrow l^- + X$.

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_l} = \frac{G_F^2 V_{ud}^2}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} L_{\mu\nu} W_A^{\mu\nu}, \quad (3.60)$$

dove G_F è la costante di Fermi e V_{ud} è l'elemento della matrice CKM che accoppia i quark u e d .

Analogamente allo scattering neutrino-nucleone (sezione 3.2), il tensore leptonic può essere scritto a partire da considerazioni riguardo alla cinematica dei leptoni e vale

$$L^{\mu\nu} = 8[k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} k \cdot k' + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho k'_\sigma]. \quad (3.61)$$

Il tensore nucleare $W_A^{\mu\nu}$ contiene tutte le informazioni sulle interazioni forti all'interno del nucleo, dallo stato iniziale $|0\rangle$ allo stato finale $|X\rangle$

$$W_A^{\mu\nu} = \sum_X \langle 0 | (J_A^\mu)^\dagger | X \rangle \langle X | J_A^\nu | 0 \rangle \delta^4(p_0 + q - p_X), \quad (3.62)$$

dove la somma è estesa a tutti i possibili stati finali X , $q = (\nu, \mathbf{q})$ il quadrimpulso trasferito e la δ di Dirac impone la conservazione del quadrimpulso.

A energie $E_\nu \approx 1$ GeV, l'impulso trasferito $|\mathbf{q}|$ è tale che nel calcolo di $W_A^{\mu\nu}$ bisogna

⁶Si parla di sezione d'urto inclusiva.

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

considerare i nucleoni che compongono il nucleo come particelle relativistiche⁷. Infatti una sonda (come il neutrino) che trasferisce al bersaglio un impulso \mathbf{q} per il principio di indeterminazione di Heisenberg ha una risoluzione spaziale $\approx 1/|\mathbf{q}|$. A grandi $|\mathbf{q}|$ ci troviamo quindi in una regione dove dominano gli effetti quantistici.

L' *approssimazione impulsiva* (IA) consiste nel considerare che per grandi impulsi trasferiti

- il nucleo bersaglio è visto dalla sonda come un insieme di nucleoni distinti,
- le particelle prodotte e il nucleo che rincula (A-1) evolvono indipendentemente.

Quindi nell' IA trascuriamo la correlazione statistica di Pauli all'interno del nucleo (Pauli Blocking) e le interazioni nello stato finale (FSI), che possono essere aggiunte alla fine secondo i metodi operativi descritti in ref. (28).

In questo schema possiamo considerare la corrente nucleare come la somma delle singole correnti di nucleone, mentre lo stato finale si riduce al prodotto diretto tra lo stato adronico i-esimo prodotto nel vertice debole (con momento \mathbf{p}_x) e lo stato che descrive il nucleo (A-1) residuo che rincula con momento \mathbf{p}_R , come rappresentato schematicamente in figura 3.7

$$J_A^\mu \Rightarrow \sum_i^A j_i^\mu \quad , \quad |X\rangle \Rightarrow |x, \mathbf{p}_x\rangle \otimes |R, \mathbf{p}_R\rangle \quad (3.63)$$

Andiamo a calcolare dettagliatamente il tensore $W_A^{\mu\nu}$.

Dal confronto tra l'espressione 3.63 per lo stato finale in approssimazione impulsiva e la relazione 3.62 otteniamo per la somma su tutti gli stati finali X

$$\sum_X |X\rangle\langle X| \Rightarrow \sum_x \int d^3 p_x |x, \mathbf{p}_x\rangle\langle x, \mathbf{p}_x| \sum_R \int d^3 p_R |R, \mathbf{p}_R\rangle\langle R, \mathbf{p}_R|. \quad (3.64)$$

⁷Quando $|\mathbf{q}| < 0.5$ GeV possiamo calcolare $W_A^{\mu\nu}$ nell'ambito della NMBT utilizzando funzioni d'onda non relativistiche per descrivere gli stati $|0\rangle$ e $|X\rangle$.

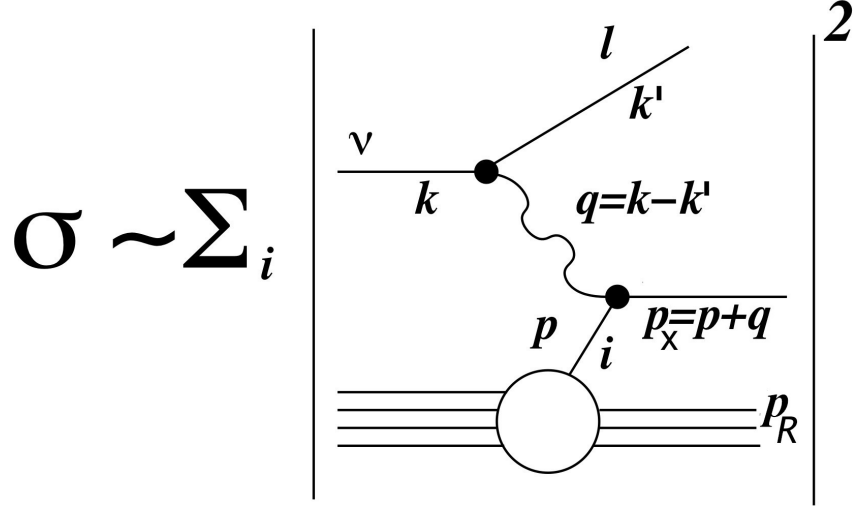


Figura 3.7: - Rappresentazione dell'approssimazione impulsiva.

Sostituendo le 3.63 e la 3.64 e inserendo un set completo di stati di nucleone libero⁸ $|N, \mathbf{p}\rangle$ in 3.62, la corrente J^μ si fattorizza, assumendo la forma

$$\langle 0|J^\mu|X\rangle = \left(\frac{M}{\sqrt{\mathbf{p}_R^2 + M^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \langle 0|R, \mathbf{p}_R; N, -\mathbf{p}_R\rangle \sum_i \langle -\mathbf{p}_R, N|j_i^\mu|x, \mathbf{p}_x\rangle, \quad (3.66)$$

dove M è la massa del nucleone scatterato.

Il tensore adronico diventa

$$\begin{aligned} W_A^{\mu\nu} &= \sum_{x,R} \int d^3p_R d^3p_x |\langle 0|R, \mathbf{p}_R; N, -\mathbf{p}_R\rangle|^2 \frac{M}{E_{\mathbf{p}_R}} \\ &\times \sum_i \langle N, -\mathbf{p}_R|j_i^\mu|x, \mathbf{p}_x\rangle \langle x, \mathbf{p}_x|j_i^\nu|N, -\mathbf{p}_R\rangle \\ &\times \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_R - \mathbf{p}_x) \delta(\nu + E_0 - E_R - E_x), \end{aligned} \quad (3.67)$$

dove $E_{\mathbf{p}_R} = \sqrt{|\mathbf{p}_R|^2 + M^2}$.

⁸Per definizione vale la relazione di completezza

$$\int d^3p |N, \mathbf{p}\rangle \langle N, \mathbf{p}| = \mathbb{I}. \quad (3.65)$$

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

Adesso introduciamo l'identità

$$\delta(\nu + E_0 - E_R - E_x) = \int dE \delta(E - M + E_0 - E_R) \delta(\nu - E + M - E_x), \quad (3.68)$$

che ci permette di scrivere l'equazione 3.67 come

$$\begin{aligned} W_A^{\mu\nu} &= \sum_{x,R} \int d^3 p_R d^3 p_x dE |\langle 0 | R, \mathbf{p}_R; N, -\mathbf{p}_R \rangle|^2 \delta(E - M + E_0 - E_R) \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_R - \mathbf{p}_x) \\ &\times \frac{M}{E_{\mathbf{p}_R}} \sum_i \langle N, -\mathbf{p}_R | j_i^\mu | x, \mathbf{p}_x \rangle \langle x, \mathbf{p}_x | j_i^\nu | N, -\mathbf{p}_R \rangle \delta(-E + M + \nu - E_x). \end{aligned} \quad (3.69)$$

La quantità

$$P(E, \mathbf{p}) = \sum_R |\langle 0 | R, -\mathbf{p}; N, \mathbf{p} \rangle|^2 \delta(E - M + E_0 - E_R), \quad (3.70)$$

è detta *funzione spettrale* del nucleo bersaglio, e rappresenta la distribuzione di probabilità di trovare un nucleone con impulso \mathbf{p} e energia⁹ E all'interno del nucleo A .

Introducendo questa espressione in 3.69 otteniamo il tensore adronico in forma compatta

$$W_A^{\mu\nu} = \sum_i \int d^3 p dE P(E, \mathbf{p}) \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} w_i^{\mu\nu}(\tilde{q}), \quad (3.71)$$

dove $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2}$ e $w_i^{\mu\nu}$ vale

$$w_i^{\mu\nu} = \sum_x \langle N, \mathbf{p} | j_i^\mu | x, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle \langle x, \mathbf{p} + \mathbf{q} | j_i^\nu | N, \mathbf{p} \rangle \delta(\tilde{\nu} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} - E_x). \quad (3.72)$$

Gli effetti del legame nucleare tra i nucleoni sono tenuti in conto nell'approssimazione impulsiva mediante la sostituzione

$$q = (\nu, \mathbf{q}) \Rightarrow \tilde{q} = (\tilde{\nu}, \mathbf{q}) \quad (3.73)$$

nell'argomento di $w_i^{\mu\nu}$ con

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &= E_x - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} \\ &= \nu + E_0 - E_R - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} \\ &= \nu - E + M - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} = \nu - \delta\nu. \end{aligned} \quad (3.74)$$

⁹Si parla di energia di rimozione, poichè il nucleone è legato all'interno del nucleo.

3.4 Teoria fenomenologica dello scattering neutrino-nucleo

In questo modo formalizzo l'effetto per cui nello scattering una parte dell'energia del neutrino $\delta\nu$ va in energia di eccitazione del sistema¹⁰. Effettuata la sostituzione $\nu \rightarrow \tilde{\nu}$ possiamo considerare i nucleoni liberi.

Per uniformare la notazione con la sezione d'urto neutrino-nucleone calcolata nella sezione 3.2 consideriamo $\sum_i w_i^{\mu\nu} \rightarrow W^{\mu\nu}$ da cui

$$W_A^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^3p dE P(E, \mathbf{p}) \frac{1}{4E_{|\mathbf{p}|} E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}} W^{\mu\nu}(\tilde{q}), \quad (3.75)$$

dove $W^{\mu\nu}$ è il tensore adronico 3.10 che descrive le interazioni deboli per il nucleone libero.

La sezione d'urto per lo scattering neutrino-nucleo in approssimazione impulsiva sarà quindi

$$\frac{d^2\sigma_{IA}}{d\Omega dE_l} = \int d^3p dE P(E, \mathbf{p}) \frac{d^2\sigma_{elem}}{d\Omega dE_l}, \quad (3.76)$$

dove gli estremi di integrazione sono indicati in appendice B.

La sezione d'urto elementare vale

$$\frac{d^2\sigma_{elem}}{d\Omega dE_l} = \frac{G_F^2 V_{ud}^2 |\mathbf{k}'|}{32\pi^2 |\mathbf{k}|} \frac{1}{4E_{|\mathbf{p}|} E_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \quad (3.77)$$

Ricapitolando, abbiamo trovato che per ottenere il contributo quasi-elastico alla sezione d'urto del processo di scattering neutrino-nucleo dobbiamo

- sostituire $q \rightarrow \tilde{q}$ per tenere conto del legame tra i nucleoni,
- calcolare la sezione d'urto elementare neutrino-nucleone,
- integrare sulla funzione spettrale per pesare il contributo dei diversi nucleoni in base al quadrimpulso.

¹⁰Tale interpretazione è immediata nel limite $p \ll M$ dove $\delta\nu = E$.

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

3.4.2 La funzione spettrale

Come accennato nella sezione 2.2.2, nella NMBT il nucleo è considerato un sistema di A nucleoni la cui dinamica può essere descritta dall' hamiltoniana non relativistica

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{j>i} v_{ij} + \sum_{k>j>i} V_{ijk} \quad (3.78)$$

dove \mathbf{p}_i è l'impulso del nucleone i -esimo, mentre v_{ij} è il potenziale di interazione a due nucleoni, che nel limite di grandi distanze tra le particelle si riduce al potenziale di Yukawa per lo scambio di un pione, e V_{ijk} è il potenziale di interazione a tre nucleoni che riproduce gli effetti del legame.

Nell'ambito della teoria nucleare a molti corpi è stato possibile calcolare¹¹ la funzione spettrale per atomi leggeri ($A \leq 4$) e nel limite di materia nucleare uniforme ($A \rightarrow \infty$). Per nuclei più pesanti la teoria non è più valida e dobbiamo quindi introdurre alcune approssimazioni che ci permettano di eseguire i calcoli.

L'approssimazione più semplice consiste nel considerare i nuclei come un gas degenere di nucleoni non interagenti (RFGM 2.1), così da poter scrivere la funzione spettrale come

$$P_{RFGM}(E, \mathbf{p}) = \left(\frac{6\pi^2 A}{p_F^3} \right) \Theta(p_F - \mathbf{p}) \delta(E_{\mathbf{p}} - E_B + E), \quad (3.79)$$

dove l'impulso di Fermi p_F e l'energia che tiene conto del legame nucleare E_B sono due parametri che vengono modificati per riprodurre i dati sperimentali. La Θ di Heaviside in 3.79 fa sì che la funzione spettrale sia diversa da zero solo per impulsi $p < p_F$.

Dall'analisi dello scattering per gli elettroni è stato possibile osservare che, in presenza di forti effetti di correlazione dinamica NN, si hanno processi di scattering virtuale che promuovono i nucleoni in stati di energia maggiore del livello di Fermi, svuotando gli stati che sarebbero pieni in base allo shell model. Abbiamo quindi bisogno di una funzione spettrale che si estenda anche a $p \gg p_F$.

La funzione spettrale per nuclei più pesanti che tiene conto degli effetti del legame (*binding*) e della correlazione tra i nucleoni può essere ottenuta nell'ambito dell'approccio LDA (*Local Density Approximation*), che combina le informazioni teoriche sulla

¹¹Si veda la bibliografia del Ref. (28).

3.4 Teoria fenomenologica dello scattering neutrino-nucleo

funzione spettrale della materia nucleare a diverse densità con esperimenti di scattering con espulsione del nucleone dal nucleo (da cui otteniamo informazioni sull'energia di rimozione).

Affinché sia possibile utilizzare quanto trovato per la materia nucleare uniforme (con $A \rightarrow \infty$ e $\rho = cost.$) per i nuclei (con numero di massa A finito e densità non costante) dobbiamo introdurre l'ipotesi fondamentale che le forze a corto raggio tra i nucleoni, responsabili della correlazione, non risentano di effetti di superficie o dovuti alla struttura a shell del nucleo.

Nell'ambito della teoria LDA la funzione spettrale è parametrizzata in due parti :

- il contributo dello shello model (ovvero di campo medio)

$$P_{MF}(E, \mathbf{p}) = \sum_n Z_n |\phi_n(\mathbf{p})|^2 F_n(E - E_n), \quad (3.80)$$

dove

- Z_n è la costante di rinormalizzazione, detta fattore spettroscopico, che tiene conto delle interazioni non incluse nel campo medio,
- $\phi_n(\mathbf{p})$ è la funzione d'onda di Woods-Saxon di singola particella nello spazio delle fasi dell'impulso,
- $F_n(E - E_n)$ è una lorentziana che descrive l'ampiezza in energia,

In assenza di correlazione $Z_n = 1$ e $F_n(E - E_n) \rightarrow \delta(E - E_n)$.

- il contributo degli effetti di correlazione tra i nucleoni

$$P_{corr}(E, \mathbf{p}) = \int d^3r \rho_A(\mathbf{r}) P_{corr}^{NM}(E, \mathbf{p}; \rho = \rho_A(\mathbf{r})), \quad (3.81)$$

dove

- ρ_A è la densità del nucleo in funzione della distanza dal centro,
- $P_{corr}^{NM}(E, \mathbf{p}; \rho)$ è il termine di correlazione della funzione spettrale per la materia nucleare uniforme a densità ρ (Ref.(29)).

Generalmente il contributo dello shell model è circa l'80 % del totale e diventa trascurabile per $|\mathbf{p}| > 250 MeV \approx p_F$ quando gli effetti di correlazione prendono il sopravvento.

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

La funzione spettrale nucleare totale nell'approccio LDA è quindi

$$P_{LDA}(E, \mathbf{p}) = P_{MF}(E, \mathbf{p}) + P_{corr}(E, \mathbf{p}). \quad (3.82)$$

che deve essere normalizzata a 1

$$\int d^3p dE P_{LDA}(E, \mathbf{p}) = 1. \quad (3.83)$$

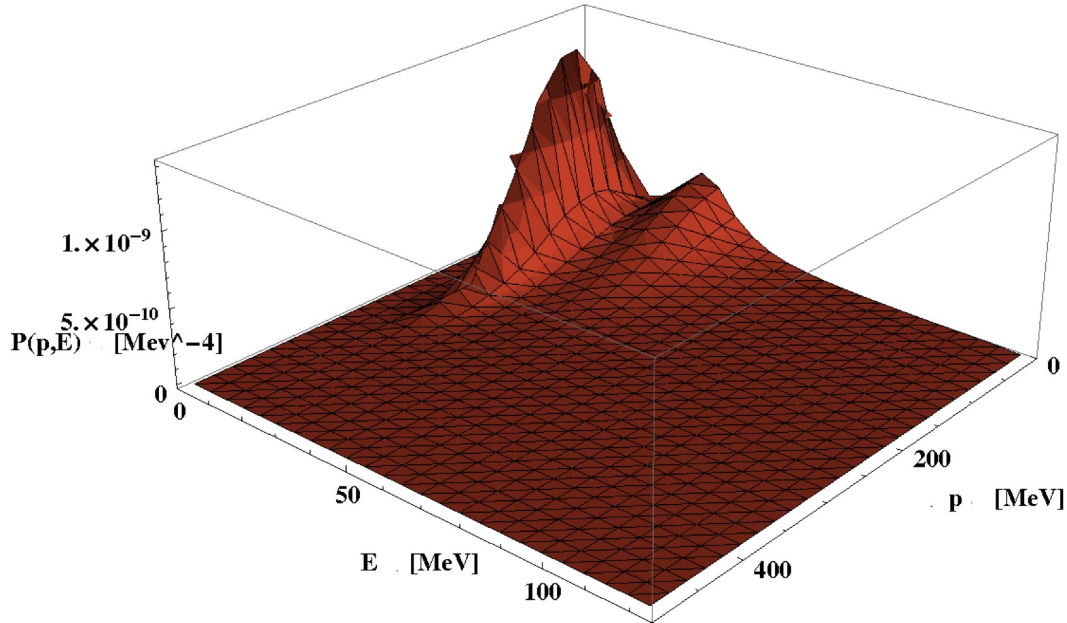


Figura 3.8: - Funzione spettrale per il carbonio ottenuta nell'approccio LDA.

In figura 3.8 è riportata la funzione spettrale del carbonio (Ref. (29)), che utilizzeremo nella sezione 5 per studiare lo scattering di neutrini su nucleo e confrontarlo con i dati dell'esperimento MiniBooNE.

Un banco di prova importante per l'approccio LDA è rappresentato dal calcolo della distribuzione in momento dei nucleoni

$$n(\mathbf{p}) = \int dE P(E, \mathbf{p}) = \langle 0 | a_p^\dagger a_p | 0 \rangle, \quad (3.84)$$

dove abbiamo introdotto gli operatori di creazione e distruzione di un nucleone di momento \mathbf{p} .

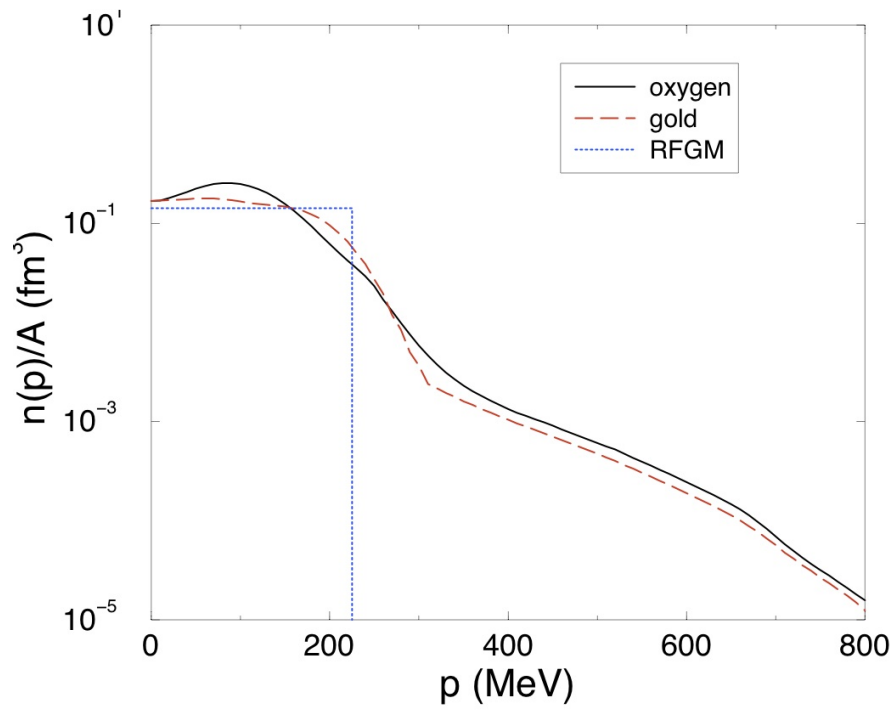


Figura 3.9: - Distribuzione in momento dei nucleoni per unità di numero di massa per nuclei di ossigeno (linea continua) e d'oro (linea tratteggiata), ref. (11). La funzione gradino corrisponde ad una distribuzione di Fermi con $p_F = 225$ MeV e $E_B = 25$ MeV.

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

La figura 3.9 mostra che le ipotesi della teoria sono solide in quanto $n(\mathbf{p})/A$ è indipendente dal numero di massa A . Inoltre risulta evidente che un approccio come il RFGM che trascura gli effetti di correlazione non sia adatto per modellare la funzione spettrale in quanto non descrive la coda a grande impulso.

3.4.3 Pauli Blocking

Come detto in precedenza, in questa trattazione sono stati trascurati gli effetti della correlazione statistica, che portano al cosiddetto Pauli Blocking che riduce lo spazio delle fasi disponibile al nucleone nello stato finale.

Tale effetto può essere tenuto in considerazione introducendo una Θ di Heaviside che impone la condizione 3.85 sulla funzione spettrale (Ref. (28))

$$P(E, \mathbf{p}) \Rightarrow P(E, \mathbf{p}) \Theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - \bar{p}_F), \quad (3.85)$$

dove \bar{p}_F è il momento di Fermi medio per il nucleo definito come

$$\begin{aligned} \bar{p}_F &= \int d^3r \rho_A(\mathbf{r}) p_F(\mathbf{r}), \\ p_F(\mathbf{r}) &= (3\pi^2 \rho_A(\mathbf{r})/2)^{1/3}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

con $\rho_A(\mathbf{r})$ distribuzione della densità di carica nucleare. Per il carbonio le relazioni 3.86 ci permettono di trovare $\bar{p}_F = 225 \text{ MeV}$.

Il PB sopprime la sezione d'urto a bassi Q^2 ($\leq 0.2 \text{ GeV}^2$), mentre la lascia praticamente invariata ad alti Q^2 .

3.4.4 Final State Interactions

Le interazioni tra le particelle nello stato finale, dette *Final State Interactions* (FSI), sono espressamente trascurate nell'approssimazione impulsiva (IA). Gli effetti di tali interazioni diventano dominanti nella regione di bassa energia trasferita ν , dove la sezione d'urto inclusiva è più sensibile all'alto impulso e alle code ad alta energia di rimozione della funzione spettrale.

Le FSI comportano:

3.4 Teoria fenomenologica dello scattering neutrino-nucleo

- un abbassamento del picco quasi-elastico della sezione d'urto, che viene ridistribuito alla coda della distribuzione (scattering NN nello stato finale);
- uno shift a energie inferiori del picco della sezione d'urto, poiché il nucleone colpito risente del campo medio del sistema spettatore.

Gli effetti della FSI sulla sezione d'urto possono essere introdotti nella trattazione mediante la cosiddetta *correlated Glauber approximation* descritta nel ref. (30). Tale approccio si basa su alcune assunzioni fondamentali

- il nucleone colpito si muove su una traiettoria dritta a velocità costante (*Eikonal approximation*);
- i nucleoni del sistema spettatore sono fermi (*frozen approximation*).

Nel carbonio ci aspettiamo una variazione della sezione d'urto a bassi Q^2 del 20% a seconda che consideriamo o meno le FSI.

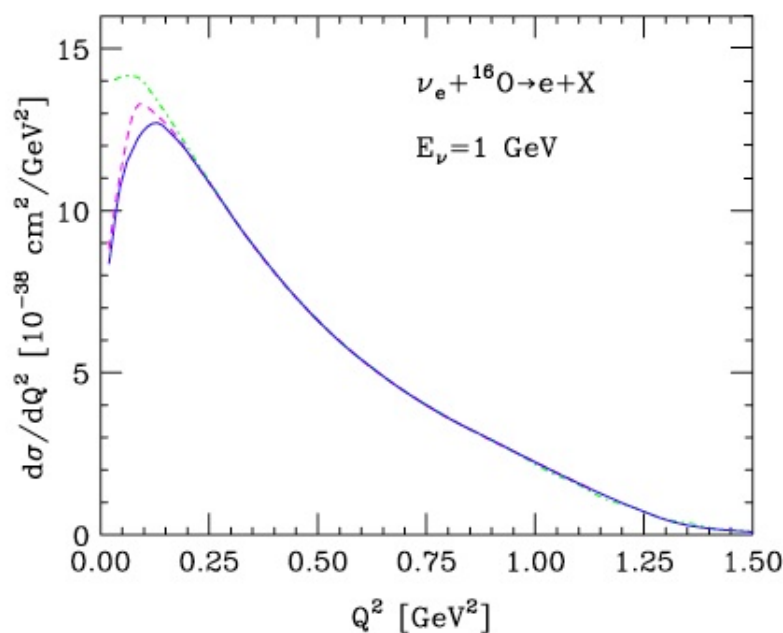


Figura 3.10: - Esempio dell'effetto di PB e FSI sulla sezione d'urto per lo scattering $\nu_e + {}^{16}\text{O} \rightarrow e + X$ a $E_\nu = 1$ GeV, ref. (28). La curva verde è calcolata tenendo conto soltanto dell' IA, quella rosa introduce l'effetto del PB e quella blu (continua) rappresenta il calcolo completo che tiene conto anche delle FSI.

3. INTERAZIONI NEUTRINO-NUCLEO

4

L'esperimento MiniBooNE

L'esperimento MiniBooNE (Mini Booster Neutrino Experiment) è stato realizzato per verificare le osservazioni sulle oscillazioni di neutrino del detector LSND (Liquid Scintillator Neutrino Detector (31)), il quale aveva rilevato segnali compatibili con l'oscillazione $\Delta m^2 \approx 1eV^2$. Tali segnali uniti alle osservazioni per i neutrini solari e atmosferici indicano l'esistenza di un quarto neutrino, di massa $\approx 1eV$ e che non interagisce debolmente, da cui la denominazione di neutrino *sterile*.

A partire dal 2002 fino ad arrivare a oggi, MiniBooNE ha raccolto una grande quantità di eventi di scattering neutrino-nucleo, fornendo informazioni fondamentali nello studio della sezione d'urto di corrente carica e neutra.

4.1 L'apparato sperimentale di MiniBooNE

4.1.1 La neutrino-baseline

MiniBooNE è caratterizzato da una lunga *baseline* di 550 metri e una distribuzione in energia dei neutrini piccata attorno a 800 MeV, in modo da avere lo stesso rapporto L/E di LSND ed essere quindi sensibile allo stesso tipo di oscillazioni, ma con una maggiore energia del fascio.

La figura 4.1 rappresenta schematicamente il fascio di neutrini utilizzato nei vari stadi dell'esperimento

- un fascio di protoni è accelerato dal Booster a sincrotrone del Fermilab ad un'energia di circa 8 GeV e indirizzato lungo la beamline di MiniBooNE dove i protoni collidono con un target di berillio;

4. L'ESPERIMENTO MINIBOONE

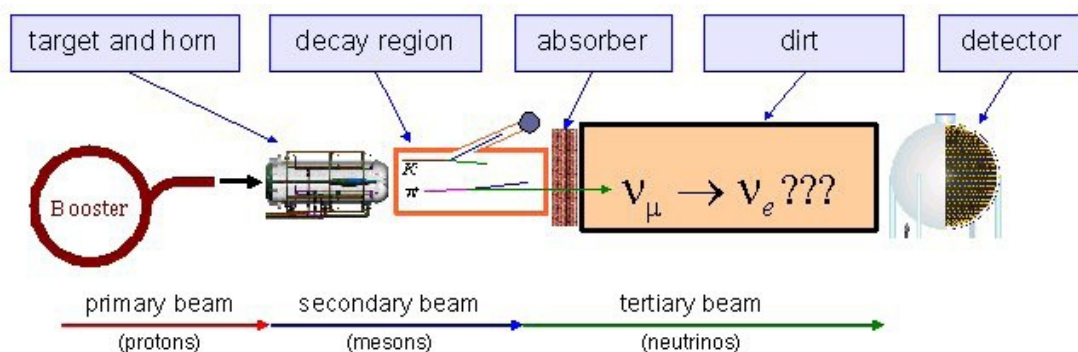


Figura 4.1: - Schema del fascio di neutrini di MiniBooNE (23)

- i mesoni prodotti attraversano una sezione della beamline chiamata *magnetic horn*¹, un dispositivo che, a seconda della polarità, seleziona le particelle in base alla carica, per poi decadere in volo, prevalentemente nel canale $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_{\mu}$, fino a raggiungere un assorbitore, che filtra tutto tranne i neutrini;
- il fascio residuo è formato con buona approssimazione da soli neutrini di sapore μ che oscillano lungo la baseline e vengono rilevati da un detector.

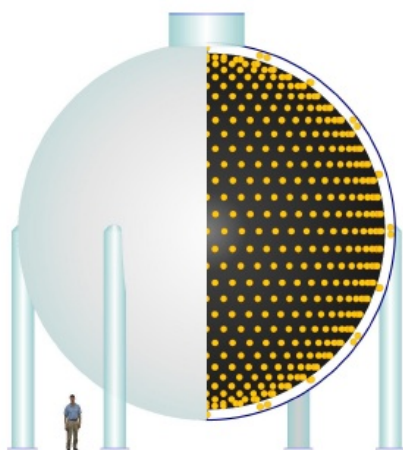


Figura 4.2: - Il detector dell'esperimento MiniBooNE, Ref. (23).

¹L'utilizzo del magnetic horn incrementa il flusso di MiniBooNE di un fattore ≈ 6 .

4.1.2 Il detector

Il detector di MiniBooNE è situato a 541 metri dal target di berillio ed è opportunamente schermato dai raggi cosmici. Esso è costituito da un recipiente sferico di acciaio riempito da olio minerale che funge da materiale scintillatore. All'interno della struttura sferica, composta da una *signal region* e una *veto region*, 1520 tubi fotomoltiplicatori vengono utilizzati per rilevare i fotoni² emessi dalle particelle cariche prodotte nell'interazione tra i neutrini del fascio e l'olio minerale nella *signal region*. Altri 240 PMT sono sistemati nella *veto region* per rilevare le particelle che entrano ed escono dal detector.

4.2 L'analisi dei dati di MiniBooNE

L'analisi dei dati di MiniBooNE è basata sul modello RFGM introdotto nella sezione 2.1. Per poter descrivere lo scattering neutrino-nucleo in tale approssimazione è necessario effettuare un *tuning* dei parametri fondamentali in gioco : la massa assiale M_A , a cui viene assegnato un valore maggiore di quello ottenuto per lo scattering su deuterio (*world average* $M_A^2 = 1.03 \text{ GeV}^2$) per descrivere la coda a grandi Q^2 dell'esperimento, e il parametro k , che tiene conto del Pauli Blocking e permette di ottenere l'andamento a piccoli Q^2 .

Un semplice test del χ^2 ha permesso di ottenere i valori (23)

- $M_A^2 = (1.23 \pm 0.20) \text{ GeV}^2$,

- $k = 1.019 \pm 0.011$.

Tali valori vengono modificati a seconda se consideriamo o meno effetti secondari quali la produzione di risonanze o le interazioni nello stato finale.

Varie pubblicazioni (Ref. (11), (28) e (32) per esempio) hanno mostrato come tali modifiche *ad hoc* dei parametri del RFGM non bastano per eliminare la discrepanza tra teoria e esperimento, puntualizzando come un modello per le interazioni neutrino-nucleo non possa quindi prescindere dal considerare gli effetti della dinamica nucleare.

²Si tratta di fotoni prodotti per scintillazione e effetto Cherenkov.

4.3 Flusso di neutrini

La figura 4.3 mostra l'andamento atteso per il flusso di neutrini e antineutrini in funzione dell'energia (Ref. (33)) che verrà utilizzato nella sezione successiva per calcolare la sezione d'urto di corrente carica e neutra.

Il *magnetic horn* lavora in polarità positiva per intensificare il flusso di neutrini e negativa per il flusso di antineutrini. Si può osservare come il flusso degli antineutrini sia meno intenso di quello dei neutrini e piccato ad energie inferiori come atteso.

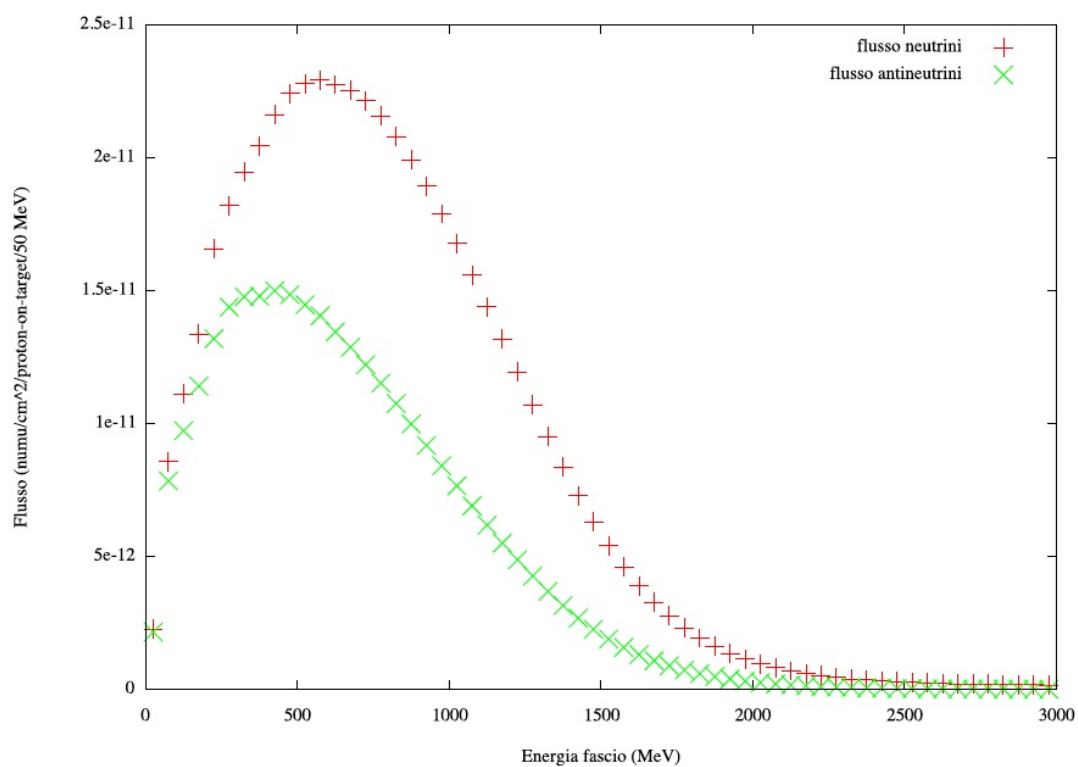


Figura 4.3: - Confronto tra flusso per neutrini e antineutrini.

5

Risultati

In questa sezione vengono introdotti i risultati trovati per lo scattering di corrente carica e neutra e il loro confronto con i dati di MiniBooNE. Vengono inoltre evidenziati alcuni risultati intermedi necessari per arrivare alle suddette sezioni d'urto.

Utilizzando il linguaggio di programmazione Fortran, sono stati realizzati alcuni programmi allo scopo di calcolare la sezione d'urto elementare neutrino-nucleone ed estenderla poi al caso neutrino-nucleo secondo quanto descritto nel capitolo 3. In questo modo è stata calcolata la sezione d'urto doppiamente differenziale

$$\frac{d^2\sigma}{d\cos\theta dT} \quad , \quad (5.1)$$

ovvero la sezione d'urto in funzione dell'angolo e dell'energia cinetica del leptone nello stato finale, un muone per la sezione d'urto CCQE e un neutrino per la NCE.

E' stata scelta la sezione d'urto doppiamente differenziale poiché da questa è facile ricavare sia la distribuzione angolare, che la distribuzione in energia

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \int \left(\frac{d^2\sigma}{d\cos\theta dT} \right) dT \quad , \quad \frac{d\sigma}{dT} = \int \left(\frac{d^2\sigma}{d\cos\theta dT} \right) d\cos\theta, \quad (5.2)$$

oltre alla distribuzione in Q^2 , ottenuta dalla relazione

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \int \left(\frac{d^2\sigma}{d\cos\theta dT} \right) \delta(Q^2 - Q_{rec}^2) dT d\cos\theta . \quad (5.3)$$

5. RISULTATI

Il valore di Q_{rec}^2 è ottenuto dalla relazione

$$CCQE \Rightarrow Q_{rec}^2 = 2E_\nu E_\mu \left(1 - \frac{p_\mu}{E_\mu} \cos\theta_\mu \right) - m_\mu^2, \quad (5.4)$$

$$NCE \Rightarrow Q_{rec}^2 = 2E_\nu E' \left(1 - \frac{|\mathbf{k}'|}{E'} \cos\theta \right), \quad (5.5)$$

dove $E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} = T_\mu + m_\mu$ per la CCQE e $E' = |\mathbf{k}'|$ per la NCE nel limite in cui il neutrino ha massa nulla.

Siamo interessati alla sezione d'urto in Q^2 poiché è la sola che può essere confrontata con i dati di MiniBooNE per la corrente neutra. Infatti, a differenza della sezione d'urto CCQE, per la NCE non è ancora stata effettuata una presa dati in $d\cos\theta$ e dT .

5.1 La sezione d'urto CCQE

Vediamo i valori ottenuti e il confronto con i dati sperimentali per lo scattering

$$\nu_\mu + {}^{12}\text{C} \rightarrow \mu^- + X. \quad (5.6)$$

5.2 La sezione d'urto NCE

5.3 Il rapporto NCE/CCQE

5.4 Conclusioni

Appendice A

Fattori di forma

I fattori di forma sono delle funzioni utilizzate nelle teorie di campo effettive per parametrizzare le proprietà dell'interazione tra le particelle a partire da osservazioni sperimentali. Questi vengono utilizzati quando il calcolo teorico non è possibile oppure è troppo complesso, come nel caso del vertice adronico di uno scattering, dove bisognerebbe tenere conto delle interazioni tra i fotoni e il mare di quark e gluoni.

A.1 Correnti cariche

La corrente carica debole responsabile del processo

$$\nu + n \rightarrow l^- + p \tag{A.1}$$

si può scrivere in base alla teoria $V - A$ come (Ref. (24))

$$\begin{aligned} \langle p(p') | J^\mu | n(p) \rangle &= \langle p(p') | V^\mu | n(p) \rangle - \langle p(p') | A^\mu | n(p) \rangle \\ &= \cos \theta_c \bar{u}_p(p') (\Gamma_V^\mu + \Gamma_A^\mu) u_n(p). \end{aligned} \tag{A.2}$$

dove θ_c è l'angolo di Cabibbo.

Secondo la teoria dei campi la corrente nella sua forma più generale sarà costituita da tutti i termini che si possono ottenere dai quadrimpulsi p e p' e dalle matrici γ , da cui

$$\begin{aligned} \Gamma_V^\mu &= \gamma^\mu F_1(Q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M} F_2(Q^2) + \frac{q^\mu}{M} F_V^{s.c.}(Q^2) \\ \Gamma_A^\mu &= \gamma^\mu \gamma^5 F_A(Q^2) + \frac{q^\mu \gamma^5}{M} F_P(Q^2) + \frac{\gamma^5 (p + p')^\mu}{M} F_A^{s.c.}(Q^2) \end{aligned} \tag{A.3}$$

dove

A. FATTORI DI FORMA

- $F_1(Q^2)$, $F_2(Q^2)$ e $F_V^{s.c.}(Q^2)$ sono i fattori di forma vettoriali,
- $F_A(Q^2)$, $F_P(Q^2)$ e $F_A^{s.c.}(Q^2)$ sono i fattori di forma assiali,
- $M = (M_n + M_p)/2$,
- l'apice *s.c.* indica le correnti di seconda classe¹,

In base alle teorie note è possibile introdurre delle ipotesi restrittive per semplificare queste espressioni.

Il modello standard delle particelle elementari è incompatibile con le correnti di seconda classe, da cui $F_V^{s.c.}(Q^2) = F_A^{s.c.}(Q^2) = 0$. Inoltre la T-invarianza e l'invarianza per coniugazione di carica C della teoria impongono che tutti i fattori di forma siano reali.

Sperimentalmente dallo scattering elettrone-nucleone si ottengono i valori dei cosiddetti fattori di forma di Sachs

$$\begin{aligned} G_E^{p,n}(Q^2) &= F_1^{EM,p,n}(Q^2) - \tau F_2^{EM,p,n}(Q^2) = \frac{1}{(1 + \frac{Q^2}{M_V^2})^2}, \\ G_M^{p,n}(Q^2) &= F_1^{EM,p,n}(Q^2) + F_2^{EM,p,n}(Q^2) = 4.71 G_E(Q^2), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

dove M_V è un parametro chiamato massa vettoriale tale che $M_V^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$ e $\tau = Q^2/4M_{p,n}^2$. I grafici A.1 mostrano l'andamento dipolare dei fattori di forma di Sachs in Q^2 .

Dalla relazione A.5 otteniamo

$$\begin{aligned} F_1^{EM,p,n}(Q^2) &= \frac{G_E^{p,n}(Q^2) + \tau G_M^{p,n}(Q^2)}{1 + \tau} \equiv F_V(Q^2), \\ F_2^{EM,p,n}(Q^2) &= \frac{G_M^{p,n}(Q^2) - G_E^{p,n}(Q^2)}{1 + \tau} \equiv F_M(Q^2). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

dove F_V e F_M sono utilizzati nella sezione 3.2 per parametrizzare $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

¹Le correnti di prima e seconda classe si caratterizzano per le trasformazioni sotto G-parità

$$\begin{aligned} GV^\mu G^{-1} &= V^\mu \rightarrow GV_{s.c.}^\mu G^{-1} = -V_{s.c.}^\mu \\ GA^\mu G^{-1} &= -A^\mu \rightarrow GA_{s.c.}^\mu G^{-1} = -A_{s.c.}^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

dove $G = Ce^{i\pi I_2}$.

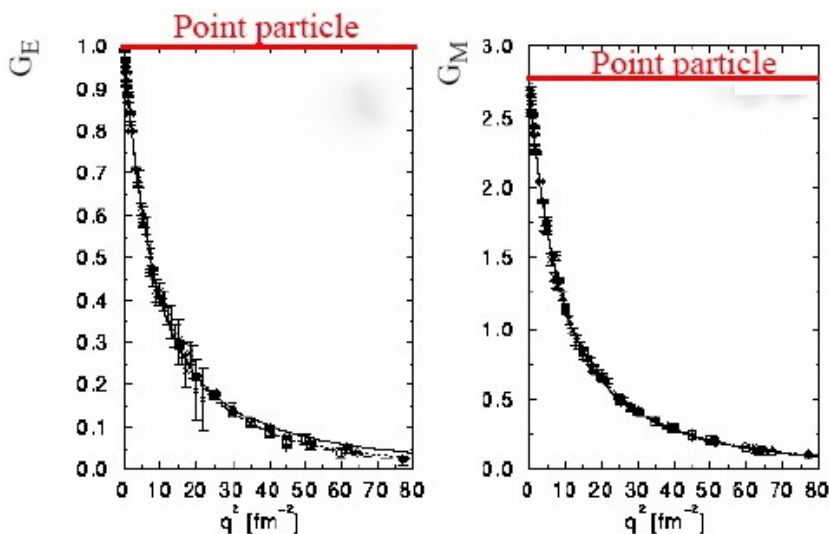


Figura A.1: - Andamento sperimentale dei fattori di forma di Sachs per scattering su protoni. La linea orizzontale indica il valore del fattore di forma nel limite di particella puntiforme.

La teoria CVC lega la parte isovettoriale delle correnti elettromagnetiche alle correnti deboli secondo le relazioni²

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1^{EM,p} - F_1^{EM,n} \\ F_2 &= F_2^{EM,p} - F_2^{EM,n}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Dalle relazioni A.6 e A.7 otteniamo

$$\begin{aligned} F_1(Q^2) &= \frac{1 + \frac{Q^2}{4M^2}(1 + \xi)}{\left(1 + \frac{Q^2}{4M^2}\right)\left(1 + \frac{Q^2}{M_V^2}\right)^2}, \\ F_2(Q^2) &= \frac{\xi}{\left(1 + \frac{Q^2}{4M^2}\right)\left(1 + \frac{Q^2}{M_V^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

dove $\xi = 3.71$, definito precedentemente.

Sottraendo le sezioni d'urto ottenute da esperimenti di corrente carica per i neutrini e gli antineutrini si può osservare che anche il fattore di forma assiale ha un andamento

²In alcune pubblicazioni invece di $F_2(Q^2)$ troviamo $\xi F_2(Q^2)$, dove $\xi = k_p - k_n = (\mu_p/\mu_N - 1) - (\mu_n/\mu_N - 0) = 3.71$ è la differenza dei momenti magnetici anomali relativi dei nucleoni. In tal caso i fattori di forma elettromagnetici $F_2^{EM,p}$ e $F_2^{EM,n}$ diventano rispettivamente $k_p F_2^{EM,p}$ e $k_n F_2^{EM,n}$.

A. FATTORI DI FORMA

dipolare

$$F_A(Q^2) = -\frac{g_A}{\left(1 + \frac{Q^2}{M_A^2}\right)^2}, \quad (\text{A.9})$$

dove M_A è la massa assiale e $g_A = F_A(0) = 1.2671$ misurato da esperimenti di β -decay. Il valore della massa assiale ricavato dalla media mondiale degli esperimenti di scattering su un target di deuterio è $M_A^2 = 1.03 \pm 0.02 \text{ GeV}^2$.

Il fattore di forma pseudoscale F_P trae origine dal diagramma di Feynman in cui al vertice assiale viene scambiato un pione. Si tratta quindi di un contributo al secondo ordine. L'ipotesi PCAC (Partial Conserved Axial Current) ci permette di dare un'espressione per F_P , in funzione del fattore di forma assiale F_A

$$F_P(Q^2) = \frac{2M^2}{Q^2 + m_\pi^2} F_A(Q^2), \quad (\text{A.10})$$

dove m_π è la massa del pione.

Mettendo insieme quanto appena detto possiamo esprimere la corrente A.2 come

$$\begin{aligned} \langle p(p') | J^\mu | n(p) \rangle = \\ = \cos\theta_c \bar{u}_p(p') \left[\gamma^\mu F_1(Q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M} F_2(Q^2) + \gamma^\mu \gamma^5 F_A(Q^2) + \frac{q^\mu \gamma^5}{M} F_P(Q^2) \right] u_n(p). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Il termine F_P risulta trascurabile nei nostri calcoli perché, sebbene sia maggiore di quello assiale, è sempre accoppiato al rapporto m_{lept}/M che vale ≈ 0.01 nel caso del muone.

A.2 Correnti neutre

Dalla teoria delle interazioni elettrodeboli di Weinberg e Salam sappiamo che la corrente neutra debole è data dalla relazione

$$\langle N | J_Z^\mu | N \rangle = \langle N | (J_3^\mu - 2\sin^2\theta_W J_{em}^\mu) | N \rangle, \quad (\text{A.12})$$

dove J_3 è la terza componente della corrente di isospin e J_{em} è la corrente elettromagnetica.

I fattori di forma delle correnti neutre dovranno rispettare questa struttura e saranno quindi descritti da

$$\begin{aligned}
 F_1^{Z,p}(Q^2) &= \left(\frac{1}{2}F_1(Q^2) - \frac{1}{2}F_1^s(Q^2) \right) - 2\sin^2\theta_W F_1^{EM,p}(Q^2) , \\
 F_1^{Z,n}(Q^2) &= \left(-\frac{1}{2}F_1(Q^2) - \frac{1}{2}F_1^s(Q^2) \right) - 2\sin^2\theta_W F_1^{EM,n}(Q^2) , \\
 F_2^{Z,p}(Q^2) &= \left(\frac{1}{2}F_2(Q^2) - \frac{1}{2}F_2^s(Q^2) \right) - 2\sin^2\theta_W F_2^{EM,p}(Q^2) , \\
 F_2^{Z,n}(Q^2) &= \left(-\frac{1}{2}F_2(Q^2) - \frac{1}{2}F_2^s(Q^2) \right) - 2\sin^2\theta_W F_2^{EM,n}(Q^2) , \\
 F_A^{Z,p}(Q^2) &= \frac{1}{2}F_A(Q^2) - \frac{1}{2}F_A^s(Q^2) , \\
 F_A^{Z,n}(Q^2) &= -\frac{1}{2}F_A(Q^2) - \frac{1}{2}F_A^s(Q^2) ,
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

dove l'apice s indica la parte isoscalare.

Questi fattori di forma sono stati studiati in gran parte nella sezione A.1. Ci soffermiamo di seguito nello studio di quelli isoscalari, non ancora introdotti.

I fattori di forma F_1^s e F_2^s sono dovuti al contributo del quark s alla carica elettrica e al momento magnetico del nucleone. Analogamente F_A^s parametrizza il contributo del quark s allo spin del nucleone.

Esperimenti recenti (Ref.(34)) di scattering di elettroni con violazione di parità hanno mostrato che i valori di F_1^s e F_2^s sono consistenti con 0.

Il valore di F_A^s a $Q^2 = 0$ è detto Δs e viene spesso usato come indice di abbondanza di quark s nel nucleone (Ref. (27)). In analogia al fattore di forma isovettoriale, si è soliti rappresentare il fattore di forma assiale isoscalare come

$$F_A^s(Q^2) = \frac{\Delta s}{\left(1 + \frac{Q^2}{M_A^2}\right)^2} , \tag{A.14}$$

dove per convenzione $\Delta s < 0$.

A. FATTORI DI FORMA

Appendice B

Limiti di integrazione per la funzione spettrale

La sezione d'urto neutrino-nucleo vale

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_l} = \int d^3p dE P(E, \mathbf{p}) \frac{d^2\sigma_{elem}}{d\Omega dE_l} \quad (\text{B.1})$$

Possiamo ottenere gli estremi di integrazione per la (B.1) dalla cinematica del processo.

L'integrale sull'impulso del nucleone può essere espresso nella forma

$$d^3p = p^2 dp d\cos\gamma d\phi = 2\pi p^2 dp d\cos\gamma \quad (\text{B.2})$$

dove γ è l'angolo tra il momento del nucleo \mathbf{p} e quello trasferito \mathbf{q} .

Dalla cinematica del sistema possiamo ricavare $\cos\gamma$ in funzione delle altre grandezze

$$\cos\gamma = \frac{s + M_{A-1}^2 - W^2 - 2(\nu + M_A)E_{A-1}}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \quad (\text{B.3})$$

dove W^2 è la massa invariante dello stato adronico prodotto e valgono le relazioni

$$\begin{aligned} M_{A-1} &= M_A - m_N + E \\ s &= (p + q)^2 \\ E_{A-1}^2 &= M_{A-1}^2 + |\mathbf{p}|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B. LIMITI DI INTEGRAZIONE PER LA FUNZIONE SPETTRALE

Imponendo $-1 \leq \cos \gamma \leq 1$ otteniamo i limiti di integrazione per $|\mathbf{p}|$

$$|\mathbf{p}|^{\pm} = \left| \frac{\Lambda |\mathbf{q}| \pm (\nu + M_A) \sqrt{\Lambda^2 - 4sM_{A-1}^2}}{2s} \right| \quad (\text{B.5})$$

dove $\Lambda = s + M_{A-1}^2 - W^2$.

Dalla radice della grandezza $\Lambda^2 - 4sM_{A-1}^2$ in B.5 ricaviamo gli estremi di integrazione in energia della B.1

$$E_{max} = \sqrt{s} - M_A - (W - m_N) . \quad (\text{B.6})$$

Bibliografia

- [1] C.L. Cowan, F. Reines, F.B. Harrison, H.W. Kruse, & A.D. McGuire, *Science* **124**, 103–104 (1956). 1
- [2] G. Danby *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **9**, 36–44 (1962). 1
- [3] J. Davis, Raymond, D.S. Harmer, & K.C. Hoffman, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 1205–1209 (1968). 1
- [4] B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP* **6**, 429 (1957) [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 549 (1957)]. 1
- [5] [Super-Kamiokande Collaboration] Y. Fukuda *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998). 1
- [6] Particle Data Group collaboration, C. Amsler *et al.*, *Phys. Lett. B* **667** 1 (2008). 2
- [7] V.M. Lobashev *et al.*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **91**, 280–286 (2001). 2
- [8] C. Kraus *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C40**, 447–468 (2005). 2
- [9] C. Giunti, M. Lavader, arXiv:hep-ph/0310238v2 (2004). 8
- [10] [Gargamelle Neutrino Collaboration], F.J. Hasert *et al.*, *Phys. Lett.* **B46**, 138–140 (1973). 20
- [11] O. Benhar & D. Meloni, *Nucl. Phys. A* **789**, 379 (2007). 41, 47
- [12] R. Smith, E. Moniz, *Nucl. Phys. B* **43**, 605 (1972). 13
- [13] R. Tolman, *Phys. Rev.* **55**, 364 (1939). 15
- [14] J. Oppenheimer, G. Volkoff, *Phys. Rev.* **55**, 374 (1939). 15
- [15] R. Schiavilla, D. Lewart, V. Pandharipande, R. Wiringa, S. Fantoni, *Nucl. Phys. A* **473**, 267 (1987). 16, 17
- [16] R. Wiringa, V. Stoks, R. Schiavilla, *Phys. Rev. C* **51**, 38 (1995). 16
- [17] P. Pudliner, V. Pandharipande, J. Carlson, S. Pieper, R. Wiringa, *Phys. Rev. C* **56**, 1720 (1997). 16
- [18] S. Pieper, R. Wiringa, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **51**, 53 (2001). 16
- [19] B. Day, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 495 (1978). 17
- [20] E. Feenberg, *Theory of quantum Fluids*, Academy Press, New York, 1969. 17
- [21] J. Clark, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **2**, 89 (1979). 17
- [22] S. Fantoni, V. Pandharipande, *Phys. Rev. C* **37**, 1697 (1988). 17
- [23] T. Katori, *A measurement of the muon neutrino charged current quasielastic interaction and a test of Lorentz violation with the MiniBooNE experiment*, Ph.D. thesis, Indiana University (2008). 26, 31, 46, 47
- [24] C.H. Lewellyn Smith, *Phys. Lett. C* **3**, 261 (1972). 51
- [25] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley Sons, 1984. 28
- [26] J. Linder, arXiv:hep-ph/0505079v3 (2006). 28
- [27] C.J. Horowitz *et al.*, *Phys. Rev. C* **48**, 3078 (1993). 29, 55
- [28] O. Benhar, N. Farina, H. Nakamura, M. Sakuda & R. Seki *Phys. Rev. D* **72** 053005 (2005). 34, 38, 42, 43, 47
- [29] O. Benhar, A. Fabrocini, S. Fantoni, & I. Sick, *Nucl. Phys. A* **579**, 493 (1994). 39, 40
- [30] O. Benhar *et al.*, *Phys. Rev. C* **44**, 2328 (1991). 44
- [31] [LSND collaboration] A.A. Anguilar-Arevalo *et al.*, *Phys. Rev. D* **64**, 112007 (2001). 45
- [32] O. Benhar, D. Meloni, *Phys. Rev. D* **80**, 073003 (2009). 47
- [33] [MiniBooNE Collaboration] A.A. Aguilar-Arevalo *et al.*, *Phys. Rev. D.* **79**, 072002 (2009). 48
- [34] [Happex Collaboration] A. Acha *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 032301 (2007). 55